数理解析研究所講究録
第 640 巻 1988 年 48-60

τ函数に関連した一つの観察

上智大・理工　野海正俊
(Masatoshi NOUMI)

この記事では、高次元可積分系の中で特に、holonomic な(解空間が有限次元となるような線型方程式に対応する)部分のみを考察する。Holonomic な場合に限定すれば、高崎氏の(この講究録中の)記事で解説されているような発散の問題は生じないが、既に1次元の場合とは大きく異なる事情が存在する。ここではτ函数に関連した問題を取り上げ、一つの観察を述べる。

1. 外積空間 $\mathcal{F}_m$ と $\mathcal{F}_m^*$

KP方程式系の場合を模倣して、holonomic case を扱うための枠組を用意しておこう。

まず $x=(x^{(0)},\dots,x^{(r-1)})$ と書いて、$\mathbb{C}[[x]]$ で r 変数の形式べき級数環を表わす($\mathbb{C}$ は標数0の体)。多重指数 $\alpha\in\mathbb{N}^r$ に対して $e_\alpha=\frac{x^\alpha}{\alpha!}$ とおいて、$\mathbb{C}[[x]]$ の"$\mathbb{C}$ 基底"$(e_\alpha)_\alpha$ を固定する。以下 $\mathbb{C}[[x]]$ を $\mathbb{C}$ 上の線型空間と見るときにはこれを V

で表わし，極大イデアルのべきによる位相を与えておく。つまり，極大イデアルのk乗に対応する$\mathbb{V}$の$\mathbb{C}$部分空間を$\mathbb{V}^{(k)}$で表わし，$(\mathbb{V}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$を原点の基本近傍系にとる。また，$\mathbb{C}$係数の微分作用素環を$\mathbb{V}^* = \mathbb{C}[\partial_x]$で表わそう。ここで，$\partial_x = (\partial_0,\dots,\partial_{r-1})$，$\partial_k = \partial/\partial x^{(k)}$である。$\mathbb{V}$と$\mathbb{V}^*$の間には，次のpairingがあり，互いに他の双対空間と見なせる：

(1.1) $$\langle P, f\rangle = P(\partial_x) f(x)\big|_{x=0}\,;\quad P\in\mathbb{V}^*,\ f\in\mathbb{V}.$$

$e^*_\alpha = \partial_x^\alpha$ と書けば，$(e^*_\alpha)_\alpha$ が $(e_\alpha)_\alpha$ の双対基底である。

$m\in\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}$ に対して，外積空間 $\mathcal{F}_m$ を次のような形式的無限和の全体と定める：

(1.2) $$\xi = \sum_{\alpha_0,\dots,\alpha_{m-1}}{}' e_{\alpha_0}\wedge\cdots\wedge e_{\alpha_{m-1}}\,\xi_{\alpha_0\cdots\alpha_{m-1}}.$$

ここで，$\alpha_0,\dots,\alpha_{m-1}\in\mathbb{N}^r$. $\sum'$ は，集合 $\{\alpha_0,\dots,\alpha_{m-1}\}$ が丁度1回ずつ現われるよう制限した和を表わす。これに伴い係数 $\xi_{\alpha_0\cdots\alpha_{m-1}}$ は添字の置換に関して交代的になっているものと了解する。$\mathcal{F}_m$は代数的な外積 $\wedge^m\mathbb{V}$ の自然な完備化である。
同様に，

(1.3) $$\xi^* = \sum_{\alpha_0,\dots,\alpha_{m-1}}{}' \xi^*_{\alpha_0\cdots\alpha_{m-1}}\, e^*_{\alpha_0}\wedge\cdots\wedge e^*_{\alpha_{m-1}}$$

の形の有限和の全体を $\mathcal{F}^*_m = \wedge^m\mathbb{V}^*$ で表わす。$\mathcal{F}_m$と$\mathcal{F}^*_m$の間には，(1.1)から自然にpairingが定まる：

(1.4) $$\langle P_0\wedge\cdots\wedge P_{m-1},\, f_0\wedge\cdots\wedge f_{m-1}\rangle = \det(\langle P_i, f_j\rangle\,;\ 0\le i,j<m).$$

このpairingについて

(1.5) $\langle e^*_{\alpha_0}\wedge\cdots\wedge e^*_{\alpha_{m-1}}, e_{\beta_0}\wedge\cdots\wedge e_{\beta_{m-1}}\rangle = \mathrm{sign}\begin{pmatrix}\alpha_0,\ldots,\alpha_{m-1}\\ \beta_0,\ldots,\beta_{m-1}\end{pmatrix}.$

(右辺の意味は明白と思う.)

