数理解析研究所講究録
第 642 巻 1988 年 245-255

Un produit de composition des fonctions sur des espaces symétriques semi-simples

par Shigeru Sano (佐野 茂)

(The Institute of Vocational Training)
職業訓練大学校

§0. Introduction

Dans le groupe localement compact, un produit de composition des fonctions est une notion fondamentale. Le produit de compostion a rapport à la théorie de représentation du groupe. Dans le cas particulier du groupe abélien, la transformation de Fourier garde ce produit, c'est-à-dire, $\widehat{f*g} = \hat{f}\cdot\hat{g}$. D'autre part, dans l'espace symétrique riemannien G/K, le produit de composition est définit pour des fonctions K-biinvariantes.

On veut donner le produit de composition dans un espace symétrique semi-simple G/H. On généralise la décomposition de Cartan associée à (G,H)(Corollaire 1.2). D'après cette décomposition, on définit le produit de compositions qui coïncide avec celui du groupe et de l'espace symétrique riemannien (Définition 1.1).

Harish-Chandra a montré le théorème de récurrence associe à le produit de composition dans le groupe de Lie semi-simple pour étudier les distributions propres invariantes (Théorème 1 [2(2)]). On généralise ce théorème dans l'espace symétrique semi-simple G/H (Théorème 1.1).

§1. Un produit de composition

Dans ce paragraphe, on étudie un produit de composition des fonctions mesurables sur des espaces symétriques semi-simples. Le produit de composition est utile à l'analyse harmonique sur les espaces symétriques comme dans le cas des groupes de Lie.

Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe muni d'une involution σ , et $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ l'algèbre de Lie symétrique associée. Soit H_0 le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, G_σ le sous-groupe des points fixes de σ dans G et H un sous-groupe fermé de G compris entre H_0 et G_σ. On considére une involution de Cartan θ de $\mathfrak{g}$ qui commute à σ. Soit $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{q}$ (resp. $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$) la décomposition de $\mathfrak{g}$ correspondant aux valeurs propres +1 et -1 pour σ (resp.θ). Soit K le sous-groupe analytique de G associé à $\mathfrak{k}$.

Soit $\mathfrak{b}$ un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$ et B un sous-groupe analytique de G associé. La décomposition suivante de G est donnée par (Corollaire I.4.[3]).

<u>Proposition 1.1.</u> Le groupe G admit la décomposition suivante :

$$G = KBH .$$

De plus $k_1b_1H = k_2b_2H$ si, et seulement si, il existeun élément ℓ de $K\cap H$ tel que $k_1=k_2\ell$ et $b_1=\ell^{-1}b_2\ell$.

Soit $\mathfrak{b}_0$ un sous-espace abélien de $\mathfrak{p}$. $\mathfrak{b}_0$ s'appel le un espace $\mathfrak{q}$-déployé s'il satisfait aux conditions: 1) $\mathfrak{b}=\{X-\sigma X : X\in\mathfrak{b}_0\}$ est un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$, 2) l'application linéaire $X\longmapsto X-\sigma X$, de $\mathfrak{b}_0$ sur $\mathfrak{b}$ est bijective, 3) $N_{K\cap H}(\mathfrak{b}_0) = N_{K\cap H}(\mathfrak{b})$

où $N_{K\cap H}(\mathfrak{a})$ est le normalisateur de $\mathfrak{a}$ dans $K\cap H$. Tout sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$ est $\mathfrak{q}$-déployé On généralise la proposition 1.1 à l'aide de la notion ci-dessus.

Corollaire 1.2. Soit $\mathfrak{b}_0$ un sous-espace abélien $\mathfrak{q}$-déployé de $\mathfrak{p}$ et B_0 le sous-groupe analytique de G associé. On a alors la décomposition

$$G = KB_0H.$$

De plus $kb_0H = k'b_0'H$ ($k, k' \in K$, $b_0, b_0' \in B_0$) si, et seulement si, il exist un élément l de $K\cap H$ tel que $k = k'l$ et $b_0 = l^{-1}b_0'l$.

Démonstration. Soit $\mathfrak{b} = \{X - \sigma X : X \in \mathfrak{b}_0\}$ et B le sous-groupe analytique de G associé. Alors d'après la décomposition $G = KBH$ de la proposition 1.1 et les conditions de $\mathfrak{b}_0$, on a l'assertion du corollaire .

Q.E.D.

