数理解析研究所講究録
第 639 巻 1988 年 141-153

L^2-cohomology of singular algebraic surfaces

東工大・理・長瀬正義 (Masayoshi Nagase)

次のような予想がある．

予想 (Cheeger, Goresky, MacPherson [2, §4 Conjecture C])．
X を射影空間 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ に埋め込まれている singular algebraic variety とする．その singularity S を X から取り除き，$\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ の Fubini-Study metric を制限することにより非完備リーマン多様体 $(X-S, g)$ を作る．この時

$$H^i_{(2)}(X-S) \cong (IH_i(X))^*.$$

ここで $H^i_{(2)}(X-S)$ は $(X-S, g)$ の L^2-cohomology を，$IH_i(X)$ は，X の intersection homology with the middle perversity $\overline{m}$ を，意味する．
（予想は X が singular curve の時は，かなり自明なことであり）このノートの目標は，次を説明することである．

定理　X が singular surface (over $\mathbb{C}$) の時には予想は，正しい．

この定理は、もともと Hsiang-Pati（[4]）が証明したことになっていましたが、当時からギャップがあるとささやかれていたもので、筆者の contribution は、そのギャップを埋めた点にあります。もうすこし正確に言うと、X の singularity の"非常に良い解消" $\pi : \tilde{X} \to X$ を考えた時、それの divisors どうしが交わらなければ、ある意味でギャップがなく交わりがあると本質的にギャップがある、というふうになっています。

予想に関しては、次のような経緯で生まれたようです。一方の旗がしら Goresky & MacPherson が、"X が singularity を持つと Poincaré duality が一般に成立しなくなってしまう simplicial homology $H_i(X)$" にかえて"X が singularity を持ってもある意味で Poincaré duality の成立する intersection homology $IH_i(X)$"（singularity がなければ $H_i(X)$ に一致）なるものを提案し、一方 Cheeger が"コンパクト多様体上の Hodge 理論、スペクトラル幾何 etc."を"非コンパクト（& 非完備）多様体"にまで拡張するため（その道具の一つとして）"L^2-cohomology $H^i_{(2)}$"（コンパクト多様体に対しては H^i_{DR} に一致する）の計算を実行していた。これらはそれぞれ独立に行なわれていたわけであるが、彼らの IH, $H_{(2)}$ の計算結果を見てそれらの間の"双対関係"を指摘したのは、

D. Sullivan であったようです.(彼の見たと思われる)最も単純な場合の計算結果を紹介します.

Example 1. (Intersection homology の定義は省略:それには"i"の他に perversity $\bar{p}$ が付随している.ここでは,その $\bar{p}$ が (lower) middle perversity $\bar{m}$ と呼ばれるものである時の結果である)
N を n 次元(境界を持たない)コンパクト多様体とし

$C(N) = [0,1] \times N / \{0\} \times N$ を一点 p につぶす.

これは一般に,その p を特異点として持つ,

とおくと,

$$(0.1) \quad IH_i(C(N)) \cong \begin{cases} H_i(N) & ; \ i \leq \frac{n}{2} \\ 0 & ; \ i > \frac{n}{2}. \end{cases}$$

Example 2. (L^2-cohomology の定義は,次の§でおこなう:兎角それを定義するには metric が付随していなければ始まらない.) Example 1 の N に(任意に固定した) metric g を付随させ,

$C^*(N) =$ "$(0,1] \times N$ with $dr^2 + r^2 g$"

とおく(metric cone)と,

$$(0.2) \quad H^i_{(2)}(C^*(N)) \cong \begin{cases} H^i_{DR}(N) & ; \ i \leq \frac{n}{2}, \\ 0 & ; \ i > \frac{n}{2}. \end{cases}$$

(0.1) と (0.2) より $IH_i(C(N))$ と $H^i_{(2)}(C^*(N))$ がまさに双対関係を持つことがわかる. となると, 予想は, まさに当然の成り行きでありましょう.

