

## Non-holomorphic modular forms について

神戸大. 理 高田 一郎 ( Ichiro Takada )

神戸大. 理 平松 豊一 ( Toyokazu Hiramatsu )

この稿では, Non-holomorphic modular forms に関するいくつかの  
話題についての解説を行う。

まず, 記号と定義について;

$\Gamma$ : 第 1 種 Fuchs 群,

$$\Gamma \ni -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R},$$

$\chi$ : multiplier of weight  $k$ , i.e.,

$$\chi\left(-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = e^{ik\pi},$$

$$\chi(\gamma_1 \gamma_2) (j_{\gamma_1 \gamma_2}(z))^k = (j_{\gamma_1}(z))^k (j_{\gamma_2}(z))^k \chi(\gamma_1) \chi(\gamma_2),$$

$\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma.$

$$k \neq 1. \quad j_\gamma(z) = cz + d, \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$$\Delta_k := y^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - iky \frac{\partial}{\partial x}.$$

上半平面  $H$  上の関数  $f(z)$  が non-holomorphic modular forms である  
とは,

$$\Delta_k f = -\lambda f \quad (\lambda \in \mathbb{C}),$$

$$f(\gamma z) = e^{ik \arg(cz+d)} \chi(\gamma) f(z), \quad \forall \gamma \in \Gamma,$$

(+ polynomial growth at infinity).

特に以下では、

$$k=0 : \Delta_0 = \Delta.$$

とし、断わりのない限り

$$\Gamma = \Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

としておく。

また、 $f$ : cusp form, eigenfunction of the Hecke operators, i.e.,

$$f(z) = \sum_{n \neq 0} a_n \sqrt{|y|} K_{ir}(2\pi |n| y) e^{2\pi i n x},$$

$$K_s(y) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{y}{2}(u+\frac{1}{u})} u^{s-1} du, \quad \lambda = \frac{1}{4} + r^2.$$

のとき、興味深い次の予想がなされている。

### Ramanujan-Petersson Conjecture

$$|a_n| \leq |a_1| d(n), \quad \text{ただし, } d(n) = \sum_{0 < d|n} 1.$$

### Selberg Conjecture

$f$  の first eigenvalue  $\lambda_1 = \lambda_1(\chi)$  に対し、

$$\lambda_1 \geq \frac{1}{4}.$$

前者は、既に証明されている holomorphic case に関する主張の、non-holomorphic case への類推であり、後者は実2次体の

類数に関する Gauss-Hasse の予想や、zeta 関数等の零点分布にも関連している。( [2] )

本稿では、これらの予想に関連する結果の解説を通して、non-holomorphic の世界の一部を俯瞰する。

### §1. 特別な群に対する Selberg Conjecture の証明

いくつかの特別な群  $\Gamma$  に対しては、既に  $\lambda \geq \frac{1}{4}$  が示されており、証明には大きく分けて次の様なアプローチの方法が知られている。

- (a) the Maass method,
- (b) the  $L_2$  method (Roelcke, Vignéras),
- (c) the Weyl method (Selberg, Buser).

以下、これらの方法による実際の証明を追ってみることにしよう。

#### 1.1 $\Gamma = \Gamma(1)$ に対する証明

(the Maass method)

$$s = \frac{1}{2} + ir, \quad \lambda = s(1-s) \quad \text{と} \quad \Gamma.$$

$$f(z) = \sum_{n \neq 0} c_n W_s(2\pi |n| y) e^{-2\pi |n| y} e^{2\pi i n x},$$

$$\text{ただし、} \quad W_s(y) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-u} u^{s-1} \left(1 + \frac{u}{2y}\right)^{s-1} du, \\ (c_n = \frac{1}{2} |n|^{-\frac{1}{2}} a_n).$$

とおく。

ここで、もし  $\lambda = \lambda_1 \leq \frac{1}{4}$  であるとすると、

$$\frac{1}{2} \leq s \leq 1.$$

$W_s(y)$  は減少関数で、 $0 < W_s(y) < W_s(\infty) = 1$ .