Soit A_g ($g \in G$) l'action de G sur G/H définit par $A_g(xH) = gxH$. L'involution σ induit un difféomorphisme sur G/H par $\sigma(xH) = \sigma(x)H$ ($xH \in G/H$) . Alors $\sigma A_g = A_{\sigma(g)}\sigma$ ($g \in G$). Soit dx_H une forme G-invariante positive sur G/H. On pose $d\sigma(x)_H = \sigma^* dx_H$.

Lemme 1.3.

$$d\sigma(x)_H = (-1)^{\dim \mathfrak{q}} dx_H$$

<u>Démonstration.</u> D'après

$$\begin{aligned} A_g^* \, d\sigma(x)_H &= (\sigma A_g)^* \, dx_H \\ &= (A_{\sigma(g)}\sigma)^* \, dx_H \\ &= d\sigma(x)_H \end{aligned}$$

$d\sigma(x)_H$ est une forme G-invariante sur G/H, alors proportionnelle à dx_H . Mais évidemment $d\sigma(x)_H|_H = (-1)^{\dim \mathfrak{q}} dx_H|_H$, par conséquent, le lemme est vérifié. Q.E.D.

Soit $\mathfrak{b}_0$ un sous-espace abélien $\mathfrak{q}$-fendu de $\mathfrak{p}$ et B_0 le sous-groupe analytique de G associé. Soit $C(G/H)$ (resp. $C_c(G/H)$) l'ensemble des fonctions continues (resp. continues à support compact) sur G/H. D'après le corollaire 1.2, on définit un produit de composition des fonctions:

<u>Définition 1.1.</u> Soit $f \in C(G/H)$ et soit $\alpha \in C_c(G/H)$ telle que $\alpha(lxH) = \alpha(xH)$ pour tout $l \in K \cap H$ et $x \in H$. On définit un produit de composition des fonctions f et α en posant

$$f \circledast \alpha(xH) = \int_{G/H} f(xyH)\, \alpha(\sigma(y)H)\, dy_H \quad (x \in KB_0).$$

<u>Remarque.</u> 1) D'après le lemme 1.3 et l'orientation de G/H, le produit de composition est encore égal à

$$f \circledast \alpha(xH) = \int_{G/H} f(\sigma(y)H)\, \alpha(\sigma(x)^{-1}yH)\, dy_H .$$

2) Soit G/K un espace symétrique riemannien du type non-compact et soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ la décomposition de l'algèbre de Lie associée. Soit dg une mesure de Haar sur G. Supposons que le centre de G soit fini. Soit dk la mesure de Haar sur K normalisée par $\int_K dk = 1$. Soit dg_K la mesure G-invariante sur G/K telle que $dg = dg_K\, dk$. Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{p}$ et soit A le sous-groupe analytique de G associé. Si f et α sont deux fonctions continues sur G telles que $f(gk) = f(g)$ et $\alpha(kgk') = \alpha(g)$ pour $k, k' \in K$ et $g \in G$, on a

$$f \circledast \alpha(gK) = \int_{G/K} f(ghK)\, \alpha(\sigma(h)K)\, dh_K$$

$$= \int_G f(gh)\, \alpha(h^{-1})\, dh \qquad (g \in KA).$$

Ainsi le produit de composition coïncide avec le produit de composition de l'espace symétrique G/K (cf. [1] p316).

3) Soit G' un groupe de Lie semi-simple connexe. L'espace symétrique $G/H = G' \times G' / d(G')$ s'identifie à G' par l'isomorphisme analytique $\varphi : (g_1, g_2)\, d(G') \mapsto g_1 g_2^{-1}$. Soit $\mathfrak{g}' = \mathfrak{k}' + \mathfrak{p}'$ la décomposition de Cartan de l'algèbre de Lie de G'. Soit K' le sous-groupe de G' associée à $\mathfrak{k}'$. Soit $\mathfrak{a}'$ un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{p}'$ et soit A' le sous-groupe analytique de G associé. On pose $\mathfrak{b}_0 = \{(X, 0) : X \in \mathfrak{a}'\}$. $\mathfrak{b}_0$ est un sous-espace abélien $\mathfrak{q}$-déployé de $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \times \mathfrak{p}'$.