§1. L^2-コホモロジー

何はともあれまず, L^2-cohomology を定義しなければならない. (Y, g) を (非完備) リーマン多様体とする. するとその上の微分形式 α, β どうしの内積が

$$(1.1) \qquad (\alpha, \beta) = \int_Y \alpha \wedge * \beta$$

と定義される: $*$ は metric g の定める star operator. そこでその内積の定めるノルム $\|\alpha\|$ が有限であるような i-forms 全体を $L^2\Lambda^i = L^2\Lambda^i(Y)$ とおく (Hilbert 空間). コンパクトな台を持つ C^∞-i-forms 全体 Λ^i_c は, $L^2\Lambda^i$ に含まれるが, Y をコンパクトと仮定していないので, 一般に, C^∞-i-forms 全体 Λ^i は, $L^2\Lambda^i$ に含まれるとはかぎらない. さて, 外微分 $d: \Lambda^* \to \Lambda^{*+1}$ を次のような空間に制限して d_i と書くことにする;

$$(1.2) \qquad \mathrm{dom}\, d_i = \{\alpha \in \Lambda^i \cap L^2\Lambda^i \mid d\alpha \in L^2\Lambda^{i+1}\}.$$

するとこの $\{\mathrm{dom}\, d_i\}$ は, cochain complex をなすので, それの定める i 次コホモロジーが考えられる. それを i 次 L^2-コホモロジーと呼ぶ;

$$(1.3) \qquad H^i_{(2)}(Y) = \mathrm{Ker}\, d_i / \mathrm{Range}\, d_{i-1} .$$

コンパクトな場合と違って d_i の定義域が明示されている,

ひいては"metric"をかえれば我々の d_i は違う d_i になってしまうことに注意されたい．なお，d_i の operator norm に関する閉包を $\bar{d}_i$ とおくと，$\{\mathrm{dom}\,\bar{d}_i\}$ も又，cochain complex をなすのでコホモロジーを考えられる．ただし，それらについては自然に同型

(1.4) $\qquad H^i_{(2)}(Y) \doteqdot \mathrm{Ker}\,\bar{d}_i \,/\, \mathrm{Range}\,\bar{d}_{i-1}$

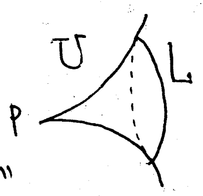
となることがわかっている（[1]）．$\{d_i\}$-type，$\{\bar{d}_i\}$-type，それぞれ一長一短があり必要に応じて使いわけることになる．

L^2-コホモロジーの重要な性質を一つ紹介しておく．一般に，2つのリーマン多様体 (Y_1, g_1)，(Y_2, g_2) があった時，それらが quasi-isometry であるとは，微分同型 $f: Y_1 \to Y_2$ 及び適当な定数 $C>0$ があり $C^{-1}g_1 \leq f^*g_2 \leq C g_1$ がなりたっていることとする．

<u>補題 1.1.</u> L^2-コホモロジーは quasi-isometric 不変である．

<u>§2. 定理の証明のアイデア</u> 以下，我々の X（$P^N(\mathbb{C})$ に埋め込まれている singular surface/$\mathbb{C}$）を normal と仮定する．（normal でない場合には，normalization を施してから考えれば良い：ただし，L^2-cohomology の normalization 不変性は，一般には証明されていないので"normalize したものに

ついて言えたので non-normal についても言えた" という論法は取れない.) よって, その singularity S は孤立特異点の集合となっている. $S=\{p\}$, 一点よりなっている, と仮定しておくことにする (一般には, 以下の議論を各特異点の近傍で行なえば良い.).



pの閉近傍Uを考えてみる.
pの link を L (i.e. ∂U) とおけば,
$U \cong C(L)$, L上の cone, なる位相同型があるので,
Example 1 より,

$$(2.1) \qquad IH_i(U) \cong \begin{cases} H_i(L) & ; \ i \leq 1, \\ 0 & ; \ i \geq 2, \end{cases}$$

である. この事実より, 定理を証明するには, まず Example 2 に対応する次の結果を証明する必要があると思われる. そして実は, それさえ証明できれば, 一般論として定理そのものが証明されたことになる (そのことの詳しい説明は省略する).
$U^* = U \setminus \{p\}$ とおいて,

<u>命題 2.1.</u> 次の自然な同型がある:

$$(2.2) \qquad H^i_{(2)}(U^*) \cong \begin{cases} H^i_{DR}(L) & ; \ i \leq 1, \\ 0 & ; \ i \geq 2. \end{cases}$$