さらに、 $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$  より、

$$W_s(y) \geq 1 - \frac{1}{8y}.$$

今、 $z = x + iy$ ,  $y \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$  において、 $|f(z)|$  が  $z = z_0 = x_0 + iy_0$  で最大値  $M$  をとるものとする。

$0 < \rho < 1$  に対し、

$$\begin{aligned} & |c_n| W_s(2\pi|n|\rho y_0) e^{-2\pi|n|\rho y_0} \\ &= \left| \int_0^1 f(x + i\rho y_0) e^{-2\pi i n x} dx \right| \leq M. \end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned} M = |f(z_0)| &\leq \sum_{n \neq 0} \frac{M \cdot W_s(2\pi|n|\rho y_0) e^{-2\pi|n|\rho y_0}}{W_s(2\pi|n|\rho y_0) e^{-2\pi|n|\rho y_0}} \\ &\leq \sum_{n \neq 0} M \cdot \frac{e^{-2\pi|n|\rho y_0(1-\rho)}}{1 - \frac{1}{16\pi\rho y_0}} \\ &\leq \frac{2M}{\left(1 - \frac{1}{8\sqrt{3}\pi\rho}\right) (e^{\sqrt{3}\pi(1-\rho)} - 1)}. \end{aligned}$$

特に、 $\rho = \frac{3}{\pi}$  とすると、

$$\frac{2}{\left(1 - \frac{1}{8\sqrt{3}\pi\rho}\right) (e^{\sqrt{3}\pi(1-\rho)} - 1)} = 0.20 \dots < 1.$$

$$\therefore M = 0 \quad : \quad f(z) \equiv 0.$$

1.2  $\Gamma = \Gamma(N)$ ,  $N \leq 7$  に対する証明  
( the  $L_2$  method )

$$\Gamma = \Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\},$$

$\|f\| = 1$  とすると.

$$\lambda = (-\lambda f, f) = \iint_{D_N} \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|^2 \right\} dx dy,$$

ただし,  $D_N$  は  $\Gamma(N)$  の基本領域.

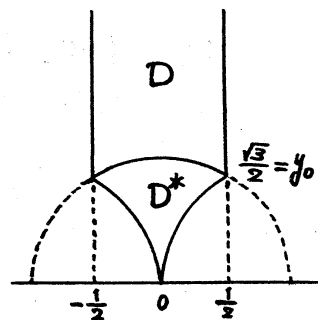
さて,

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) / \bar{\Gamma} = \bigcup_i \gamma_i \bar{\Gamma},$$

$$f(\gamma_i(z)) = f_i = \sum_{n \neq 0} a_n^{(i)}(y) e^{2\pi i n x / N}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} 2\lambda &= \iint_{D+D^*} \left\{ \sum_i \left( \left| \frac{\partial f_i}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial f_i}{\partial y} \right|^2 \right) \right\} dx dy \\ &> \iint_{D+D^*} \sum_i \left| \frac{\partial f_i}{\partial x} \right|^2 dx dy \\ &> \int_{y_0}^{\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_i \left| \frac{\partial f_i}{\partial x} \right|^2 dx dy \\ &= \int_{y_0}^{\infty} \sum_{n \neq 0} \frac{4\pi n^2}{N^2} \sum_i |a_n^{(i)}(y)|^2 dy \end{aligned}$$



$y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$  :  $D$  の height

上式では, Parseval の公式 :  $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f|^2 dx = \sum_{n \neq 0} |a_n(y)|^2$  を用いた.

$$> \frac{4\pi}{N^2} \cdot y_0^2 \int_{y_0}^{\infty} \sum_{n \neq 0} \sum_i |a_n^{(i)}(y)|^2 \frac{dy}{y^2}$$

$$= \frac{4\pi^2 y_0^2}{N^2} \int_{y_0}^{\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_i |f_i|^2 \frac{dx dy}{y^2}$$

← Parseval

$$\begin{aligned}
 &> \frac{4\pi^2 y_0^2}{N^2} \iint_D \sum_i |f_i|^2 \frac{dx dy}{y^2} \\
 &= \frac{4\pi^2 y_0^2}{N^2} \|f\|^2 = \frac{3\pi^2}{N^2}.
 \end{aligned}$$

故に、 $\lambda > \frac{3\pi^2}{2N^2}$ .

