数理解析研究所講究録
第631巻 1987年 84-98

"Gaussの和"つき2次形式の空間のゼータ函数

京産大・理　村瀬 篤 (Atsushi Murase)
東大・教養　菅野 孝史 (Takashi Sugano)
(学振特別研究員)

§.0 Introduction

概均質ベクトル空間(以後, P.V. と略称)に付随するゼータ函数の理論は, M. Sato により創出され, 多くの人々により研究されてきた。(たとえば, M. Sato - T. Shintani [6], T. Shintani [7, 8], T. Suzuki [9], F. Sato [5] 参照。特に, F. Sato [5] は, regular な P. V. に付随するゼータ函数の解析接続と函数等式を, (ある弱い条件の下で)示している。ここでは, ある特別な non-regular な P.V. に付随するある種のゼータ函数([8]の2次形式の空間のゼータ函数を modify したもの)を定義し, 解析接続と函数等式を証明する。

一般に, regular P.V. の場合は, 函数等式は, 元の P.V. とその dual (両方 P.V. になる)に付随するゼータ函数の間で成立する。しかしながら, 我々の扱う P.V. の

dual は P.V. ではなく，函数等式の定式化の為に，ある概均質アフィン空間（定義は後述）を導入することが必要になる。

§3で述べるように，ここで定義するゼータ函数は Jacobi 型式の空間の次元公式へのある共役類の寄与に密接に関係している（[8] の analogy）。

証明の詳細については，[3] を参照されたい。

§1. 概均質アフィン空間

G を $\mathbb{C}$ 上の連結線形代数群，V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間，ρ を G から V の affine 変換全体のなす群 $Aff(V) = GL(V) \ltimes V$ への準同型有理写像とする。Triplet (G, V, ρ) が概均質アフィン空間（P.A. と略称）とは，V の代数的真部分集合 S で，$V - S$ が single G-orbit になるものが存在することをいう。S を P.A. (G, V, ρ) の singular set と呼ぶ。$\mathrm{Im}\,\rho \subset GL(V)$ のとき (G, V, ρ) は P.V. である。

以下の主題となる P.A. を導入する為に，正整数 m, n および size m の半整数正定値対称行列 S を固定する。$V = Sym_n$（$= n$ 次対称行列の空間），

$W = M_{mn}$ (= m行n列の行列の空間), $\mathbb{V} = V \times W$ とおく。 non reductive な代数群

$$\mathbb{G} = \left\{ (\xi, g) \underset{\mathrm{df}}{=} \begin{pmatrix} 1_m & \xi \\ & 1_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_m & \\ & g \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} \xi \in M_{mn} \\ g \in GL_n \end{matrix} \right\}$$

の$\mathbb{V}$への作用を二通り次のように定める: $X = [x, u] \in \mathbb{V}$, $\mathfrak{g} = (\xi, g) \in \mathbb{G}$ に対し

$$X \bullet \mathfrak{g} = [g^{-1} x \, {}^t g^{-1}, \ (u - \xi x)\, {}^t g^{-1}]$$
$$X * \mathfrak{g} = [{}^t g (x + S[\xi] + S(u, \xi) + S(\xi, u)) g, \ (u + \xi) g],$$

ここで, $u, v \in M_{mn}$ に対し $S(u, v) = {}^t u S v$, $S[u] = {}^t u S u$ と書く。 前者を dot action, 後者を star action と呼ぶ。

<u>Lemma 1</u> $(\mathbb{G}, \mathbb{V}, \bullet)$ および $(\mathbb{G}, \mathbb{V}, *)$ は P.A. であり, singular set は それぞれ,

$$\mathbb{S} = \{ X \in \mathbb{V} \mid P(X) \underset{\mathrm{df}}{=} \det x = 0 \},$$
$$\mathbb{S}^* = \{ X \in \mathbb{V} \mid P^*(X) \underset{\mathrm{df}}{=} \det (x - S[u]) = 0 \}$$

で与えられる。

($(\mathbb{G}, \mathbb{V}, \bullet)$ は non regular な P.V. である。)