$\mathcal{F}=\bigoplus_{m\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_m$ と書いて、これを我々の場合の Fock 空間の対応物と思うことができる。(但し, KP系の解の変換理論を展開するときの Fock 空間とはかなり構造が違うので注意。その半分しか取り込まれていない。) 以下の便宜のため, 多重指数の全体を $L=\mathbb{N}^r$ で表わそう。今, 記号 $\psi_\alpha, \psi^*_\alpha$ $(\alpha\in L)$ を用意して, これらから次の関係式で生成される代数を $\mathcal{A}$ で表わす (Clifford 環):

(1.6) $\psi_\alpha\psi_\beta+\psi_\beta\psi_\alpha=\psi^*_\alpha\psi^*_\beta+\psi^*_\beta\psi^*_\alpha=0, \ \psi^*_\alpha\psi_\beta+\psi_\beta\psi^*_\alpha=\delta_{\alpha,\beta}.$

ψ_α を, e_α の左側からの外積, ψ^*_α を e^*_α による左側からの縮約として $\mathcal{F}$ に作用させれば, これで $\mathcal{F}$ は忠実な左 $\mathcal{A}$ 加群となる。$\mathcal{F}^*=\bigoplus_{m\in\mathbb{N}}\mathcal{F}^*_m$ については, ψ_α を e_α による右側からの縮約, ψ^*_α を e^*_α の右側からの外積として作用させれば $\mathcal{F}^*_m$ は右 $\mathcal{A}$ 加群となる。$\mathcal{A}$ の $\mathcal{F}, \mathcal{F}^*$ への作用は (1.4) の pairing と両立し, $\xi\in\mathcal{F}, \xi^*\in\mathcal{F}^*, \psi\in\mathcal{A}$ に対して $\langle\xi^*\psi,\xi\rangle=\langle\xi^*,\psi\xi\rangle$ が成立する。等々。

2. 時間発展

V 上の線型写像 $P: V\to V$ で, ある $n\in\mathbb{N}$ について, $P(V^{(k+n)})\subset V^{(k)}$ $(k\in\mathbb{N})$ を満たすものの全体を $gl(V)$ と書

こう。このようなPに対して，時間変数tについての形式的な flow $e^{tP}: V \to V$ を考える。(必要に応じて係数体 $\mathbb{C}$ を拡大するが，いちいち断わらない。) これから自然に外積空間 $\mathcal{F}_m$ 上の flow $e^{tP}: \mathcal{F}_m \to \mathcal{F}_m$ が線型変換として定まる：

$$(2.1) \qquad e^{tP}(f_0\wedge\cdots\wedge f_{m-1}) = (e^{tP}f_0)\wedge\cdots\wedge(e^{tP}f_{m-1}).$$

今，$P: V\to V$ から定まる，Grassmann 代数 $\mathcal{F}$ 上の0次の微分を $\ell(P): \mathcal{F}_m\to\mathcal{F}_m$ で表わせば $e^{tP}\xi = e^{t\ell(P)}\xi$ ($\xi\in\mathcal{F}_m$) が成立することに注意する。この対応 $P\mapsto \ell(P)$ は，Lie 環の準同型 $gl(V)\to gl(\mathcal{F}_m)$ を定める。($\ell(id)$ は，$\mathcal{F}_m$ 上で $m.id$ となることに注意。) また，$\mathcal{F}_m$ 上の多項式函数 $F=F(\xi)$ に対して $L(P)F$ を

$$(2.2) \qquad L(P)F(\xi) = \frac{d}{dt}F(e^{tP}\xi)\Big|_{t=0}$$

で定めれば，$L(P)$ は，$\mathcal{F}_m$ 上の大域的なベクトル場となる。$F(e^{tP}\xi)\equiv F((1+t\ell(P))\xi)\equiv F(\xi)+tL(P)F(\xi) \mod t^2$ なので，$L(P)$ は，線型写像 $\ell(P)$ で完全に決定される。特に $F(\xi)$ が線型ならば，$L(P)F(\xi)=F(\ell(P)\xi)$ である。対応 $P\mapsto L(P)$ の方は，$gl(V)$ から $\mathcal{F}_m$ 上のベクトル場のなす Lie 環への反準同型である。

