数理解析研究所講究録
第647巻 1988年 21-35

ある半線型楕円型方程式の無限個の解の存在について

広島大・理　梶木屋 龍治 (Ryuji Kajikiya)

本講演の内容は、名古屋大学理学部、田中和永氏との共同研究の結果である。

次の半線型楕円型方程式を考える。

$$(E)\begin{cases} -\Delta u = g(u) + f(x) & (x \in \Omega) \\ u = 0 & (x \in \partial\Omega) \end{cases}$$

ここで $\Omega \subset R^N$ $(N \geq 2)$ は滑らかな境界をもつ有界領域であり、g は連続な奇関数で $\lim_{|\xi|\to\infty} \frac{g(\xi)}{\xi} = \infty$ をみたすものとする。$H_0^1(\Omega)$ に属し、超関数の意味で方程式 (E) を満たす関数を (E) の弱解と呼ぶ。本講演においては、g, f に対しての適当な仮定のもとに方程式 (E) が無限に多くの弱解をもつことを示す。

§1 主定理とその応用

$f \equiv 0$ の場合は、文献 [1], [7], [9] においてこの問題が扱われている。特に Rabinowitz [9] は、次の仮定 (g_1) のもと

に（E）の弱解の列で $H_0^1(\Omega)$ ノルムに関して非有界なものが存在することを示した。

(g_1) ある定数 $\mu>2$, $s\in(2,\frac{2N}{N-2})$, $R>0$ 及び $C_0>0$ が存在して次の不等式が成り立つ。

$$0<\mu\cdot G(\xi)\equiv\mu\int_0^\xi g(\tau)\,d\tau\leqq\xi\cdot g(\xi)\leqq C_0|\xi|^s\qquad(|\xi|\geqq R)$$

(g_1) が仮定されれば、$\liminf_{|\xi|\to\infty}\frac{g(\xi)}{|\xi|^{\mu-2}\cdot\xi}>0$ が成り立つことは容易にわかる。我々は、$|\xi|^{\mu-2}\xi$ $({}^\forall\mu>2)$ よりも遅い増大度をもつ $g(\xi)$ の場合を考える。

<u>定理1</u>　$f\equiv0$ とする。次の仮定 (g_2) をおく。

(g_2) 次の不等式を満たす定数 $\mu>1$, $s>2$ 及び a_i $(1\leqq i\leqq4)$ が存在する。

$$s<\frac{2\mu}{N}+2$$

$$a_1|\xi|^s+a_2\geqq\xi\cdot g(\xi)\geqq2G(\xi)+a_3|\xi|^\mu-a_4\qquad(\xi\in\mathbb{R})$$

ただし、$G(\xi)\equiv\int_0^\xi g(\tau)\,d\tau$ である。

このとき（E）の弱解の列 $\{u_k\}$ で、$\lim_{k\to\infty}\|u_k\|_{H_0^1(\Omega)}=\infty$ をみたすものが存在する。

$f\not\equiv0$ の場合には、[2], [3], [8], [10] において扱われてい

る。これらの論文ではこの場合を $f\equiv 0$ の問題に対する摂動としてとらえている。我々は、ゆるやかな増大度をもつような $g(\xi)$ に対して無限個の弱解の存在を示す。

<u>定理2</u>　次の仮定 (g_3) をおく。

$$(g_3)\left[\begin{array}{l}\text{仮定}\ (g_2)\ \text{においてさらに次の条件を加える。}\\ \dfrac{\mu}{\mu-1} < \dfrac{2S}{N(S-2)}\end{array}\right.$$

$f\in L^{\frac{\mu}{\mu-1}}(\Omega)$ のとき、(E) の弱解の列 $\{u_k\}$ で $\lim_{k\to\infty}\|u_k\|_{H_0^1}=\infty$ をみたすものが存在する。

<u>注意1</u>　$g(\xi)$ が $\mathbb{R}$ 上で局所 Hölder 連続で、$f(x)$ が $\bar{\Omega}$ 上で Hölder 連続ならば、弱解は $C^2(\bar{\Omega})$ に属する解、すなわち、古典解になる。