$0 \leq i \leq n$ に対し,

$$\mathbb{V}_i = \{ [x, u] \in \mathbb{V}_{\mathbb{R}} \mid \operatorname{sgn} x = (i, n-i) \},$$

$$\mathbb{V}_i^* = \{ [x, u] \in \mathbb{V}_{\mathbb{R}} \mid \mathrm{sgn}(x - S[u]) = (i, n-i) \}$$

とおくと、$\mathbb{V}_{\mathbb{R}} - \mathbb{S}_{\mathbb{R}}$ および $\mathbb{V}_{\mathbb{R}} - \mathbb{S}^*_{\mathbb{R}}$ の $\mathbb{G}^+_{\mathbb{R}} = \{ (\xi, g) \in \mathbb{G}_{\mathbb{R}} \mid \det g > 0 \}$ −orbit decomposition (dot action および star action に関する) は、

$$\mathbb{V}_{\mathbb{R}} - \mathbb{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{i=0}^{n} \mathbb{V}_i, \qquad \text{(disjoint union)}$$
$$\mathbb{V}_{\mathbb{R}} - \mathbb{S}^*_{\mathbb{R}} = \bigcup_{i=0}^{n} \mathbb{V}_i^*$$

で与えられる。

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{V}_{\mathbb{R}})$, $s \in \mathbb{C}$ に対し

$$\mathcal{F}f(X) = \int_{\mathbb{V}_{\mathbb{R}}} f(Y)\, e[\mathrm{tr}(xy + 2S(u, v))]\, dY$$
$$(X = [x, u],\ Y = [y, v])$$

および

$$\Phi_i(s, f) = \int_{\mathbb{V}_i} |P(X)|^s\, e[\mathrm{tr}(x^{-1} S[u])]\, f(X)\, dX,$$

$$\Phi_i^*(s, f) = \int_{\mathbb{V}_i} |P^*(X)|^s f(X)\, dX$$

とおく。　ここで $x \in \mathbb{R}$ に対し $e[x] = \exp(2\pi i x)$ と書く。

<u>Proposition 2</u> $f \in \mathcal{S}(\mathbb{V}_{\mathbb{R}})$ とする。

(i) $\Phi_i(s, f)$, $\Phi_i^*(s, f)$ $(0 \leq i \leq n)$ は全 s-平面へ有理型函数として解析接続される。

(ii)
$$\Phi_i(s-(m+n+1)/2,\ \mathcal{F}f)$$
$$=\sqrt{c_{n,S}}^{\,-1}(2\pi)^{n(n-1)/4-ns}\,\mathbf{e}[m(2i-n)/8+ns/4]$$
$$\cdot\Gamma_n(s)\sum_{j=0}^{n}u_{ij}(s)\,\Phi_j^*(-s,f)$$

ここに
$$c_{n,S}=(\det 2S)^n\,2^{n(n-1)/2},$$
$$\Gamma_n(s)=\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma(s-k/2),$$

$u_{ij}(s)$：$\mathbf{e}[-s/2]$ の多項式（[8] の (2.4) 式で与えられる）。

§2. P.A. に付随するゼータ函数

$X\in\mathbb{V}_{\mathbb{R}}-\mathbb{S}_{\mathbb{R}}$ および $X^*\in\mathbb{V}_{\mathbb{R}}-\mathbb{S}^*_{\mathbb{R}}$ に対し，
$$\mathbb{G}_X=\{\,g\in\mathbb{G}^+_{\mathbb{R}}\mid X\cdot g=X\,\},$$
$$\mathbb{G}^*_{X^*}=\{\,g\in\mathbb{G}^+_{\mathbb{R}}\mid X^* * g=X^*\,\}$$
とおく。$\mathbb{G}^+_{\mathbb{R}}$ の右不変 Haar 測度 $d_r g$ を
$$d_r g=(\det g)^{-n}\prod_{1\le i,j\le n}dg_{ij}\prod_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}}d\xi_{ij}\quad(g=(\xi,g))$$
により定めるとき，$\mathbb{G}_X$ および $\mathbb{G}^*_{X^*}$ の Haar 測度 $d\nu_X$ および $d\nu^*_{X^*}$ が次式により（canonical に）定義される：