さて，$\mathcal{F}_m$ 上で KP 的な時間発展を考えよう。$L^*=L\setminus\{0\}$ とおいて，V 上の線型写像の族 $(\partial_x^\alpha)_{\alpha\in L^*}$ をとる。対応して，可算無限個の時間変数の族 $t=(t_\alpha)_{\alpha\in L^*}$ をとり，$\xi\in\mathcal{F}_m$

に対して $\xi(t)$ を

$$(2.3)\qquad \xi(t) = e^{\eta(t,\partial_x)}\xi, \quad \eta(t,\partial_x) = \sum_{\alpha\in L^*} t_\alpha \partial_x^\alpha$$

と定める。これについて、$\frac{\partial}{\partial t_\alpha}\xi(t) = \ell(\partial_x^\alpha)\xi(t)$. 対応して、$\frac{\partial}{\partial t_\alpha}\langle \xi^*, \xi(t)\rangle = L(\partial_x^\alpha)\langle \xi^*, \xi(t)\rangle$ が任意の $\xi^* \in \mathcal{F}_m^*$ に対して成立する。

今、$t=(t_\alpha)_{\alpha\in L^*}$ と双対的に、不定元の族 $H=(H_\alpha)_{\alpha\in L^*}$ を用意し、これについての多項式環を $\mathcal{H} = \mathbb{C}[H]$ で表わす。対応 $H_\alpha \longmapsto \ell(\partial_x^\alpha)$ によって、$\mathcal{F}_m$ は左 $\mathcal{H}$ 加群と見なすことができる。V^* の方でも、積 $\partial_x^\alpha: V^* \to V^*$ を Grassmann代数 $\mathcal{F}^*$ 上への0次の微分として延長したものを同じ $\ell(\partial_x^\alpha)$ で表わせば、対応 $H_\alpha \longmapsto \ell(\partial_x^\alpha)$ により $\mathcal{F}_m^*$ への $\mathcal{H}$ の作用が定まる。$\mathcal{F}_m^*$ をこれで左 $\mathcal{H}$ 加群と見なせば、$\mathcal{H}$ の $\mathcal{F}_m, \mathcal{F}_m^*$ への作用は、pairing (1.4) と両立する。これを用いて書けば (2.3) は

$$(2.4)\qquad \xi(t) = e^{H(t)}\xi\ ; \quad H(t) = \sum_{\alpha\in L^*} t_\alpha H_\alpha$$

と書ける。ここで、Clifford環 $\mathcal{A}$ の言葉を用いれば、$\mathcal{H}$ の作用は形式的に

$$(2.5)\qquad H_\alpha = \ell(\partial_x^\alpha) = \sum_{\mu\in L} \psi_\mu \psi_{\mu+\alpha}^*$$

で表わされるものである。

ここで、1次元 ($r=1$) の場合のことを振り返ってみよう。この場合には、$\mathcal{F}_m^*$ が $e_0^*\wedge e_1^*\wedge\cdots\wedge e_{m-1}^*$ という特別の元を含

んでいて、$\mathcal{F}_m^*$ がこの1個の元から $\mathcal{H}$ 加群として生成されていることが特徴的である。$l_0,\dots,l_{m-1}\in\mathbb{N}$ のとき、$\xi(t)$ の $e_{l_0}\wedge\cdots\wedge e_{l_{m-1}}$ の係数を $\xi_{l_0\cdots l_{m-1}}(t)=\langle e^*_{l_0}\wedge\cdots\wedge e^*_{l_{m-1}},\xi(t)\rangle$ で表わそう。とくに、$(l_0,\dots,l_{m-1})=(0,\dots,m-1)$ の場合を $\tau_m(t;\xi)=\langle e_0^*\wedge\cdots\wedge e^*_{m-1},\xi(t)\rangle$ で表わす。$\mathcal{F}_m^*=e_0^*\wedge\cdots\wedge e^*_{m-1}\mathcal{H}$ なので、$e^*_{l_0}\wedge\cdots\wedge e^*_{l_{m-1}}=e_0^*\wedge\cdots\wedge e^*_{m-1}\chi_{l_0\cdots l_{m-1}}(H)$ となる $H=(H_k)_{k=1}^{\infty}$ の多項式 $\chi_{l_0\cdots l_{m-1}}(H)\in\mathcal{H}$ がとれる。今までの注意から

$$
\begin{aligned}
\xi_{l_0\cdots l_{m-1}}(t) &= \langle e_0^*\wedge\cdots\wedge e^*_{m-1}\chi_{l_0\cdots l_{m-1}}(H)\xi(t)\rangle \\
&= \chi_{l_0\cdots l_{m-1}}(\partial_t)\tau_m(t;\xi)
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