従って、 $N \leq 7$  ならば、 $\lambda > \frac{1}{4}$ .

### 1.3 $\Gamma = \Gamma_0(N)$ , $N \leq 17$ と Hecke triangle group に対する証明 (the Weyl method & the $L_2$ method, [1], [5])

まず、上半平面  $H$  上の関数  $f$  が domain (滑らかな単純閉曲線の内部)  $D$  上の境界条件を満足するとは、次のうち1つが成立することである。

(i)  $\partial D$  上で  $f=0$ . (Dirichlet condition)

(ii) ベクトル  $\text{grad } f$  は、境界の方向を指している。

(i.e. 法線方向の導関数:  $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$  on  $\partial D$ )

(iii)  $\partial D$  は有限個の弧に分けられ、それらは2つずつ対になっていて合同で、合同な2つの弧の対応する点での  $f$  の値は等しい。(Periodic condition)

(iv)  $\partial D$  は (i), (ii) または (iii) のどれか1つが成立する有限個の弧に分かれる。

このとき、 $f$  が domain  $D$  上の eigenfunction とは、次の (i) (ii) (iii) を満足する関数のことである。

(i)  $\text{div grad } f = -\lambda f$  on  $D$  ( $\lambda \in \mathbb{C}$ ),

(ii)  $f$  は  $D$  上の境界条件を満足する.

(iii)  $\iint_D f^2 d\mu < \infty$  (ただし,  $d\mu = \frac{dx dy}{y^2}$ ).

例えは, Eisenstein 級数は domain  $D = \Gamma(1) \backslash H - \{\infty\}$  上の eigenfunction である. Divergence theorem (Gauss の定理) より,  $f$  が  $D$  上の境界条件を満足する関数のとき,

$$\iint_D |\text{grad } f|^2 d\mu = - \iint_D f \text{div grad } f d\mu.$$

特に,  $f$  が  $D$  上の eigenfunction のときは,

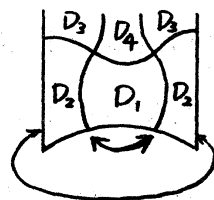
$$\iint_D |\text{grad } f|^2 d\mu = \lambda \iint_D f^2 d\mu.$$

今,  $f$  を上半平面上の関数とするとき,  $f=0$  となる曲線を nodal line, nodal line の内部を nodal domain という.

このとき, 次の定理が成立する.

(Courant's Nodal Line Theorem)

Periodic boundary condition のある domain  $D$  での eigenfunction の nodal line, nodal domain は  $\partial D$  において対応する部分が接合される.



さて, 話を Selberg conjecture のおへ戻そう.

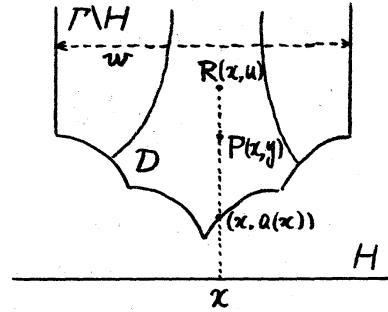
$\Gamma = \Gamma_0(N)$ ,  $D$  は  $\Gamma \backslash H$  内の nodal domain,  $f(z)$  は  $D$  上の eigenfunction,  $f(z) = f(x, y)$  [ $z = x + iy$ ] の Fourier 展開を.

$$\sum_{n \neq 0} a_n(y) e^{2\pi i n x / w} \quad (k \neq 1). \quad w: \Gamma \setminus H \text{ の width.}$$