$$\int_{G_{\mathbb{R}}^{+}} \Phi(g)\, d_r g$$

$$= \int_{G_X \backslash G_{\mathbb{R}}^{+}} |P(X\cdot g)|^{-(m+n+1)/2} d(X\cdot g) \int_{G_X} \Phi(hg)\, d\nu_X(h)$$

$$= \int_{G^*_{X^*} \backslash G_{\mathbb{R}}^{+}} |P^*(X^* * g)|^{-(m+n+1)/2} d(X^* * g) \int_{G^*_{X^*}} \Phi(h^* g)\, d\nu^*_{X^*}(h^*)$$

$(\Phi \in C_0^\infty(G_{\mathbb{R}}^{+}))$.

ただし，ここで $d(X\cdot g)$ および $d(X^* * g)$ は，$\mathbb{V}_i = X\cdot G_{\mathbb{R}}^{+}$ および $V_j^* = X^* * G_{\mathbb{R}}^{+}$ 上の Lebesgue 測度とする。

$\mathbb{L} = \mathbb{L}_{m,n} = Sym_n(\mathbb{Z}) \times M_{m,n}(\mathbb{Z})$，$\mathbb{L}^* = \mathbb{L}^*_{mn} = \{[x,u] \in \mathbb{V}_{\mathbb{R}} \mid x$ 半整数，$u \in (2S)^{-1} M_{mn}(\mathbb{Z})\}$ とおくと $\mathbb{L}$ (resp. $\mathbb{L}^*$) は dot action (resp. star action) に関し $\Gamma = G_{\mathbb{R}}^{+} \cap G_{\mathbb{Z}}$ - 不変である。$X \in \mathbb{L}' = \mathbb{L} \cap (\mathbb{V}_{\mathbb{R}} - \mathbb{S}_{\mathbb{R}})$ (resp. $X^* \in \mathbb{L}^{*\prime} = \mathbb{L}^* \cap (\mathbb{V}_{\mathbb{R}} - \mathbb{S}^*_{\mathbb{R}})$) に対し，$\Gamma_X = \Gamma \cap G_X$ (resp. $\Gamma^*_{X^*} = \Gamma \cap G^*_{X^*}$) とおくとき，$n=2$ かつ $-P(X)$ (resp. $-P^*(X^*)$) が $\mathbb{Q}$ で平方根をもつ場合を除いて，$\Gamma_X \backslash G_X$ (resp. $\Gamma^*_{X^*} \backslash G^*_{X^*}$) は volume finite である。このとき

$$\mu(X) = \int_{\Gamma_X \backslash G_X} d\nu_X \quad \left(\text{resp. } \mu^*(X^*) = \int_{\Gamma^*_{X^*} \backslash G^*_{X^*}} d\nu^*_{X^*}\right)$$

とおく。除外した場合は $\mu(X)=0$ (resp. $\mu^*(X^*)=0$) とおく。

$0\le i\le n$ に対し $\mathbb{L}_i=\mathbb{L}\cap\mathbb{V}_i$, $\mathbb{L}_i^*=\mathbb{L}^*\cap\mathbb{V}_i^*$ とおき、$\mathbb{L}_i/\circ$ (resp. $\mathbb{L}_i^*/*$) を $\mathbb{L}_i$ の (resp. $\mathbb{L}_i^*$ の) Γ の dot action (resp. star action) に関する一つの完全代表系とする。

$s\in\mathbb{C}$ に対し

$$\xi_i(s,\mathbb{L})=\sum_{X=[x,u]\in\mathbb{L}_i/\circ}\mu(X)\,e[-\mathrm{tr}({}^tx\,S[u])]\,|P(X)|^{-s},$$

$$\xi_i^*(s,\mathbb{L}^*)=\sum_{X^*\in\mathbb{L}_i^*/*}\mu^*(X^*)\,|P^*(X^*)|^{-s}$$