ここで自然な同型とは: $H^i_{(2)}$ は $\{d_i\}$-type を使っているとす

る（定義をすなおに解釈して，$\mathcal{V}^*$上の C^∞-i-forms とは，その境界 L 上まで C^∞ に延びているものとする）．すると，

(2.3) $\qquad H^i_{(2)}(\mathcal{V}^*) \ni [\phi] \longmapsto [\phi|L] \in H^i_{DR}(L)$

が well-defined であり，自然な同型を与えるはずの写像とはこれのことである．

以下この命題を証明することが目標である．(2.2) 自身は (0.2) と全く同じであるが $\mathcal{V}^*$ 上の metric g （$\mathbb{P}^N$の Fubini-Study metric の制限）が Example 2 のように単純であるはずはない．そこで補題1.1 に注意しつつ，quasi-isometric な範囲で g を変形して，より扱いやすい metric を捜し出すことが出発点となる．実際には $\mathcal{V}^*$ を適当に分割し，各部分 (with g) と quasi-isometric な，より扱いやすいものを捜し出す，という手段を取る：結果だけを紹介すると次のようになる．

(イ) まず $\mathcal{V}^*$ に適当な積構造を入れる：(微分同型)

(2.4) $\qquad \mathcal{V}^* \cong (0,1] \times L\ , \quad x \longmapsto (r, \hat{x})\ ,$

ここで r は一般に "p からの x の距離" ではない（これをいかに定義するかが重要）．

(ロ) link L を適当に分割する；$L = \sqcup Y_j$．

(ハ) その分割と (2.4) をあわせて $\mathcal{V}^*$ 自身を分割する；

$$U^* = \sqcup W_j \quad , \; W_j \cong (0,1] \times Y_j \quad .$$

(ニ) 以上を非常にうまく遂行すると，各W_jは，次のtypesのリーマン多様体 W のどれかと quasi-isometric である；

Type(−)： $1 \leq c$ を固定し $\mathbb{R}^2$ 内の三角形Δを考え，$\mathbb{R}^2$の通常の計量のΔへの制限を$\hat{g}$とおく．そして

$$W = W(-) = \text{``}(0,1] \times [0,1] \times \Delta \; (\ni (r, \theta, y))$$
$$\text{with } dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^{2c}\hat{g}(y) \text{''}$$

Type(+)： $0 < b < 1$ 及び $1 \leq c$ を固定する．そして，

$$W = W(+) = \text{``}(0,1] \times [0,1]^3 \; (\ni (r, \theta, s, \Theta))$$
$$\text{with } dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^{2c}\{ds^2 + (r^b + s)^2 d\Theta^2\}\text{''}$$

ここで "quasi-isometry" $I_j : W_j \cong W$ で，$x \mapsto (r, \cdots)$ の r は，(2.4) の r に一致している．各W_jに対して，まずTypes(±)のどちらかが定まり，次にcやbがW_jに対応して定まる．

(イ)−(ニ) をいかに遂行するかが最も本質的（Hsiang-Patiでは，Type(+)が扱われていない）であるが，それについてはこのセクションの最後に，ごくごく簡単に説明することとして，ここでは，それが遂行し得たと仮定して話を進める．三つほど主張を与える：

<u>主張A.</u> $i \leq 1$ とし, $\phi \in L^2\Lambda^i(L)$ を任意に取る。そして (2.4) を通して ϕ を U^* 上の form とみなす, $\phi(r,\hat{x}) = \phi(1,\hat{x})$, と, それは $L^2\Lambda^i(U^*)$ に属する.

次に, $\alpha = \phi + dr\wedge\omega \in L^2\Lambda^i(U^*)$ に対して

$$(2.5) \qquad (K\alpha)(r,\hat{x}) = \begin{cases} \int_a^r \omega(r,\hat{x})\,dr & ; \quad r \leq 2, \\ \int_0^r \omega(r,\hat{x})\,dr & ; \quad r \geq 3, \end{cases}$$

とおく ($0 < a \leq 1$ は特定していない). すると

<u>主張B.</u> K は次の連続作用素を与える;

$$K : L^2\Lambda^i(U^*) \longrightarrow L^2\Lambda^{i-1}(U^*).$$

最後に: §1 において $d_i, \bar{d}_i$ を定義した(定義域が込められている). ここでは新しく, 定義域を Λ_c^i に制限した外微分 $d_{c,i}$ を考える. その閉包を $\bar{d}_{c,i}$ と書いて

<u>主張C.</u> $i = 0, 3, 4$ の時, $\bar{d}_{c,i} = \bar{d}_i$.