とする。また、

$$a = a(x) = \min_{x+iy \in D} y,$$

点  $P, R$  を右図の様におくと、



$$f(x, y) = f(x, u) - \int_y^u \frac{\partial f}{\partial y}(x, v) dv$$

従って、

$$f(x, y)^2 \leq \left(1 + \frac{1}{k}\right) f(x, u)^2 + (1+k) \left\{ \int_y^u \frac{\partial f}{\partial y}(x, v) dv \right\}^2 \quad (k > 0),$$

さらに、

$$\left\{ \int_y^u \frac{\partial f}{\partial y}(x, v) dv \right\}^2 \leq \int_y^u h(v) dv \int_y^u \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, v) \right|^2 \frac{dv}{h(v)}.$$

ここで、

$$h(v) = \begin{cases} v-a & (a \leq v \leq 2a), \\ a & (2a \leq v), \end{cases} \quad k = \frac{\frac{7}{8}a^2}{y^2 - \frac{7}{8}a^2}.$$

とおくと、上の2つの不等式より、

$$\begin{aligned} (*) \quad \int_a^{2a} \frac{f(x, y)^2}{y^2} dy &\leq \int_a^{2a} \frac{8y^2}{7a^2} f(x, u)^2 \frac{dy}{y^2} \\ &+ \int_a^{2a} \frac{y^2}{y^2 - \frac{7}{8}a^2} \left( a(u-2a) + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}(y-a)^2 \right) \int_y^u \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, v) \right|^2 \frac{dv}{v-a} \frac{dy}{y^2}. \end{aligned}$$

右辺第2項の積分の順序を交換すると、

$$\int_{v=a}^{2a} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, v) \right|^2 \int_{y=a}^v \frac{a(u - \frac{3a}{2}) - \frac{1}{2}(y-a)^2}{y^2 - \frac{7}{8}a^2} dy \frac{dv}{v-a} \quad \text{----- ①}$$

$$+ \int_{v=2a}^{\infty} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, v) \right|^2 \int_{y=a}^{u^{-1}(v)} \frac{a(u - \frac{3a}{2}) - \frac{1}{2}(y-a)^2}{y^2 - \frac{7}{8}a^2} dy \frac{dv}{v-a} \quad \text{----- ②}$$

ここで、 $y$  の被積分関数を constant 4 にすると、



$$u = u(y) = \frac{3}{2}a + \frac{(y-a)^2}{2a} + \frac{4}{a}(y^2 - \frac{7}{8}a^2).$$

従って、①式は、

$$4 \int_a^{2a} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|^2 dv.$$

また、 $u(v) - v$  は  $v \geq a$  で増加 ↓)  $\frac{u^{-1}(v) - a}{v - a} < 1$  ↓) 7.

$$(\textcircled{2} \text{式}) < 4 \int_{2a}^{\infty} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|^2 dv.$$

まとめ、(\*)式右辺第2項は、

$$< 4 \int_a^{\infty} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, v) \right|^2 dv.$$

次に、(\*)式右辺第1項は、

$$\begin{aligned} \frac{8}{7a^2} \int_a^{2a} f(x, u)^2 dy &\leq \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{7a^2} \int_a^{2a} f(x, u)^2 \frac{9y-a}{a} dy \\ &= \frac{1}{7a^2} \int_{2a}^{\frac{29}{2}a} f(x, u)^2 du \\ &\leq \frac{1}{7a^2} \int_{2a}^{\infty} f(x, u)^2 du. \end{aligned}$$