が得られる。つまり、$\xi(t)$ の係数 $\xi_{l_0\cdots l_{m-1}}(t)$ はすべて、特別な係数 $\tau_m(t;\xi)$ の ∂_t に関する微分で表わされる訳である。これが、KP系の時間発展がτ函数によって統制される根拠となっていた。

そこで一般の r に対して次の問題が考えられる。

<u>問題</u> $\mathcal{F}_m^*$ の右 $\mathcal{H}$ 加群としての構造を調べよ。とくに、その生成系を明示的に与えよ。

この問題に対する完全な解答はまだ得られていない。$\mathcal{F}_m^*$ が $\mathcal{H}$ 上有限生成であることはわかっているが、最早1個の元で生成することはできない。

筆者は以前に、上野喜三雄，原田 等両氏と高次元

の"m切断系"のτ函数について調べた。そこでの議論では，$\mathcal{F}_m^*$の$\mathcal{H}$上の有限な生成系が1つ与えられ，それについてのτ函数族が考察された。"m切断系"からτ函数族の広田型双線型方程式系も導かれている。ただ，その生成系は無駄があるので，無駄のない根拠の明確な議論はできないか — と考える訳である。

$\mathcal{F}_m^*$の$\mathcal{H}$加群としての生成系の問題は，ここでの"真空"は何か — という問題でもある。次の定義でよいかという問題もあるが，ひとまず"真空"の定義を与えてしまおう：

$$(2.7)\begin{cases} Vac_m := \{ \xi \in \mathcal{F}_m \,;\; H_\alpha \xi = 0 \quad (\alpha \in L^*) \} \\ Vac_m^* := \mathcal{F}_m^* \Big/ \sum_{\alpha \in L^*} \mathcal{F}_m^* H_\alpha . \end{cases}$$

両者は pairing (1.4) に関して互いに他の双対空間になっていて，$\mathcal{F}_m^*$の$\mathcal{H}$上の極小な生成系を指定することは，Vac_m^*の代表系，つまり$\mathcal{F}_m^*$における$\sum_{\alpha \in L^*} \mathcal{F}_m^* H_\alpha$の補空間を指定することと同等である。

ここで，$\mathcal{F}_m^*$に1つの内積を導入して，Vac_m^*を$\mathcal{F}_m^*$の部分空間として実現しておくことにする。$\partial_x = (\partial_0, \ldots, \partial_{r-1})$の symbol を$u = (u^{(0)}, \ldots, u^{(r-1)})$と書いて，$V^* = C[\partial_x]$を$C[u]$と同一視する。pairing (1.1) を$u \leftrightarrow x$で$V^*$上の対称な双1次形式と思えば，これから$\mathcal{F}_m^*$上の"内積"が決まる。これで$\mathcal{F}_m^*$にお

ける $\sum_{\alpha\in L^*}\mathcal{F}_m H_\alpha$ の直交補空間をとれば

$$(2.8)\quad Vac^*_m = \{\xi^*\in\mathcal{F}^*_m;\ \ell(\partial_u^\alpha)\xi^* = 0\quad(\alpha\in L^*)\}.$$

ということになる。(uで書けば、H_αの作用は $\ell(u^\alpha)$である。)

まとめておくと、

<u>命題</u> $Vac^*_m\subset\mathcal{F}^*_m$ を(2.8)で定めると、Vac^*_mは有限次元で $\mathcal{F}^*_m = Vac^*_m\mathcal{H}$. また Vac^*_mは このような性質をもつ $\mathcal{F}^*_m$の$\mathbb{C}$部分空間の中で極小である.