Soit B_o et K les sous-groupes analytiques de G associé à $\mathfrak{b}_o$ et $k' \times k'$ respectivement. On définit le produit de composition par la décomposition $G = KB_oH$. On associe une mesure G-invariante dg_H sur G/H à la mesure de Haar dg sur G' par le difféomorphisme φ. Soit $f \in C_c(G/H)$ et soit $\alpha \in C_c(G/H)$ telle que $\alpha(\ell x H) = \alpha(xH)$ pour tout $\ell \in K \cap H$ et $xH \in G/H$. On définit deux fonctions sur G' en posant $f' = f \circ \varphi^{-1}$ et $\alpha' = \alpha \circ \varphi^{-1}$. Alors $\alpha'(kxk^{-1}) = \alpha'(x)$ ($k \in K'$, $x \in G'$). On a

$$f \circledast \alpha(xH) = \int_{G/H} f(xyH)\, \alpha(\sigma(y)H)\, dy_H .$$

$$= \int_{G'} f'(k_1 a k_2 g)\, \alpha'(g^{-1})\, dg$$

où $x = kb_o \in KB_o$, $k = (k_1, k_2) \in K = K' \times K'$, $b_o = (a, 1) \in B_o = A' \times \{1\}$.
Ainsi le produit de composition du G/H coïncide avec celui du groupe G'.

Supposons que le centre de G soit fini. Une suite de fonctions $\{\alpha_j\}$ de $C_c^\infty(G/H)$ s'appelle une suite de Dirac si elle satisfait aux cinditions : 1) $\alpha_j \geqslant 0$ et

$$\int_{G/H} \alpha_j(xH)\, dx_H = 1 \quad ;$$

2) Pour tout voisinage U de H dans G/H, supp $\alpha_j \subset U$ pour tout j sauf pour un nombre fini d'entre eux.

Il est claire qu'il existe toujours une suite de Dirac telle que $\alpha_j(\ell x H) = \alpha_j(xH)$ $(\ell \in K \cap H,\ xH \in G/H)$.

Lemme 1.4. Soit $\{\alpha_j\}$ une suite de Dirac telle que $\alpha_j(\ell x H) = \alpha_j(xH)$ ($\ell \in K\cap H$, $xH \in G/H$). On a alors

$$\lim_{j\to\infty} f \circledast \alpha_j = f \qquad \text{dans} \quad C^\infty(G/H)$$

pour tout $f \in C^\infty(G/H)$.

Démonstration. Soit $\{\mu\}$ un système de pseudonormes de $C^\infty(G/H)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de H, σ-invariant dans G/H tel que

$$\mu(f(xyH) - f(xH)) < \varepsilon$$

pour tout $yH \in U$.

On a

$$f \circledast \alpha_j(xH) - f(xH)$$
$$= \int_{G/H} \{f(xyH) - f(xH)\}\, \alpha_j(\sigma(y)H)\, dy_H,$$

d'où $\mu(f \circledast \alpha_j(xH) - f(xH)) < \varepsilon$ si supp $\alpha_j(\sigma(y)H) \subset U$.

Q.E.D.

Soit $d\ell$ une mesure de Haar sur $K\cap H$. On définit pour $\alpha \in C(K\cap H)$ et $f \in C(G/H)$

$$\alpha * f(xH) = \int_{K\cap H} \alpha(\ell^{-1})\, f(\ell x H)\, d\ell.$$

A l'aide de la convolution ci-dessus et la définition 1.1 on a le lemme suivant :

<u>Lemme 1.5.</u> Soit $\alpha \in C(K \cap H)$ et soit $\beta \in C_c(G/H)$ telle que $\beta(\ell x H) = \beta(xH)$ pour tout $\ell \in K \cap H$ et $xH \in G/H$. On a alors, pour toute fonction $f \in C(G/H)$

$$\alpha * (f \circledast \beta) = (\alpha * f) \circledast \beta .$$

Soit $\mathfrak{G}$ l'algèbre enveloppante universelle de l'algèbre de Lie et $\mathfrak{z}$ le centre $\mathfrak{G}$. Soit $\mathfrak{B}$ la sous-algèbre engendrée par 1 et $\mathfrak{k}$

<u>Théorème1.1.</u> Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Soit f une fonction C^∞ sur G/H à valeurs dans V telle que $\dim\{zf : z \in \mathfrak{z}\mathfrak{B}\} < \infty$. Soit U un voisinage de H dans G/H. On pose $K(U) = \{\alpha \in C_c^\infty(G/H) : \operatorname{supp} \alpha \subset U,\ \alpha(\ell x H) = \alpha(xH)$ pour tout $xH \in G/H$ et $\ell \in K \cap H\}$
Alors, il existe une fonction α de $K(U)$ telle que $f \circledast \alpha = f$.

