数理解析研究所講究録
第 639 巻 1988 年 190-199

Ricci曲率が非正のKähler多様体について

大阪大 教養 榎 一郎 (ENOKI Ichiro)

代数多様体もしくはコンパクトKähler多様体の分類論から発生する問題に対し微分幾何の手法でアプローチしたい。ここでは次のような問題を考える:

MをコンパクトKähler多様体でその標準束 $K_M := \Lambda^{\dim M} T^*M$ は半正であるとする(すなわちMのRicciテンソルが各点で半負定値). このとき,

$$H^0(M, K_M^{\otimes m}), \quad m \gg 0,$$

はどの程度あるか?

一般にM上の直線束Lがあったとき, $H^0(M, L) \neq 0$ なら有理型写像 $\Phi_{|L|} : M \dashrightarrow \mathbb{P}^N$, $N+1 = \dim H^0(M, L)$, が定義される($H^0(M, L)$の基 $s_0, s_1, \ldots, s_N$ をLの局所枠σを用いて $s_i = f_i \sigma$ と局所的にかくとき,

$$\Phi_{|L|}(x) = [f_0(x) : f_1(x) : \cdots : f_N(x)] \in \mathbb{P}^N$$

である。s_iたちの共通零点では定義されないが, 定義されている部分のグラフの $M \times \mathbb{P}^N$ での閉包は解析集合である)

$$\kappa(M, L) := \max_{m>0} \dim \Phi_{|L^{\otimes m}|}(M)$$

とおく（全ての $m>0$ に対し $H^0(M, L^{\otimes m})=0$ のときは，$\kappa(M, L)=-\infty$ と定義する）．飯高の基本定理により，ある α, $\beta>0$ と $m_0>0$ があって，任意の $m \gg 0$ に対し

$$\alpha m^{\kappa} \leqq \dim H^0(M, L^{\otimes m_0 m}) \leqq \beta m^{\kappa},$$
$$\kappa = \kappa(M, L),$$

となる．我々の問題は M の小平次元

$$\kappa(M) := \kappa(M, K_M)$$

を評価することである．背景や起源を述べるため，分類理論から話を始める．

§1. 分類理論

M を射影代数多様体もしくはコンパクト Kähler 多様体とする．M が曲線（すなわちコンパクト Riemann 面）のとき 3 つのクラスに分類できることがよく知られている：

a）$\mathbb{P}^1$ 一次元射影空間（種数 $g=0$）

b）$\mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$ 一次元複素トーラス（$g=1$）

c）$\mathbb{H}/\Gamma$ 一般型の曲線（$g \geqq 2$）

これらは，Ricci 曲率がそれぞれ 正，零，負の Kähler 計量をもつ．

高次元の場合には，これらの混合型があらわれる．そこで

全射正則（もしくは有理型）写像 $\varphi : M \longrightarrow N$ をうまく見つけて，M を基本的な型に分解してゆくことを考える．N が射影代数多様体なら，この上への写像は必ず M 上のある直線束 L の切断からつくられる．実際 $N \subset \mathbb{P}^N$ のとき，$\mathbb{P}^N$ の超平面切断から定まる正直線束を H とし，$L = \varphi^* H$ とおけば $\varphi = \Phi_{|L|}$ となる．（$\varphi = \Phi_{|K_M^{\otimes m}|}$ なら φ の一般のファイバーは Ricci 平坦な Kähler 多様体と双有理同値

直線束 L に対し $H^0(M, L) \neq 0$ となるための位相的な必要条件を考えよう．$\dim M = 1$ のとき，$M = C$ 上 L が正則切断 s をもてば

$$\int_C c_1(L) = \#\{ s \text{ の零点} \} \geqq 0$$

であった。そこで

定義　M が射影代数多様体のとき，その上の直線束 L が数値的半正であるとは，任意の非特異曲線からの正則写像 $\iota : C \longrightarrow M$ に対し

$$\int_C c_1(\iota^* L) \geqq 0$$

となることと定義する．

M が Kähler 多様体のときは，M 上に十分多くの曲線が存在しないかも知れないので，次のようにする：

定義　M がコンパクトKähler多様体のとき，その上の直線束 L が数値的半正であるとは，任意のKähler形式 Φ に対し，$\Phi-\Phi$ が $c_1(L)_{\mathbb{R}}$ を代表するようなKähler形式 Φ が存在することと定義する。