(2.8)のように書いてしまえば、記号 x と u が変わっただけで、Vac_m と Vac^*_m は実質的に同じものである。

$e^*_{\alpha_0}\wedge\cdots\wedge e^*_{\alpha_{m-1}}$ の形の元についてはこれが Vac^*_m に属すことと、$\{\alpha_0,\dots,\alpha_{m-1}\}\subset L=\mathbb{N}^r$ がつまった Maya 図形になることは同値である。しかし、一般には、Vac^*_m に 1次因子の積に分解できないものも入ってくる。

$r=2$の場合で、小さいmに対する Vac^*_mの基底を書いておく。以下 $u=(u^{(0)},u^{(1)})$ を改めて (u,v)と書く:

$$(2.9)\begin{cases} m=1 & \dots\ 1\quad(=e^*_{(0,0)})\\ m=2 & \dots\ 1\wedge u,\ 1\wedge v\quad(=e^*_{(0,0)}\wedge e^*_{(1,0)},\ e^*_{(0,0)}\wedge e^*_{(0,1)})\\ m=3 & \dots\begin{cases}1\wedge u\wedge u^2,\ 1\wedge u\wedge v,\ 1\wedge v\wedge v^2\\ 2(1\wedge u\wedge uv)+1\wedge v\wedge u^2,\ 2(1\wedge v\wedge uv)+1\wedge u\wedge v^2.\end{cases}\end{cases}$$

($V^*=\mathbb{C}[u,v]$ における積と、外積が混っているので注意。)

3. 交代多項式による表現

$V^* = \mathbb{C}[\partial_x]$ と $\mathbb{C}[u]$ の同一視は微分作用素の symbol をとる操作である： $\Phi : \mathbb{C}[\partial_x] \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[u]$ と書けば，

$$(3.1) \qquad \Phi(P)(u) = P(\partial_x)\, e^{u.x}\Big|_{x=0} \qquad u.x = \sum_{k=0}^{r-1} u^{(k)} x^{(k)}.$$

これを $\mathcal{F}_m^*$ へ拡張しよう。u に対応する，変数の r 組を m 個用意して $u_0, \ldots, u_{m-1}$ と書く。($u_j = (u_j^{(0)}, \ldots, u_j^{(r-1)})$.) その多項式環 $\mathbb{C}[u_0, \ldots, u_{m-1}]$ に m 次の対称群を $u_0, \ldots, u_{m-1}$ の置換によって作用させ，このときの交代多項式の全体を仮に Λ_m と書くことにする。$\Phi : \mathcal{F}_m^* \xrightarrow{\sim} \Lambda_m$ という同一視を次で定める：

$$(3.2) \quad \Phi(P_0 \wedge \cdots \wedge P_{m-1})(u_0, \ldots, u_{m-1}) = \det\left(P_i(\partial_x)\, e^{u_j . x}\right)\Big|_{x=0}.$$

この対応で，$e^*_{\alpha_0} \wedge \cdots \wedge e^*_{\alpha_{m-1}}$ は，$u_0, \ldots, u_{m-1}$ のべきの行列式（ξ 函数）に移る：

$$(3.3) \qquad \Delta_{\alpha_0 \cdots \alpha_{m-1}}(u_0, \ldots, u_{m-1}) := \det\left(u_j^{\alpha_i} \,;\, 0 \le i, j < m\right).$$

前の議論を $\mathcal{F}_m^*$ から Λ_m へ移してながめると次のようになる。まず，H_α の右からの作用，つまり $\ell(u^\alpha)$ は，巾和

$$(3.4) \qquad s_\alpha(u_0, \ldots, u_{m-1}) = \sum_{j=0}^{m-1} u_j^\alpha$$

の積に対応する。また，$\ell(\partial_u^\alpha)$ の作用は，$s_\alpha(\partial_{u_0}, \ldots, \partial_{u_{m-1}})$ の作用に対応する。従って，(2.8) の Vac_m^* は，

$$(3.5) \qquad s_\alpha(\partial_{u_0}, \ldots, \partial_{u_{m-1}})\, F = 0 \qquad (\alpha \in L^*)$$

を満たす，"調和な" 交代多項式 F の全体に一致する。$\mathcal{H}$ の作用は，実質的に対称多項式環の作用に対応し，「$\mathcal{F}_m^* = \mathcal{V}ac_m^* \mathcal{H}$」は，すべての交代多項式が，調和な交代多項式の対称多項式係数の1次結合で表わされることに対応している。($r=1$ の場合は，Schur 多項式 $S_{l_0 \cdots l_{m-1}}$ が $\Delta_{l_0 \cdots l_{m-1}}(u_0, \cdots, u_{m-1}) = \Delta_{01 \cdots m-1}(u_0, \cdots, u_{m-1}) \cdot S_{l_0 \cdots l_{m-1}}(u_0, \cdots, u_{m-1})$ で定まったのである。)