とおく。前者は、[8] の 2次形式の空間のゼータ函数を "Gauss の和" により twist したものと考えられる。

<u>Lemma 3</u> Dirichlet 級数 $\xi_i(s,\mathbb{L})$, $\xi_i^*(s,\mathbb{L}^*)$ は $\mathrm{Re}\, s>(m+n+1)/2$ で絶対収束する。

主結果は次の通り。

<u>Theorem 4</u> $n\neq 2$ と仮定する

(i) $\xi_i(s,\mathbb{L})$, $\xi_i^*(s,\mathbb{L}^*)$ $(0\le i\le n)$ は、有理型

函数として全s-平面へ解析接続され，$s=\frac{m+k+1}{2}$ ($k=1,\cdots,n$) で高々 simple pole を持つ他は正則である。

(ii) 次の函数等式が成立する。

$$\xi_i^*((m+n+1)/2-s, \mathbb{L}^*)$$
$$= c_{n,S}{}^{1/2}\, \mathbf{e}[ns/4]\,(2\pi)^{n(n-1)/4-ns}\,\Gamma_n(s)$$
$$\cdot \sum_{j=0}^{n} u_{ji}(s)\, \mathbf{e}\left[\frac{m(2j-n)}{8}\right] \xi_j(s, \mathbb{L})$$

注意： $n=2$ の時も，$\xi_2^*(s,\mathbb{L}^*)$ は定義され，$s=(m+2)/2$，$(m+3)/2$ で高々 simple pole をもつ他は正則な有理型函数として全s-平面へ解析接続される。

§3. Jacobi form の次元公式との関係

Siegel cusp form の空間の次元公式におけるある共役類の寄与が，2次形式の空間のゼータ函数の特殊値で記述されることが，Shintani [8] で示されている。 この§では類似のことが，Jacobi form の場合にも成立するこ

とを述べる。そのために，Jacobi formの定義から始める（詳細については［2］およびYamazaki［10］を参照）。

$$\underline{\underline{G}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1_{m+n} & \begin{matrix} \zeta & \eta \\ {}^t\eta & 0 \end{matrix} \\ 0 & 1_{m+n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{matrix} 1_m & \xi \\ 0 & 1_n \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 1_m & 0 \\ -{}^t\xi & 1_n \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_m & & & \\ & a & & b \\ & & 1_m & \\ & c & & d \end{bmatrix} \right.$$

$$\left. \;\middle|\; \xi, \eta \in M_{mn},\ \zeta \in Sym_m,\ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp_n \right\}$$

とおく。$\underline{\underline{G}}$の各元を，$\underline{g} = (\xi, \eta, \zeta) g$とかく。degree nのSiegel上半空間を$\mathfrak{H}_n$とすると，$\underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}$は$\mathcal{D} = \mathfrak{H}_n \times M_{mn}(\mathbb{C})$に次のように作用する：

$$\underline{g}\langle Z \rangle = \left(g\langle z \rangle,\ w \cdot j(g, z)^{-1} + \xi \cdot g\langle z \rangle + \eta \right)$$

（$\underline{g} = (\xi, \eta, \zeta) g \in \underline{\underline{G}}_{\mathbb{R}}$，$Z = (z, w) \in \mathcal{D}$；$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$に対し　$g\langle z \rangle = (az + b)(cz + d)^{-1}$，$j(g, z) = cz + d$））

weight l，index $\mathcal{S}$（§1でfixしたもの）の保型因子$J_{S,l}$を，

$$J_{S,l}(\underline{g}, Z) = \det j(g, z)^l\, \mathbf{e}\Big[tr \Big\{ -S\zeta$$

$$+ S[w]\, j(g, z)^{-1} c - 2S(\xi, w)\, j(g, z)^{-1} - S[\xi]\, g\langle z \rangle \Big\} \Big]$$

により定める。このとき，weight l，index $\mathcal{S}$のJacobi cusp formの空間$\mathfrak{S}(\mathcal{S}, l)$を，次の(i)(ii)をみたす

$\mathfrak{D}$ 上の正則函数 f たちのなす $\mathbb{C}$-vector space とする：

(i) $\quad f(\underline{\gamma}\langle Z\rangle) = J_{S,\ell}(\underline{\gamma}, Z)\, f(Z)$