数値的半正は，実は単に $H^0(M, L) \neq 0$ であるためでなく，$H^0(M, L)$ の基 $s_0, s_1, \ldots, s_N$ が共通零点をもたないための必要条件である．L が数値的半正のとき，(M, L) に対応して

$$\nu(M, L) := \max\{k \mid c_1(L)_{\mathbb{R}}^k \neq 0\}$$

とおく。特に $L = K_M$ のとき，

$$\nu(M) := \nu(M, K_M)$$

を M の数値的小平次元という．以上の定義は，M が解析空間の場合にも拡張される．

我々の分類は，双有理同値によるものである．この同値類の中のうまい代表元の存在については，次の予想がある：

予想 1（極小模型予想）　各射影代数多様体 M に対し，M と双有理同値な X で次のいずれかを満たすものがある：

a)　X の標準束 K_X は数値的半正．

b)　全射正則写像 $\varphi : X \to Y$ で φ のファイバー上 K_X は負となるものがある．

さらに

予想2. X の標準束 K_X が数値的半正のとき，

$\kappa(X)=\nu(X)$. さらに十分大きなある $m>0$ に対し

$H^0(X, K_X^{\otimes m})$ の元は共通零点をもたない．

予想1は2次元以下では古典的な結果としてよく知られている．3次元のときは，最近 川又，森らにより証明された．予想2も X が3次元で射影代数的な場合に 宮岡らにより証明されつつある．コンパクトKähler多様体に対しても同様の予想を考えることができる．（実は，予想1，2の X は，一般に非特異なものとは限らず標準特異点（canonical singularity）と呼ばれるゆるい特異点を許容しなくてはならない．ここでは非特異なものに話を限る）

§2. 結果

コンパクトKähler多様体 M に対し予想2を考える．数値的半正より少し強く次を仮定する：

(*) $c_1(K_M)_{\mathbb{R}}$ は，各点で半正定値な d-閉 実(1, 1)-形式で代表される．

常に $0\leqq\nu(M)\leqq\dim M$ であるが，両極端の場合はよくわかる．$\nu(M)=0$ のときは，$c_1(M)_{\mathbb{R}}=0$ となり，さらに

[Calabi + Yau]　M がコンパクト Kähler 多様体で $c_1(M)_{\mathbb{R}} = 0$ なら，ある $m_0 \neq 0$ があって $K_M^{\otimes m_0}$ は自明となる．特に $\kappa(M) = \nu(M)$ $(= 0)$．

実はさらに詳しく，M のある有限次不分岐被覆が 複素トーラスと $c_1(F)_{\mathbb{R}} = 0$ かつ $H^1(F, \mathcal{O}) = 0$ となるコンパクト Kähler 多様体 F の直積に分解することがわかる．証明は，Calabi 予想の解決により M は Ricci 平坦な Kähler 計量をもつことがわかるから，これを用いて M の Albanese 写像が全射で構造群有限の正則ファイバー束を定めることを示す．実際 M 上の正則形式と正則ベクトル場はともに平行で互いに双対となる．

$\nu(M) = \dim M$ の場合は古典的：

[小平]　M がコンパクト Kähler 多様体で K_M が (*) の意味で半正かつ $\nu(M) = \dim M$ なら，$\kappa(M) = \nu(M)$ $(= \dim M)$．

この場合，小平の消滅定理により，

$$H^q(M, K_M^{\otimes m}) = 0 \;, \quad m \geq 2, \quad q > 0$$

となり，$c_1(K_M)^{\dim M} \neq 0$ だから Riemann-Roch の定理と組みあわせれば，$m \to \infty$ のとき

$$\dim H^0(M, K_M^{\otimes m}) = O(m^{\dim M})$$

がでる。

$0 < \nu(M) < \dim M$ の場合．この場合には，$K_M^{\otimes m}$ の

高次コホモロジィ群の次元が全て小さくなるとは限らないし，その交代和 $\chi(M, K_M^{\otimes m})$ の増大度も $m^{\nu(M)}$ より小さくなりうる。しかし次が証明できる：

定理 1. M をコンパクト Kähler 多様体でその標準束 K_M が (*) の意味で半正のとき，

i) $\kappa(M) = \nu(M)$ であるための必要十分条件は，ある q があって

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{1}{m^{\nu(M)}} \dim H^q(M, K_M^{\otimes m}) > 0$$

となることである；

ii) 予想 2 が M より低い次元で成立していて，ある q に対し

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{1}{m^{\nu}} \dim H^q(M, K_M^{\otimes m}) > 0$$

であれば，$\kappa(M) \geqq \nu$ となる.

当然 次は $\dim H^q(M, K_M^{\otimes m})$ の増大度が非常に小さい，もしくは全て消えてしまうときが問題となるが，一般次元のときは，この条件をどのように有効に用いればよいのか まだわからない。3 次元の場合には，Riemann-Roch の公式が簡単になることと，2 次元の分類理論の詳しい結果を用いることにより，次が証明できる：

定理2. Mが3次元コンパクトKähler多様体で K_M が(*)の意味で半正のとき，$\kappa(M) = \nu(M)$.