以上まとめ、

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \int_a^{\infty} f^2 d\mu &= \iint_a^{2a} f^2 \frac{dx dy}{y^2} + \iint_{2a}^{\infty} f^2 \frac{dx dy}{y^2} \\ &< \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \left[ \frac{1}{7a^2} \int_{2a}^{\infty} f^2 dy + 4 \int_a^{\infty} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, v) \right|^2 dv \right] dx + \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \frac{1}{4a^2} \int_{2a}^{\infty} f^2 dy dx \\ &= \iint_{2a}^{\infty} \frac{11}{28a^2} f^2 dy dx + \iint_a^{\infty} 4 \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|^2 dy dx \\ &\leq \frac{w^2}{4\pi^2} \iint_{2a}^{\infty} \frac{11}{28a^2} \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^2 dy dx + 4 \iint_a^{\infty} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|^2 dy dx \end{aligned}$$

$$a = a(x) \geq a_0 = \sqrt{3}/2 \downarrow)$$

$$\leq \max \left( \frac{11w^2}{112\pi^2 a_0^2}, 4 \right) \iint_a^{\infty} \left( \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|^2 \right) dy dx$$

$$= \max\left(\frac{11w^2}{112\pi^2 a_0^2}, 4\right) \iint_a^\infty |\text{grad } f|^2 d\mu.$$

故に.

$$\lambda > \frac{1}{\max\left(\frac{11w^2}{112\pi^2 a_0^2}, 4\right)}.$$

即ち.

$$\frac{11w^2}{112\pi^2 a_0^2} < 4 \quad \text{ならば} \quad \lambda > \frac{1}{4}.$$

$w \leq N$  であつたから.

$$N \leq 17 \quad \text{ならば} \quad \lambda > \frac{1}{4}.$$

Hecke triangle group :

$$\Gamma = \Gamma_g = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2\cos\frac{\pi}{g} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad g \geq 3 \quad (g \in \mathbb{Z}),$$

の場合も、Nodal line に關する理論を用いて、上と同様の方法で Sarnak により

$$\lambda_1(1) > \frac{1}{4}$$

が示されている。

### Remark

Moreno は、 $\Gamma_0(148)$  の cusp form で、 $\lambda_1(\chi) = \frac{1}{4}$  となるものを構成している。

## §2. Selberg conjecture と Ramanujan-Petersson conjecture の関係について

Selberg conjecture は, Ramanujan-Petersson conjecture の無限素点での内容であると解釈することができるといえる。それは, holomorphic case (Satake [7]) と, non-holomorphic case (Langlands [4]) に分けて成されている。まず, holomorphic case から解説することにしよう。

### 2.1 Zonal spherical functions

$G$ : locally cpt. unimodular group,  $K$ : cpt. subgroup of  $G$  とし,

$L = L(G, K)$ : cpt. support をもつ  $G$  上の複素数値連続関数  $\phi$  の成す algebra (convolution が積) である。

$$\phi(kgk') = \phi(g) \quad [\forall k, k' \in K, \forall g \in G] \text{ なるもの。}$$

$L$ : commutative と仮定する。

Def.  $\omega$ : zonal spherical func. on  $G$  (relative to  $K$ ) とは,

$\omega$ :  $G$  上の複素数値関数で,  $\omega(1) = 1$ .

$$\omega(kgk') = \omega(g), \quad \forall k, k' \in K, \forall g \in G.$$

$$\forall \phi \in L, \quad \phi * \omega = \lambda_\phi \cdot \omega.$$

となるもの。

$L \ni \phi \mapsto \lambda_\phi \in \mathbb{C}$ : ring homomorphism であって,

$$\lambda_\phi = \hat{\omega}(\phi) = \int_G \phi(g) \omega(g^{-1}) dg$$

と書くと,  $\omega$  より一意的に  $\hat{\omega}$  が定まる。

Def.  $\Omega = \Omega(G, K)$  : zonal spherical func. (rel. to  $K$ ) 全体の成り集合。

$\Omega^+$  : positive definite zonal spherical func. 全体の成り集合。

Lemma ([6] 参照)  $\omega \in \Omega^+$ ,  $\phi \in L$  のとき.

$\phi$  : self-adjoint  $\Rightarrow \hat{\omega}(\phi) \in \mathbb{R}$ ,

$\phi$  : real-non-negative  $\Rightarrow |\hat{\omega}(\phi)| \leq \hat{1}(\phi)$ .