$\quad\quad\quad\quad (\text{for } {}^\forall\underline{\gamma} \in \Gamma = \underline{G}_{\mathbb{Z}},\ {}^\forall Z \in \mathfrak{D})$

(ii) $\quad \underline{g} \longmapsto \left| J_{S,\ell}(\underline{g}, Z_0)^{-1} f(\underline{g}\langle Z_0\rangle)\right|$ は

$\underline{G}_{\mathbb{R}}$ 上 有界 $\quad (Z_0 = (\sqrt{-1}\,1_n,\ 0) \in \mathfrak{D})$。

ここ，$Z = (z, w)$，$Z' = (z', w') \in \mathfrak{D}$ に対し

$$K_{S,\ell}(Z, Z') = a_{S,\ell} \det\left(\frac{z - \overline{z'}}{2i}\right)^{-\ell}$$

$$\times\, \mathbf{e}\left[-\mathrm{tr}\,(z - \overline{z'})^{-1} S[w - \overline{w'}]\right]$$

とおく。ここで，

$$a_{S,\ell} = (\det 2S)^n\, 2^{-n(n+3)/2}\, \pi^{-n(n+1)/2}$$

$$\prod_{i=0}^{m-1} \prod_{j=1}^{m-i} \left(\ell - \frac{m+i}{2} - j\right),$$

また $d\mu(Z)$ を，

$$d\mu(Z) = (\det y)^{-m-n-1} \prod_{1\le i\le j\le n} dx_{ij}\, dy_{ij}$$

$$\prod_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} du_{ij}\, dv_{ij}$$

$(Z = (z, w),\ z = x + \sqrt{-1}\,y,\ w = u + \sqrt{-1}\,v)$

により定まる $\mathfrak{D}$ の $\underline{G}_{\mathbb{R}}$-不変な測度とする。

Satake [4] の結果より，次を得る。

Lemma 5　$l > m+2n$ とする。このとき，$\dim \mathfrak{S}(S,l)$ は有限で，

(3.1)
$$\int_{\Gamma\backslash D} \sum_{\gamma\in\Gamma/Z(\Gamma)} K_{S,l}(\gamma\langle Z\rangle, Z) \cdot J_{S,l}(\gamma,Z)^{-1}\, |J_{S,l}(g_Z,Z_0)|^{-2}\, d\mu(Z)$$

によって与えられる。ここで g_Z は $g_Z\langle Z_0\rangle = Z$ なる $G_{\mathbb{R}}$ の元であり，$Z(\Gamma)=\{(0\,0\,\zeta)\mid \zeta\in Sym_m(\mathbb{Z})\}$ は Γ の中心である。

$g\in G$ に対し，

$$H(g)=\{h\in H \mid h^{-1} g h g^{-1} = (0,0,\psi_g(h))\}$$

とおく。ここで $H=\{(\xi\,\eta\,\zeta)\}\subset G$。$\Gamma$ の真部分集合 Γ' を

$$\Gamma'=\{\gamma\in\Gamma \mid e[tr(S\,\psi_\gamma(h))]=1 \ \text{for } {}^\forall h\in H(\gamma)_{\mathbb{R}}\}$$

により定める。

<u>Lemma 6</u>　$l > m+2n$ とする。このとき、$\dim \mathfrak{S}(S,l)$ は (3.1) で、γ に関する和を、$\Gamma'/Z(\Gamma)$ をわたる和でおきかえたもので与えられる。

整数 r $(0 \leq r \leq n)$ に対し、Π_r を、$h\begin{pmatrix}1_n & x\\ 0 & 1_n\end{pmatrix}$ $(h \in H \cap \Gamma$, $x \in Sym_n(\mathbb{Z})$, $\mathrm{rank}\, x = r)$ なる形の元に Γ-共役になる Γ の元全体のなす集合とする。(3.1) の部分和 $I_{S,l}(\Pi_r)$ を、

$$I_{S,l}(\Pi_r) = \int_{\Gamma \backslash D} \sum_{\gamma \in \Pi_r \cap \Gamma'/Z(\Gamma)} K_{S,l}(\gamma\langle Z\rangle, Z)\, J_{S,l}(\gamma, Z)^{-1} \left|J_{S,l}(g_Z, Z_0)\right|^{-2} d\mu(Z)$$