次に方程式 (E) の具体的な例をあげ、定理を適用する。

<u>例1</u>

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}u + f(x) & (x\in\Omega)\\ \quad u = 0 & (x\in\partial\Omega)\end{cases}$$

$f\equiv 0$, $1<p<\frac{N+2}{N-2}$ のとき解が無限個存在することが知られている。([1], [7], [9])

$f\not\equiv 0$, $1<p<\frac{N}{N-2}$ のとき解が無限個存在する。([3])

これらの結果は、定理1, 2を使っても導くことができる。

例2
$$\begin{cases} -\Delta u = u\log(|u|+1) + f(x) & (x\in\Omega) \\ u = 0 & (x\in\partial\Omega) \end{cases}$$

この問題については、$g(\xi)\equiv\xi\log(|\xi|+1)$ が仮定(g_1)を満たさないので従来の結果からは、解が無限個あるかどうかわからない。実際にこの$g(\xi)$は、どんな$|\xi|^{\mu-2}\xi$ $({}^\forall\mu>2)$よりも遅く増大する関数である。しかし仮定(g_2),(g_3)は満たされるので、定理1,2よりこの問題はやはり解を無限個もつことがわかる。

以下において定理の証明の方針を述べる。

定義1　$u\in L^p(\Omega)$のL^pノルムを$\|u\|_p$とかく。$H_0^1(\Omega)$にはノルム$\|\nabla u\|_2$を入れる。すなわち、

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_2 = \left(\sum_i\int\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$ である。

$(u,v)=\int_\Omega u\cdot v\,dx$　$\left(u\in L^p,\ v\in L^q,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ と表す。

定理1,2の証明は、次の汎関数$I(u)$に minimax 法を適用することにより得られる。

$I(\cdot): H_0^1(\Omega)\longrightarrow R$　C^1級

$$I(u)\equiv\int_\Omega\left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - G(u) - f(x)\cdot u\right]dx,\qquad u\in H_0^1(\Omega)$$

注意2　$I'(u)$を計算すると

$$\langle I'(u), v\rangle = (\nabla u,\nabla v) - (g(u), v) - (f, v)\qquad u, v\in H_0^1(\Omega)$$

となっているから、u が (E) の弱解であることと $I'(u)=0$ をみたすことは同値であることに注意する。

定義2 (i) $I'(u)=0$ をみたす $u\in H_0^1(\Omega)$ を I の critical point と呼ぶ。

(ii) $c\in\mathbb{R}$ が I の critical value であるとは、$I'(u)=0$ かつ $I(u)=c$ をみたす $u\in H_0^1(\Omega)$ が存在することである。

注意2及び定義2より弱解とはすなわち I の critical point のことであるから、定理を証明するためには次の事が示されれば十分である。

(*) I の critical values の列 $\{c_k\}$ で $\lim_{k\to\infty} c_k=\infty$ なるものが存在する。

これが示されると $I'(u_k)=0$, $I(u_k)=c_k\to+\infty$ をみたす列 $\{u_k\}\subset H_0^1(\Omega)$ がとれる。一方、任意の $R>0$ に対して $\sup\{|I(u)| : \|u\|_{H_0^1}\leqq R\}<\infty$ となることが容易にわかるので、$\lim_{k\to\infty}\|u_k\|_{H_0^1}=\infty$ となり、これが求める弱解の列である。

§2 定理1の証明の概略

critical values の列 $\{c_k\}$ を構成する。

$f \equiv 0$ の場合であるから

$$I(u) \equiv I_0(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - G(u)\right] dx$$ とおく。

$H_0^1(\Omega)$ の部分空間の列 $\{E_n\}$ で、

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots\cdots, \quad dim\ E_n = n$$