以下特に.

$$G = PL(2, \mathbb{Q}) = GL(2, \mathbb{Q}) / \text{center}$$

として.

$$G_p = PL(2, \mathbb{Q}_p),$$

$$K_p = \begin{cases} O(2) / \{\pm 1\} & \text{if } p = \infty, \\ GL(2, \mathbb{Z}_p) / \text{center} & \text{if } p < \infty, \end{cases}$$

$A_p : \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_2 \end{pmatrix} \right\}$  の  $G_p$  内の image,

$N_p : \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$  の  $G_p$  内の image.

とおくと. 岩沢分解と elementary divisor decomposition より.

$$G_p = K_p A_p N_p = K_p A_p K_p.$$

さて.  $\alpha \in A_p$  の (quasi-) character として.  $G$  上の複素数値関数  $\phi$  で.

$$\begin{cases} \phi(gan) = \alpha(a) \phi(g), \quad \forall a \in A_p, g \in G_p, n \in N_p, \\ \|\phi\| = \int_K |\phi(k)|^2 dk < \infty. \end{cases}$$

を満足するもの全体を  $\mathcal{H}^\alpha$  とすると.

$$T_{g_1}^\alpha(\phi)(g) = \phi(g_1^{-1}g), \quad \phi \in \mathcal{H}^\alpha,$$

により  $G_p$  の表現  $T_{g_1}^\alpha(\phi)$  が得られる.

ここで  $\alpha|_{A_p \cap K_p} = 1$  であれば

$$\alpha(a) = \left| \frac{\xi_1}{\xi_2} \right|_p^{s-\frac{1}{2}},$$

ただし  $s \in \mathbb{C}$  は  $\text{mod. } \frac{2\pi i}{\log p}$  for  $p < \infty$  である.

が成り立ち、さらにこの場合

$$\psi_\alpha(kan) = \alpha(a), \quad k \in K_p, a \in A_p, n \in N_p,$$

とおくと、 $\psi_\alpha$  は  $\mathcal{H}^\alpha$  の  $K_p$ -不変な unit vector となり、対応する zonal spherical function は.

$$w_s(g) = \langle \psi_\alpha, T_g^\alpha \psi_\alpha \rangle = \int_K \psi_\alpha(g^{-1}k) dk \quad (2.1)$$

となる。上の準備の下で、次の結果が得られる。([6])

### Theorem

•  $L(G_p, K_p)$  は可換.

•  $\Omega_p = \Omega(G_p, K_p) = \{w_s \mid s \in \mathbb{C}\}$  である.

$$w_s = w_{s'} \iff \begin{cases} s' \equiv \pm s \pmod{\frac{2\pi i}{\log p}} & \text{for } p < \infty, \\ s' = \pm s & \text{for } p = \infty. \end{cases}$$

$$\Omega_p^+ = \begin{cases} \{w_s \mid \text{Re } s = 0\} \cup \{w_s \mid -\frac{1}{2} \leq \text{Re } s \leq \frac{1}{2}, \text{Im } s = \frac{n\pi i}{\log p} \ (n \in \mathbb{Z})\}, & p < \infty, \\ \{w_s \mid \text{Re } s = 0\} \cup \{w_s \mid -\frac{1}{2} \leq s \leq \frac{1}{2}\}, & p = \infty. \end{cases}$$

この定理より、 $w_s \in \Omega_p^+$  のとき

(i)  $p < \infty$  ならば

$\tau_p : K_p \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K_p$  の特性関数とすれば (2.1) より、

$$\hat{w}_s(\tau_p) = p^{\frac{1}{2}}(p^s + p^{-s}).$$

さらに、Lemma より、

$$\hat{w}_s(\tau_p) \in \mathbb{R} \text{ かつ } |\hat{w}_s(\tau_p)| \leq \hat{1}(\tau_p) = 1 + p.$$

(ii)  $p = \infty$  ならば、

$\Delta$  : 上半平面  $H = G_\infty / K_\infty$  上の Laplacian のとき、

$$\Delta w_s = (s^2 - \frac{1}{4}) w_s.$$

従って、 $s$  : 純虚数  $\Rightarrow \lambda > \frac{1}{4}$ .