Hsiang-Pati は, $i = 1, 2$ も込めて, 主張C は正しいと主張している(Cheeger 氏の comment). 実際 $W(t)$ がないなら "$\bar{d}_{c,i} = \bar{d}_i$ for any i" は, 明らか(つまり [1] とほとんど同様に証明できる)である. $W(t)$ が存在するがため, 主張A~Cの証明は, [4] より, かなり複雑となる(主張Cにいたっては,

正しいはずの $i=1,2$ の場合を主張から省かねばならないはめとなる）. さて, 主張 A, B, C を正しいと仮定して次を得る.

系. $\alpha = \phi + dr \wedge \omega \in L^2\Lambda^i(U^*)$ に関して,

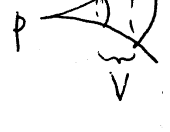
(1) $i = 0$ or 1 の時, $\alpha \in \mathrm{dom}\, d_i$ なら, $K\alpha \in \mathrm{dom}\, d_{i-1}$ であり, $dK\alpha + Kd\alpha = \alpha - \phi(a)$ である.

(2) $i = 3$ or 4 の時, $\alpha \in \mathrm{dom}\, \bar{d}_i$ なら, $K\alpha \in \mathrm{dom}\, \bar{d}_{i-1}$ であり, $\bar{d}K\alpha + K\bar{d}\alpha = \alpha$ である.

(1)の略証) 形式的な計算により $dK\alpha + Kd\alpha = \alpha - \phi(a)$ である. そして主張 A, B より $\alpha - \phi(a) - Kd\alpha\ (= dK\alpha)$ は $L^2\Lambda^i(U^*)$ に属する. つまり $dK\alpha \in L^2\Lambda^i(U^*)$, $K\alpha \in L^2\Lambda^{i-1}(U^*)$ でもあるから, $K\alpha \in \mathrm{dom}\, d_{i-1}$ である.

(2)の略証) まず $\alpha \in \mathrm{dom}\, d_{c,i}$ に関して, (1)と同様にして(2)を示す. そして主張 C を使い (2) が $\alpha \in \mathrm{dom}\, \bar{d}_i$ に関して成立することがわかる.

この系より命題2.1が $i \neq 2$ の時成立する. $i=2$ の場合は, 証明がかなり複雑なのでここでは省く. ごく簡単に言えば, 右図のように p から離れて V を取り, (U^*, V) に関する L^2 版長完全列を考え,



$$(2.6)\qquad \begin{aligned} &H^2_{(2)}(U^*, V) = 0 \\ &H^2_{(2)}(V) \cong H^3_{(2)}(U^*, V) \end{aligned}$$

を示すことによって間接的に $H^2_{(2)}(U^*) = 0$ を示す.

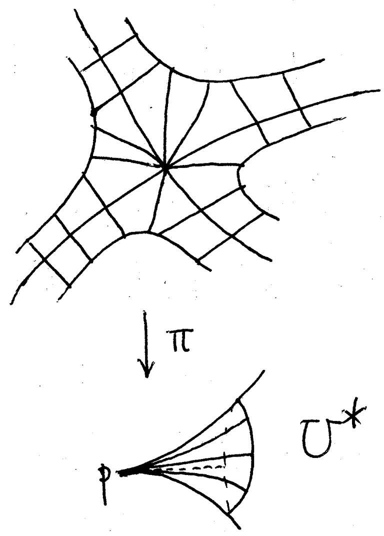
このようにして,命題2.1 は,主張A,B,C,そして(2.6)に帰着されたことになる.そしてお気付きのように,ここまでは,(イ)-(ニ)の(イ)の部分のみが表に出ていた.(イ)-(ニ)の本質的部分(ニ)が使われるのは,これら主張の証明においてである(つまり,これらが証明できる程度まで,singularity p の近くでの計量 g の状態を調べあげる).

注意. 主張A,Bは,[9]において Assertions A,B として証明されている.主張Cは [8, Assertion A],(2.6)は [9, Assertion C],に相当する.