により定める。Shintani [8] にならって、

$$\sum_{r=0}^{n} I_{S,l}(\Pi_r)$$

を、"$\mathfrak{S}(S,l)$ の次元公式への purely parabolic 共役類の寄与" と呼ぶ。[8] の議論を踏襲することにより、次を得る。

Theorem 7 $\ell \geq 2n+m+3$ ならば、

$I_{s,\ell}(\square_r)$ $(0 \leq r \leq n)$ は絶対収束し、

$$(\det 2S)^{n-r}\, 2^{r(n-r)-1}\, (2\pi)^{-(n-r)(n-r+1)/2}$$

$$\cdot\, \omega_{n-r}\, U_{n-r}^{-1} \prod_{i=1}^{n-r} \prod_{j=1}^{i} \left(\ell - \frac{m+n-i}{2} - j\right)$$

$$\cdot\, \xi_r^*(r-n\, ;\, \mathbb{L}_{m,r}^*)$$

に等しい。ここで、

$$U_r = \prod_{k=1}^{r} 2\pi^k / \Gamma(k), \quad C_r = \prod_{k=1}^{r} 2\pi^{k/2} / \Gamma(k/2),$$

$$\omega_\ell = \zeta(2)\zeta(4)\cdots\zeta(2\ell).$$

ただし、$r=0$ のとき、

$$\xi_0^*(s\, ;\, \mathbb{L}_{m,0}^*) \equiv 2$$

とおく。

注意 $\xi_n^*(s\, ;\, \mathbb{L}_{mn}^*)$ の非負整数点での特殊値は、$n \leq 2$ の場合のみ explicit にわかる。$n=1$ のときは、classical な Hurwitz zeta function に帰着され、Bernoulli 多項式で記述される。一方、$n=2$ の時は、$\xi_2^*(s\, ;\, \mathbb{L}_{m,2}^*)$ は Arakawa [1] で研究されている partial zeta function の線形結合

として表わされ，［1］の結果を用いることにより，
$\xi_2^*(1-k\,;\mathbb{L}^*_{m,2})\in\mathbb{Q}\quad(k=1,2,\cdots)$ が示される。
（S が与えられれば具体的に計算できる：たとえば，
$m=1$, $S=(1)$ のとき $\xi_2^*(0,\mathbb{L}^*_{1,2})=2^{-6}$ である。）

References

[1] Arakawa, T. : Special values of L-functions associated with the space of quadratic forms and the representation of $Sp(n,\mathbb{F}_p)$ in the space of Siegel cusp forms, preprint.

[2] Murase, A. : L-functions attached to Jacobi forms of degree n, preprint.

[3] Murase, A. and Sugano, T. : A note on zeta functions associated with certain prehomogeneous affine spaces, preprint.

[4] Satake, I. : A group extention and its unitary representation (in Japanese), Sugaku 21 (1969), 241-253.

[5] Sato, F. : Zeta functions in several variables

associated with prehomogeneous vector spaces I : Functional equation, Tôhoku Math. J. 34 (1982), 437-483.

[6] Sato, M. and Shintani, T. : On zeta functions associated with prehomogeneous vectorspaces, Ann. of Math. 100 (1974), 131-170.

[7] Shintani, T. : On Dirichlet series whose coefficients are class-numbers of integral binary cubic forms, J. Math. Soc. Japan, 24 (1972), 132-188.

[8] Shintani, T. : On zeta functions associated with the vector space of quadratic forms, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 22 (1975), 25-65.

[9] Suzuki, T. : On zeta functions associated with quadratic forms of variables coefficients, Nagoya Math. J., 73 (1979), 117-147.

[10] Yamazaki, T. : Jacobi forms and a Maass relation for Eisenstein series, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 33 (1986), 295-310.