4. 一つの観察

最後に，$\mathcal{V}ac_m^*$ または $\mathbb{C}[u_0, \cdots, u_{m-1}]$ 内の調和な交代多項式の構造についての一つの観察を述べる。

まず，"対称微分" の概念について。symbol $d^\nu x = (d^\nu x^{(0)}, \cdots, d^\nu x^{(r-1)})$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$ を用意して，$\mathbb{C}[[x]]$ 上の多項式環 $\mathcal{R} := \mathbb{C}[[x]][d^\nu x ; \nu = 1, 2, \cdots]$ を考える。この $\mathcal{R}$ 上の微分 $d : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ を条件

$$
(4.1) \qquad
\begin{aligned}
df &= \sum_{k=0}^{r-1} \partial_i(f)\, dx^{(i)} \qquad (f \in \mathbb{C}[[x]]) \\
d(d^\nu x^{(k)}) &= d^{\nu+1} x^{(k)} \qquad (0 \le k < r,\ \nu \ge 1)
\end{aligned}
$$

と Leibniz 則で定める。例えば $f \in \mathbb{C}[[x]]$ ならば

$$
(4.2) \qquad d^2 f = \sum_{i,j} \partial_i \partial_j(f)\, dx^{(i)} dx^{(j)} + \sum_i \partial_i(f)\, d^2 x^{(i)}.
$$

$d^n f$ は，x 空間内の任意の曲線上での高階微分を形式化したものと思えばよい。(要するに合成函数の微分。) この対称微分を用いれば，多変数での Wronskian の議論を見かけ上1次

元的に展開できる利点がある。函数 $f_0,\dots,f_{m-1}$ に対して、その対称微分による Wronskian とは

(4.3) $Wr(f_0,\dots,f_{m-1}) := \det(d^i f_j : 0\le i,j<m)$

で定まる対称微分形式のことである。これについて、$f_0,\dots,f_{m-1}$ が $\mathbb{C}$ 上1次独立であることと、$Wr(f_0,\dots,f_{m-1})\neq 0$ が同値になることが知られている。(要は、$d:R\longrightarrow R$ の Kernel が $\mathbb{C}$ まで落ちてしまうこと。) この Wronskian を展開してしまえば、

(4.4) $Wr(f_0,\dots,f_{m-1}) = \sum_{\gamma_1\cdots\gamma_{m-1}} \omega_{\gamma_1\cdots\gamma_{m-1}}(f_0,\dots,f_{m-1})(dx)^{\gamma_1}(d^2x)^{\gamma_2}\cdots(d^{m-1}x)^{\gamma_{m-1}}$

の形になる。但し、$\gamma_1,\dots,\gamma_{m-1}\in\mathbb{N}^r$ で、$|\gamma_1|+2|\gamma_2|+\cdots+(m-1)|\gamma_{m-1}| = \frac{1}{2}m(m-1)$ の下で和をとる。係数は、

(4.5) $\omega_{\gamma_1\cdots\gamma_{m-1}}(f_0,\dots,f_{m-1}) = \sum_{\alpha_0\cdots\alpha_{m-1}} C_{\gamma_1\cdots\gamma_{m-1};\alpha_0,\dots,\alpha_{m-1}} Wr_{\alpha_0\cdots\alpha_{m-1}}(f_0,\dots,f_{m-1})$

の形になる。ここで $C_{\gamma_1\cdots\gamma_{m-1};\alpha_0\cdots\alpha_{m-1}}\in\mathbb{Z}$. また $\alpha_0,\dots,\alpha_{m-1}\in\mathbb{N}^r$ で $Wr_{\alpha_0\cdots\alpha_{m-1}}(f_0,\dots,f_{m-1}) = \det(\partial_x^{\alpha_i}(f_j)\,;\,0\le i,j<m)$ と書いた。$\alpha_0,\dots,\alpha_{m-1}$ は $|\alpha_i|\le i$, $\sum\alpha_i=\sum\gamma_i$ の下で動く。

今とくに、$f_j(x)=e^{u_j\cdot x}$ の場合を考える。($u_0,\dots,u_{m-1}$ は前節のもの。) そうすると

(4.6)
$$\begin{aligned} &Wr(e^{u_0\cdot x},\dots,e^{u_{m-1}\cdot x})\big|_{x=0} \\ &= \sum_{\gamma_1\cdots\gamma_{m-1}} h_{\gamma_1\cdots\gamma_{m-1}}(u_0,\dots,u_{m-1})(dx)^{\gamma_1}(d^2x)^{\gamma_2}\cdots(d^{m-1}x)^{\gamma_{m-1}}\end{aligned}$$