となるものをとる。仮定 $\lim_{|\xi|\to\infty} \frac{g(\xi)}{\xi} = \infty$ により、適当な正数列 $\{R_n\}$ $(0 < R_1 < R_2 < R_3 < \cdots \nearrow \infty)$ を選べば、

$$I_0(u) < 0 \qquad (u \in E_n,\ \|u\|_{H_0^1} \geqq R_n)$$

が成り立つ。次のように D_n, Γ_n を定義する。

$$D_n \equiv \{ u \in E_n : \|u\|_{H_0^1} \leqq R_n \}$$

$$\Gamma_n \equiv \left\{ \gamma \in C(D_n ; H_0^1(\Omega)) : \begin{array}{ll} \gamma(-u) = -\gamma(u) & (u \in D_n) \\ \gamma(u) = u & (u \in \partial D_n) \end{array} \right\}$$

このとき、

$$C_n = \inf_{\gamma\in\Gamma_n} \max_{u\in D_n} I_0(\gamma(u))$$

によって定義される実数列 $\{C_n\}$ が(*)をみたす critical values の列である。2つの事を示さねばならない。1つは各 C_n が critical value であること、もう1つは $\{C_n\}$ が無限大に発散することである。C_n が critical value であるためには、$I_0(u)$ が次の弱 Palais − Smale 条件(以下(W.P.S.)と書く)を満たしていればよい。

<u>命題1</u> (g_2) の仮定のもとに、$I_0(u)$ は次の(W.P.S.)条件を満たす。

(W.P.S.) もし $\{u_j\} \subset H_0^1(\Omega)$ が
(i) $\sup_j I_0(u_j) < \infty$
(ii) $\|I_0'(u_j)\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u_j\|_{H_0^1(\Omega)} \longrightarrow 0 \quad (j \to \infty)$
なる２つの条件を満たせば $\{u_j\}$ から $H_0^1(\Omega)$ において強収束する部分列が取り出せる。

証明　$M = \sup_j I(u_j)$，$m = \sup_j |\langle I'(u_j), u_j \rangle|$ とおく。
$I_0(u)$ の定義と (g_2) とにより

$$
\begin{aligned}
M + \tfrac{1}{2} m &\geqq I_0(u_j) - \tfrac{1}{2} \langle I_0'(u_j), u_j \rangle \\
&= \int_\Omega \left[\tfrac{1}{2} u_j g(u_j) - G(u_j) \right] dx - \tfrac{1}{2}(f, u_j) \\
&\geqq C \|u_j\|_\mu^\mu - C - \tfrac{1}{2} \|u_j\|_\mu \|f\|_{\frac{\mu}{\mu-1}}
\end{aligned}
$$

（j に無関係な正定数はすべて C と書く。）
よって $\{\|u_j\|_\mu\}$ は有界。仮定 (g_2)，Nirenberg－Gagliardo の不等式及び $\{\|u_j\|_\mu\}$ の有界性から

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega G(u_j)\, dx &\leqq C \|u_j\|_s^s + C \leqq C \|\nabla u_j\|_2^{s\theta} \|u_j\|_\mu^{s(1-\theta)} + C \\
&\leqq C \|\nabla u_j\|_2^{s\theta} + C \quad , \quad \theta = \frac{2N(s-\mu)}{2Ns + 2\mu s - N\mu s}
\end{aligned}
$$

この不等式を使うと、

$$
\begin{aligned}
M \geqq I_0(u_j) &= \tfrac{1}{2} \|\nabla u_j\|_2^2 - \int G(u_j)\, dx - (f, u_j) \\
&\geqq \tfrac{1}{2} \|\nabla u_j\|_2^2 - C \|\nabla u_j\|_2^{s\theta} - C
\end{aligned}
$$

(g_2) より $s\theta < 2$ なので、$\{\|\nabla u_j\|_2\}$ は有界となる。
$\{u_j\}$ から $H_0^1(\Omega)$ において強収束する部分列がとり出せること

を示すのはあまり難しくない。　(証明終)