<u>Démonstration.</u> Soit R la représentation régulière de G dans $C^\infty(G/H, V)$ définit par $[R_g f](xH) = f(g^{-1}xH)$ Si on identifie $C^\infty(G/H, V)$ et $C^\infty(G/H) \otimes V$, R opére trivialement sur V. On pose $\mathcal{U} = \{u \in \mathfrak{z}\mathfrak{B} : uf = 0\}$. Alors $\mathcal{U}$ est un idéal à gauche et $\dim \mathfrak{z}\mathfrak{B}/\mathcal{U} < \infty$. Soit W est le plus petit sous-espace fermé R_G-invariant de $C^\infty(G/H) \otimes V$ contenant f. On pose $W_0 = R_{\mathfrak{G}} f$. On veut montrer que $W = \overline{W_0}$ Supposons que $W_0 \subsetneq W$. Alors d'après le théorèmede Hahn-Banach, il existe une fonction linéaire continue non nulle β de W telle

que $\beta = 0$ sur W_0. On pose

$$F(g) = \beta(\mathcal{R}_g f) \qquad (g \in G).$$

Alors $F \in C^{\infty}(G)$ car f est dérivable sous $\mathcal{R}$. On a

$$F(g; \zeta) = \beta(\mathcal{R}_g \mathcal{R}_\zeta f) \qquad (\zeta \in \mathfrak{G}).$$

Alors $u F = 0$ $(u \in \mathcal{U})$. F est une fonction analytique car $\mathcal{U}$ contient des opérations elliptiques. D'autre part, on a

$$F(1; u) = \beta(\mathcal{R}_u f) = 0 \qquad \text{pour tout } u \in \mathcal{U}$$

car $\beta = 0$ sur W_0. Par conséquent $F = 0$ sur G et $\beta = 0$ sur W. Cette contradiction montre que $W = \overline{W_0}$.

Si on pose $W_1 = \mathcal{R}_{\mathfrak{B}} f$, on a $\dim W_1 < \infty$. D'après une discussion analoque, $\mathcal{R}_{K \cap H} f \subset W_1$. W_1 est un espace $\mathcal{R}_{K \cap H}$-invariant. Il exist un ensemble finit $F \subset \widehat{K \cap H}$ tel que $\alpha_F * f = f$ car $f \in W_1$. On pose $P_F = \sum_{\delta \in F} P_\delta$ et $W_F = P_F W$. On réclame $\dim W_F < \infty$. La representation naturelle de B sur $\mathfrak{B}/\mathfrak{B} \cap \mathcal{U}$ est finie car W est réductible complètement sous $\mathcal{R}_{\mathfrak{Z}}$. Ensuite d'après $\dim \mathfrak{Z}\mathfrak{B}/\mathcal{U} < \infty$, le théorème 1 de Harish-Chandra[2(1)], on a $W_0 = \sum_{\delta \in \widehat{K \cap H}} P_\delta W_0$ et $\dim P_\delta W_0 < \infty$ pour tout $\delta \in \widehat{K \cap H}$. D'ailleurs, le sous-espace W_0 est dense dans W et alors $P_\delta W_0$ est dense dans $P_\delta W$. Par conséquent $P_\delta W_0 = P_\delta W$ et on a alors $\dim P_\delta W < \infty$.

Soit $\{\alpha_j\}$ une suite de Dirac telle que $\alpha_j \in K(U)$ pour tout j.

D'après le lemme 1.4, on a $\lim_{j\to\infty} f \circledast \alpha_j = f$. On pose $W_2 = \{ f \circledast \alpha \in W : \alpha \in K(U) \}$. D'après le lemme 1.5, on a $\alpha_{F_1} * (f \circledast \alpha) = f \circledast \alpha$. Alors $W_2 \subset W_{F_1}$ et $\dim W_2 < \infty$. Par conséquent W_2 est fermé dans W et donc

$f = \lim_{j\to\infty} f \circledast \alpha_j \in W_2$. Q.E.D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.Clerc, P. Eymard, J.Faraut, M.Rais et R.Takahashi, "Analyse Harmonique", C.I.M.P.A., Nice, 1982.

[2] Harish-Chandra, (1) Representations of semi-simple Lie groups I, Trans.Amer.Math.Soc., vol.75(1953), PP.185-243.
(2) Discrete series for semi-simple Lie groups II, Acta Math., vol.116(1966), pp.1-111.

[3] M.Flensted-Jensen, "Analysis on non-Riemannian symmetric spaces", Conf.Board Math.Sci.Series, No.61, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1986.

[4] M.Sugiura, "Unitary Representations and Harmonic Analysis", Wiley, New York, 1975.