主張A,B,Cと(2.6)の証明は割愛し,(イ)-(ニ)をごく簡単に説明して終了としたい.曲面 X の解消をいったん作り,さらに blowing-ups を必要なだけ繰り返すと次のような"非常に良い解消" $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ を作ることができる: $\pi^{-1}(p)$ の任意点のまわりの適当な座標近傍 $(U, (u, v))$ を取ると,π はその上で次のように書き下せる:($p = [1, 0, \cdots, 0] \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ とし,そのまわりの座標 $[w_0, \cdots, w_N] \mapsto (z_1, \cdots, z_N) = (w_1/w_0, \cdots)$ を考える.ただし $z_1, \cdots, z_N$ の順序は無視

するとして）

$$
(2.7)\quad
\begin{cases}
z_1 = u^{n_1} v^{m_1}, & (n_1, m_1) \neq (0,0), \\
z_2 = f_2(z_1) + u^{n_2} v^{m_2} g_2(u,v), & \det\begin{pmatrix} n_1 & m_1 \\ n_2 & m_2 \end{pmatrix} \neq 0,\ g_2(0,0) \neq 0, \\
\quad \vdots & \\
z_\ell = f_\ell(z_1) + u^{n_\ell} v^{m_\ell} g_\ell(u,v), & \det\begin{pmatrix} n_1 & m_1 \\ n_\ell & m_\ell \end{pmatrix} \neq 0,\ g_\ell(0,0) \neq 0, \\
z_{\ell+1} = f_{\ell+1}(z_1), & \\
\quad \vdots & \\
z_N = f_N(z_1), & \\
\text{ここで, } f_j = \sum a_{jn} z^{\varepsilon_n}, \quad \varepsilon_n \geq 1, & \\
n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_\ell, \quad m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_\ell, & \\
\text{また, } \pi^{-1}(p) \ni x \text{ (座標近傍の中心) が divisors の交点の時} & \\
(n_1 m_1 \neq 0 \text{ である}),\quad 0 < \left|\frac{n_2}{n_1} - \frac{m_2}{m_1}\right| < 1 \text{ である.} &
\end{cases}
$$



そこで右図のように, $\pi^{-1}(p)$ の近傍を適当に分割 (divisors の交点の近傍の分割の図は全くあやしい) した時, それの与える U^* の分割が, (ハ), (ニ) の W_j 達である. divisors の交点の近傍の部分の W_j が $W(+)$ と quasi-isometric ($c = \min\{\frac{n_2}{n_1}, \frac{m_2}{m_1}\}$, $\tilde{c} = \max\{\frac{n_2}{n_1}, \frac{m_2}{m_1}\}$, $b = \tilde{c} - c$) であり, そうでない点の近傍の部分の W_j が $W(-)$ と quasi-isometric (この時, $n_1 = 0$ or $m_1 = 0$ である: $n_1 = 0$ なら $c = \frac{m_2}{m_1}$, $m_1 = 0$ なら

$C = \frac{n_2}{n_1}$) とおく.

REFERENCES

[1] J.Cheeger : On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds, Proc. Sym. Pure Math., Providence, 36(1980), 91-146.

[2] ——, M.Goresky & R.MacPherson : L^2-cohomology and intersection homology of singular algebraic varieties, Ann. Math. Studies, 102(1982), 303-340.

[3] M.Goresky & R.MacPherson : Intersection homology theory, Topology, 19(1980), 135-162.

[4] W.C.Hsiang & V.Pati : L^2-cohomology of normal algebraic surfaces I , Invent. Math., 81(1985), 395-412.

[5] M.Nagase : L^2-cohomology and intersection homology of stratified spaces, Duke Math. J., 50(1983), 329-368.

[6] —— : Sheaf theoretic L^2-cohomology, Advanced Studies in Pure Math. Vol. 8 (Complex Analytic Singularities), (1986), 273-279.

[7] —— : On the heat operators of cuspidally stratified Riemannian spaces, Proc. Japan Acad., 62(1986), 58-60.

[8] —— : On the heat operators of normal singular algebraic surfaces, to appear in J. Diff. Geometry (1988).

[9] —— : Remarks on the L^2-cohomology of singular algebraic surfaces, preprint(1987).