の形の表式を得る。ここで、$h_{\gamma_1\cdots\gamma_{m-1}}$ は

(4.7) $h_{\gamma_1\cdots\gamma_{m-1}}(u_0,\dots,u_{m-1}) = \sum_{\alpha_0\cdots\alpha_{m-1}} C_{\gamma_1\cdots\gamma_{m-1};\alpha_0\cdots\alpha_{m-1}}\Delta_{\alpha_0\cdots\alpha_{m-1}}(u_0,\dots,u_{m-1})$

なる交代多項式である。

<u>命題</u>　上の手続きで定まる $h_{\gamma_1\cdots\gamma_{m-1}}(u_0,\cdots,u_{m-1})$ はすべて (3.5) の意味で調和である。

今は交代多項式の側で説明したが，実際の計算は $\mathcal{F}_m^*$ で行なう方が容易である．上の構成法は，$\mathcal{F}_m^*$ の側では次の手続きに対応する。まず $\omega = u.dx = \sum_{k=0}^{r-1} u^{(k)}dx^{(k)}$ と書いて，対称微分形式の列 $\omega_0, \omega_1, \ldots$ を

(4.8)　$\omega_0 = 1\ ,\ \omega_1 = \omega\ ,\ \omega_m = d\omega_{m-1} + \omega\omega_{m-1}$

と定める。($\omega_2 = u.d^2x + (u.dx)^2$, $\omega_3 = u.d^3x + 3(u.d^2x)(u.dx) + (u.dx)^3$ etc.) $d^\nu x^{(k)}$ は外積 $\wedge$ と交換する約束で，$C[d^\nu x]\otimes \mathcal{F}_m^*$ の元 $\omega_0\wedge\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_{m-1}$ を考える。これは展開すると

(4.9)　$\omega_0\wedge\cdots\wedge\omega_{m-1} = \sum_{\gamma_1\cdots\gamma_{m-1}} (dx)^{\gamma_1}(d^2x)^{\gamma_2}\cdots(d^{m-1}x)^{\gamma_{m-1}} v^*_{\gamma_1\cdots\gamma_{m-1}}$,

但し $v^*_{\gamma_1\cdots\gamma_{m-1}} \in \mathcal{F}_m^*$ ，と書ける。(3.2) の対応で $v^*_{\gamma_1\cdots\gamma_{m-1}}$ は，$h_{\gamma_1\cdots\gamma_{m-1}}(u_0,\cdots,u_{m-1})$ と対応し，上の命題は，こちらでいえば各 $v^*_{\gamma_1\cdots\gamma_{m-1}}$ が Vac^*_m に属す — ということである。(興味があれば $r=2$ として $\omega_0\wedge\omega_1\wedge\omega_2$ を計算してみるとよい。)

<u>観察</u>　Vac^*_m は，C 線型空間として，上の $v^*_{\gamma_1\cdots\gamma_{m-1}}$ 達から生成されているらしい。同じことだが，$C[u_0,\cdots,u_{m-1}]$ 内の調和な交代多項式はすべて，上の $h_{\gamma_1\cdots\gamma_{m-1}}(u_0,\cdots,u_{m-1})$ の1次結合に限るらしい。

実際 $r=2$ で $m\leq 4$ では正しい。このときの $m=1,2,3,4$ に対する Vac^*_m の次元は $1,2,5,14$ である。$m=5$ の場合も部分的には検証されている。この計算には成瀬弘氏が協力して下さり，いろいろ有益な情報も頂いたが，結論が出ないままになっている。

対称微分の概念を取り込むことが，可積分系の議論に直接役に立つかどうかはわからないが，上の観察は，何らかの形で"高次の微分"を取り込むことの必要性を示唆しているようにも思える。

τ函数そのものについてはあまり触れなかったが，Vac^*_m の基底をとり，対応する Plücker 座標の時間発展をτ函数族と呼べば，Grassmann 多様体からくる場合には，τ函数族が双線型な微分方程式系を満たすことがわかる。これは，$\mathcal{F}^*_m = Vac^*_m\mathcal{H}$ と Plücker 関係式からの直接の帰結である。

（以上）