$I_0(u)$が(W.P.S.)条件を満たす偶汎関数であることを使うと、次の補題が得られる。

補題1 ([4, Theorem 1.3])　実数cがI_0のcritical valueでないならば、$1>\bar{\varepsilon}>\varepsilon>0$なる$\bar{\varepsilon}$, ε及び$H_0^1(\Omega)$から$H_0^1(\Omega)$への連続な奇関数hが存在して、次の(i), (ii)を満たす。

(i) $|I_0(u)-c|>\bar{\varepsilon}$なる$u$に対して$h(u)=u$である。

(ii) $I_0(u)\leqq c+\varepsilon$のとき$I_0(h(u))\leqq c-\varepsilon$である。

この補題を使って先に定義したc_n (nが十分の大のとき)が、critical valueであることを示す。後で示すように$\lim_{n\to\infty} c_n=\infty$だから$c_n>1$としてよい。今$c_n$がcritical valueでないと仮定すると補題1によりε, $\bar{\varepsilon}$及びhが存在する。c_nの定義より

$$\max_{u\in D_n} I_0(\gamma(u)) < c_n+\varepsilon$$

をみたす$\gamma\in\Gamma_n$が存在する.　$\gamma(u)=u$ ($u\in\partial D_n$) だから

$I_0(\gamma(u))=I_0(u)<0$ ($u\in\partial D_n$)　これと補題1 (i)により、

$h(\gamma(u))=\gamma(u)=u$ ($u\in\partial D_n$)　従って$h\circ\gamma\in\Gamma_n$。

一方$I_0(\gamma(u))<c_n+\varepsilon$ ($u\in D_n$) だから補題1 (ii) により、

$$I_0(h(\gamma(u))) \leqq c_n - \varepsilon \quad (u \in D_n)$$

これは c_n の定義に反する。以上より c_n は critical value である。$\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$ を示すためには、次の命題が示されれば十分である。

<u>命題2</u> (i) $N \geqq 3$ のとき、ある $d_1, d_2 > 0$ が存在して、

$$c_n \geqq d_1 n^{\frac{2s}{N(s-2)}} - d_2 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

(ii) $N=2$ のとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対して ある $d_{1\varepsilon}, d_{2\varepsilon} > 0$ が存在して、

$$c_n \geqq d_{1\varepsilon} n^{-\varepsilon + \frac{s}{s-2}} - d_{2\varepsilon} \quad (n \in \mathbb{N})$$

命題2を示そう。仮定(g_2)より適当な $a, b > 0$ に対して

$$I_0(u) \geqq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - a\|u\|_s^s - b \qquad \text{であるから、}$$

$$K(u) \equiv \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - a\|u\|_s^s \in C^2(H_0^1(\Omega); \mathbb{R})$$

$$\overline{c_n} \equiv \inf_{\gamma \in \Gamma_n} \max_{u \in D_n} K(\gamma(u)) \qquad \text{と定義する。}$$

$c_n \geqq \overline{c_n} - b \quad (n \in \mathbb{N})$ であるから $\overline{c_n}$ に対して命題2の不等式を示せばよい。そのために補題を2つ用意する。

<u>補題2</u> ([11, Theorem B]) 次の条件をみたす $v_n \in H_0^1(\Omega)$ が存在する。

(i) $K(v_n) \leqq \bar{c}_n$

(ii) $K'(v_n) = 0$

(iii) $\mathrm{index}\ K''(v_n) \geqq n$

ここで $K''(v) = -\Delta - a \cdot s(s-1)|v|^{s-2}$,

$\mathrm{index}\ K''(v) =$ Dirichlet 境界条件をもつ作用素 $-\Delta - a \cdot s(s-1)|v|^{s-2}$ の 0 以下の固有値の個数

補題 3 ([5]) (i) $N \geqq 3$ のとき、ある $C_N > 0$ が存在して

$$\mathrm{index}\,(-\Delta - V(x)) \leqq C_N \|V\|_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \qquad (V(x) \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega))$$