§3. 証明について

定理1の証明の概略を述べる．まず

定理3. Lをコンパクト Kähler 多様体 M 上の直線束で $c_1(L)_{\mathbb{R}}$ が各点で半正定値な d-閉実 (1,1)-形式で代表されているものとする。このとき単射準同型

$$H^q(M, L\otimes K_M) \hookrightarrow H^0(M, L\otimes K_M \otimes \Lambda^q TM)$$

が存在する．特に K_M が上の意味で半正のとき，同型

$$H^q(M, K_M^{\otimes m}) \cong H^0(M, K_M^{\otimes m} \otimes \Lambda^q TM)$$

が存在する。

実際，Lの計量を曲率が半正となるようにとれる．この計量の元での $L\otimes K_M$-値調和 $(0,q)$-形式はMの計量により，$L\otimes K_M$-値正則 q-ベクトル場と同一視される．

$H^0(M, K_M^{\otimes m}\otimes\Lambda^q TM) \neq 0$ から $H^0(M, K_M^{\otimes m}) \neq 0$ をいうためには，$\Lambda^q TM$ の次のような意味での負性が必要である．

定理4. Mをコンパクト Kähler 多様体で K_M は数値的半正とする．このとき，任意のKähler形式 Φ と任意の連接

部分層 $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}(\otimes^N TM)$, $\mathrm{rank}(\mathcal{S}) > 0$, に対し,

$$\int_M c_1(\mathcal{S}) \wedge \Phi^{n-1} \leqq 0 \qquad (n = \dim M).$$

この定理は, $N = 1$ に限れば, 宮岡の generic semi-negativity 定理の弱い形になっている. 我々の証明は, 小林による Einstein-Hermite ベクトル束の準安定性の証明で用いられた論法の応用であるが, 結果が接束に固有なのは, Bianchi の第一恒等式が必要となるからである.

さて, 定理1のうち "$H^0(M, K_M^{\otimes m})$ が十分あれば $\kappa(M) = \nu(M)$" の部分を示そう. 定理3により $H^0(M, K_M^{\otimes m} \otimes \wedge^s TM)$ が "十分" にある. $E = \wedge^s TM$ とおく. $H^0(M, K_M^{\otimes m} \otimes E)$ の元の E-成分を全て集めると, それらは連接部分層 $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}(E)$ を張る. 形式的な議論により $H^0(M, K_M^{\otimes m} \otimes \det \mathcal{S})$ が "十分" あることがわかる. 特に

$$\int_M \{m c_1(K_M) + c_1(\mathcal{S})\} \wedge \Phi^{n-1} \geqq 0$$

である. ここで Φ は M の Kähler 形式. 一方 Φ を $\Phi + t c_1(K_M)$ でおきかえ定理4を適用し $t \to \infty$ とすると,

$$\int_M \{m c_1(K_M) + c_1(\mathcal{S})\}\, c_1(K_M)^{\nu(M)}\, \Phi^{n-\nu(M)-1} = 0$$

がでる. これは, 各 $\varphi \in H^0(M, K_M^{\otimes m} \otimes \det \mathcal{S})$ の零点集合 D

が，$c_1(K_M)^{\nu(M)}=0$ が定める葉層の葉と交わったとき それを全て含む ことを意味する。したがって，$H^0(M, K_M^{\otimes m}\otimes\det\mathcal{S})$ が"十分"大きく D が $\nu(M)$-次元分だけ動けるときは，$\Phi_{|K_M^{\otimes m}\otimes\det\mathcal{S}|}$ と $\Phi_{|K_M^{\otimes m}|}$ のファイバーは同じになり，この2つは本質的に同じ写像を定める。

逆に，$\Phi_{|K_M^{\otimes m}|}$ に関するスペクトラル系列を用いると，$q=\dim M-\kappa(M)$ のとき $H^q(M, K_M^{\otimes m})$ が"十分"あることをすぐに示せる。

References

Calabi, E : On Kähler manifolds with vanishing canonical class, "Algebraic Geometry and Topology" Princeton Univ. Press 1957, 78–89

Kobayashi, S : "Differential Geometry of Complex Vector Bundles" Iwanami Shoten and Princeton Univ. Press, 1987

Miyaoka, Y : The Chern classes and Kodaira dimension of a minimal variety, "Algebraic Geometry, Sendai 1985" (T. Oda ed.) Advanced Studies in Pure Math. 10 (1987), Kinokuniya and North-Holland, 449–476

Reid, M : Minimal models of canonical 3-folds, "Algebraic Geometry and Analytic Varieties" (S. Iitaka ed.) Advanced Studies in Pure Math. 1 (1983), Kinokuniya and North-Holland, 131–180