上述の事は、positive definite な zonal spherical function を媒介

に、 $p < \infty$  の場合が Ramanujan-Petersson conjecture と、

$p = \infty$  の場合が Selberg conjecture と関連する事を示唆している。

## 2.2 2つの予想の定式化

上の内容を参考にして、Ramanujan-Petersson conj. と Selberg conj. の(同時)定式化を行う。

$$G = PL(2, \mathbb{Q}).$$

$G_A = \prod_p' G_p$  を  $G$  に対応する adèle 群、

$G_{\mathbb{Q}} : G_A$  の離散部分群で  $\text{vol}(G_{\mathbb{Q}} \backslash G_A) < \infty$  なるもの。

$$K_\infty = \prod_{p < \infty} K_p.$$

とおく。

今、偶数  $\nu$  に対し、

$$K_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \right\} / \{\pm 1\}$$

の character  $\chi_\nu$  を次で決める。

$$\chi_\nu(k) = e^{\nu i \theta}, \quad k \in K_\infty.$$

また

$$L_\infty^{(\nu)} = L^{(\nu)}(G_\infty, K_\infty)$$

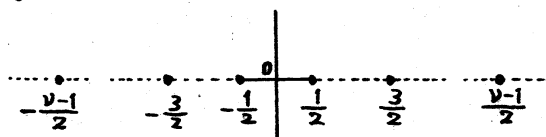
と、次の条件を満足する cpt. support をもつ  $G_\infty$  上の関数  $\phi$  全体の成す algebra とする。

$$\phi(kgk') = \phi(g) \chi_\nu(k) \chi_\nu(k') \quad \text{for } k, k' \in K_\infty, g \in G_\infty.$$

前節における  $\Omega_\infty$  の定義において、 $L_\infty$  を  $L_\infty^{(\nu)}$  にとりかえたものを  $\Omega_\infty^{(\nu)}$ 、そのうち positive definite なもの全体のなす集合を  $\Omega_\infty^{(\nu)+}$  とおくと、 $\omega \in \Omega_\infty^{(\nu)}$  に対し、

$$C\omega = -\lambda\omega, \quad \text{ただし } C \text{ は } G_\infty \text{ の Casimir operator.}$$

となり、 $\omega$  を  $s \in \mathbb{C}$  (ただし、 $\lambda = \frac{1}{8} - \frac{s^2}{2}$ ) によって parametrize できる。さらに、 $\Omega_\infty^{(\nu)+}$  の元に対応する parameter  $s$  は次の diagram で記述される。(ただし、 $s$  と  $-s$  を同一視する)



即ち、 $\operatorname{Re} s = 0$ ,  $-\frac{1}{2} \leq s \leq \frac{1}{2}$ ,  $s = \pm \frac{\nu-1}{2}$  ( $\nu$ : 偶数) となる  $s$  たちである。

さて、 $\Gamma = \operatorname{PGL}(2, \mathbb{Z}) \subset G_\infty$  として、

$\mathcal{E}_\nu = \mathcal{E}_\nu(\Gamma)$ : weight  $\nu$  ( $\nu > 0$ ) の cusp forms 全体の成す空間。

とおく。  $f \in \mathcal{E}_\nu$  に対して、

$$F(g) = f(g(i)) j(g, i)^{\frac{\nu}{2}}, \quad g \in G,$$

$$\text{ただし、 } j(g, z) = \frac{\det g}{(cz+d)^2}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

とおけば、

$$\begin{cases} F(\gamma g k) = F(g) \chi_{-\nu}(k), & \forall \gamma \in \Gamma, \forall g \in G, \forall k \in K, \\ \mathcal{C}F = \frac{\nu(\nu-1)}{8} F & [\mathcal{C} \text{ は } G_\infty \text{ の Casimir operator}], \\ \int_{\Gamma \backslash G} |F|^2 < \infty. \end{cases}$$