(ii) $N = 2$ のとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $C_\varepsilon > 0$ が存在して、

$$\mathrm{index}\,(-\Delta - V(x)) \leqq C_\varepsilon \|V\|_{1+\varepsilon}^{1+\varepsilon} \qquad (V(x) \in L^{1+\varepsilon}(\Omega))$$

補題 3 (i) は [5] に示されている。この証明を少し修正すれば (ii) を示すことができる。命題 2 の証明に戻ろう。$N \geqq 3$ の場合を示そう。$N = 2$ のときも同様にして示すことができる。

補題 2 (ii) より $\langle K'(v_n), v_n \rangle = 0$ すなわち、

$$\|\nabla v_n\|_2^2 = a \cdot s \cdot \|v_n\|_s^s$$

これと補題 2 (i) より

$$\bar{c}_n \geqq K(v_n) = \frac{1}{2}\|\nabla v_n\|_2^2 - a\|v_n\|_s^s = \frac{a(s-2)}{2}\|v_n\|_s^s$$

$V(x) = a \cdot s(s-1)|v_n(x)|^{s-2}$ とおいて補題 2 (iii) 及び補題 3 (i) を使うと

$$\|v_n\|_{(s-2)N/2}^{(s-2)N/2} \geq C\cdot n$$

仮定(g_2)より $\frac{(s-2)N}{2} < s$ が成り立つことに注意すれば、

$$c_n \geq \frac{a(s-2)}{2}\|v_n\|_s^s \geq C\cdot\|v_n\|_{(s-2)N/2}^s \geq C n^{2s/(s-2)N}$$

以上で命題2の証明が終り、従って定理1の証明が終った。

§3 定理2の証明の概略

$I(u) \equiv \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \int_\Omega G(u)dx - (f, u)$ とおいて、Iの critical values の列 $\{c_k\}$ で、$\lim_{k\to\infty} c_k = \infty$ となるものが存在することを示せばよい。定理1と同様にして$I(u)$に対しc_kを定義しても一般にそれは critical value にならない。$I_0(u)$は偶汎関数であるが$I(u)$はそうでないからである。Rabinowitz [8] と同様の手法によって定理2を示す。命題1と同様に証明を行えば、$I(u)$も(W.P.S.)条件を満たしていることがわかる。$I(u)$の代わりにこれを少し修正した汎関数$J(u)$を考える。

定義3 $\chi \in C^\infty(R; R)$ を

$$\chi(\tau) = \begin{cases} 1 & (\tau \leq 1) \\ 0 & (\tau \geq 2) \end{cases}, \quad 0 \leq \chi(\tau) \leq 1, \quad -2 \leq \chi'(\tau) \leq 0 \quad (\tau \in R)$$

をみたす関数とする。

$u \in H_0^1(\Omega)$ に対して

$$\Phi(u) = a(I(u)^2 + 1)^{1/2}$$

$$\Psi(u) = \chi\left(\frac{\|u\|_\mu^\mu}{\Phi(u)}\right)$$

$$J(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \int_\Omega G(u)\,dx - \Phi(u)(f, u)$$

と定義する。aは正定数としてあとできめる。

[8, Lemmas 1.18, 1.29] と同じようにして次の補題が示せる.

<u>補題4</u>　$\Phi(u)$の定義に表れる$a>0$を十分大きく決めると、次の(i),(ii)が成り立つ。

(i) 次の不等式をみたす$\alpha = \alpha(\|f\|_{\frac{\mu}{\mu-1}}) > 0$が存在する。

$$|J(u) - J(-u)| \leqq \alpha(|J(u)|^{\frac{1}{\mu}} + 1) \qquad u \in H_0^1(\Omega)$$

(ii) ある$M_0 = M_0(\|f\|_{\frac{\mu}{\mu-1}}) > 0$が存在して次が成り立つ。
$J(u) \geqq M_0$ かつ $\|J'(u)\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leqq 1$ をみたす$u \in H_0^1(\Omega)$に対しては、$I(u) = J(u)$が成り立つ。

この補題を使えば次の系は明らかである。

<u>系1</u> (i) $J(u)$は $\{u \in H_0^1(\Omega) : J(u) \geqq M_0\}$ において(W.P.S.)条件を満足する。

(ii) $J'(u) = 0$ かつ $J(u) \geqq M_0$ をみたす$u \in H_0^1(\Omega)$に対して
$I(u) = J(u)$, $I'(u) = 0$ が成り立つ。

従って$J(u)$の十分大きな critical value を探せばよい。

$I_0(u)$ のときと同様に次の条件を満たす $0<R_1<R_2<\cdots\nearrow\infty$ がとれる。

$$J(u)<0 \qquad (u\in E_n,\ \|u\|_{H_0^1}\geqq R_n)$$

D_n, Γ_n を前と同様に定義する。

$$b_n=\inf_{\gamma\in\Gamma_n}\max_{u\in D_n} J(\gamma(u)) \quad \text{とおく。}$$

一般に b_n は critical value ではないが、補題4(i)を使い、[8, Lemmas 1.57, 1.64] と同様の証明によって次の命題が得られる。

<u>命題3</u> $\displaystyle\limsup_{n\to\infty}\frac{b_n}{n^{\mu/(\mu-1)}}=\infty$

が成り立てば $J(u)$ の critical values の列 $\{c_k\}$ で、$\displaystyle\lim_{k\to\infty}c_k=\infty$ となるものが存在する。

命題3より定理2を示すには、

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{b_n}{n^{\mu/(\mu-1)}}=\infty$$

を示せばよい。次のようにして示す。

$$\begin{aligned} J(u) &\geqq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2-\int_\Omega G(u)\,dx-\|f\|_{\frac{\mu}{\mu-1}}\|u\|_\mu \\ &\geqq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2-a'\|u\|_s^s-b' \end{aligned}$$

この不等式を使って命題2と同様の証明を行えば、$\{b_n\}$ に対して命題2(i),(ii)と同じ評価式が得られる。この評価式と、仮定(g_3)を考えれば、

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{b_n}{n^{\mu/(\mu-1)}} = \infty$$

が得られる。これで定理2の証明が終った。

References

1. A. Ambrosetti and P. H. Rabinowitz, Dual variational methods in critical point theory and applications, J. Funct. Anal. 14 (1973), 349–381.

2. A. Bahri and H. Berestycki, A perturbation method in critical point theory and applications, Trans. Amer. Math. Soc. 267 (1981), 1–32.

3. A. Bahri and P.-L. Lions, Remarques sur la théorie variationnelle des points critiques et applications, C. R. Acad. Sc. Paris 301 (1985), 145–147.

4. P. Bartolo, V. Benci and D. Fortunato, Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with "strong resonance" at infinity, Nonlinear Analysis 7 (1983), 981–1012.

5. P. Li and S.-T. Yau, On the Schrödinger equation and the eigenvalue problem, Comm. Math. Phys. 88 (1983), 309–318.

6. R. Pisani and M. Tucci, Existence of infinitely many periodic solutions for a perturbed Hamiltonian system, Nonlinear Analysis, 8 (1984), 873–891.

7. P. H. Rabinowitz, Variational methods for nonlinear elliptic eigenvalue problems, Indiana Univ. Math. J. 23 (1974), 729–754.

8. P. H. Rabinowitz, Multiple critical points of perturbed symmetric functionals, Trans. Amer. Math. Soc. 272 (1982), 753–769.

9. P. H. Rabinowitz, "Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations" CBMS Regional Conference Series in Math. 65, Amer. Math. Soc. 1984.

10. M. Struwe, Infinitely many critical points for functionals which are not even and applications to superlinear boundary value problems, Manuscripta Math. 32 (1980), 335–364

11. K. Tanaka, Morse indices at critical points obtained through the symmetric mountain pass theorem with applications to superlinear boundary value problems, (in preparation)