を満たすのは、 $\mathcal{E}_\nu$  の定義から明らかである。ここで、

$$g \in G_A \text{ と}$$

$$g = \xi(k_0 \times g_\infty), \quad \xi \in G_Q, k_0 \in K_0, g_\infty \in G_\infty.$$

と分解して、この表現に対し、

$$\tilde{F}(g) = F(g_\infty)$$

さらに、

$$\tilde{\mathcal{E}}_\nu = \{ \tilde{F} \mid f \in \mathcal{E}_\nu \}$$

とおこう。

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(G_Q, G_Z)$$



$\mathbb{C}$  上の Hecke 環 とすると、環同型

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}(G_{\mathbb{Q}}, G_{\mathbb{Z}}) & \simeq & \prod_{p < \infty} L(G_p, K_p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_{\mathbb{Z}} \cong G_{\mathbb{Z}} & \longleftrightarrow & (K_0 \cong K_0 \text{ の特性関数}), \xi \in G_{\mathbb{Q}} \end{array} \quad (2.2)$$

を得、 $K_0 \cong K_0$  の特性関数  $\phi_0$  に対し、

$$f|_{G_{\mathbb{Z}} \cong G_{\mathbb{Z}}} = \tilde{F} * \phi_0$$

が成り立つので、同型な環 (2.2) 上の module としての同型

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_\nu & \simeq & \tilde{\mathcal{G}}_\nu \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{f} & \longrightarrow & \tilde{F} \end{array} \quad (2.3)$$

を得る。従って、

$\tau_p = K_p \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K_p$  の特性関数  
のとき、

$$\begin{aligned} \tilde{F} * \tau_p &= \hat{\omega}_{\tau_p}(\tau_p) \tilde{F} \\ &= p^{\frac{1}{2}} (p^{s_p} + p^{-s_p}) \tilde{F}. \end{aligned}$$

(2.2) の同型の下では、

$$p^{1-\frac{\nu}{2}} T_p \longleftrightarrow \tau_p \quad (T_p : \text{Hecke operator})$$

と対応しており、

$f \in \mathcal{G}_\nu$  が全ての  $T_p$  の eigenfunction:

$$T_p f = a_p f$$

であれば、

$$f(z) = c \sum_{n > 0} a_n e^{2\pi i n z}$$

そこで.

$$a_p = p^{\frac{\nu}{2}-1} \hat{\omega}_{Sp}(\tau_p) = p^{\frac{\nu-1}{2}} (p^{Sp} + p^{-Sp}).$$

従って.

(i)  $p < \infty$  の場合

$$S_p: \text{純虚数} \implies |p^{Sp} + p^{-Sp}| \leq 2$$

$\implies$  Ramanujan-Petersson Conjecture.

(ii)  $p = \infty$  の場合

$$S_p: \text{純虚数} \iff \text{Selberg Conjecture.}$$

Non-holomorphic な場合も、2つの予想の相互関係が、全く同様の形式で、Langlands ([4]) においてなされている。

#### References

- [1] M. N. Huxley, Introduction to Kloostermania, in Elementary and Analytic Theory of Numbers, Banach Center Publications, vol.17, WARSAW (1985), 217-305.
- [2] H. Iwanic, Non-holomorphic modular forms and their applications, in Modular Forms (Ed. Rankin), ELLIS HORWOOD LIMITED (1984), 157-196.
- [3] T. Kubota, Elementary Theory of Eisenstein Series, Tokyo-New York, Kodansha and Halsted (1973).

- [4] R. P. Langlands, Problems in the theory of automorphic forms, Lecture Notes in Math., 170 (1970), 18-86.
- [5] P. Sarnak, Additive number theory and Maass forms, Lecture Notes in Math., 1052 (1984), 286-309.
- [6] I. Satake, Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over  $p$ -adic fields, Publ. Math., 18, Inst. Hautes Etudes Sci., (1963).
- [7] I. Satake, Spherical functions and Ramanujan Conjecture, Proc. of Symposia in pure Math., IX (1966), 258-264.