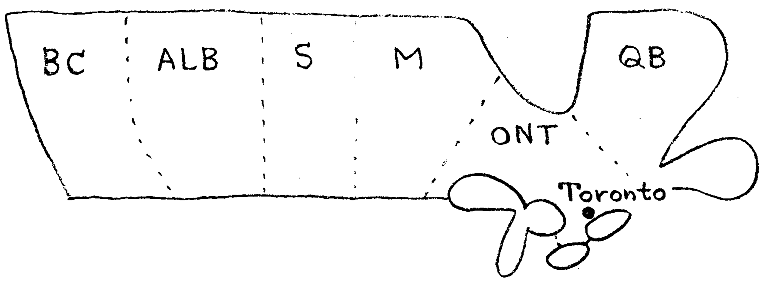
数理解析研究所講究録
第 649 巻 1988 年 38-52

Set-theoretic Topology in North America

防衛大　加藤昭男（Akio KATO）

1986年8月から87年8月までの1年間、カナダのトロント市にあるトロント大学及びヨーク大学に滞在することができたので、このトロントを中心とする set-theoretic topology の現状を報告したい。トロントは、USA とカナダの国境沿いの、五大湖の1つであるオンタリオ湖の北岸に位置するカナダ最大の国際都市です。その町の中心にあるのがトロント大学で 1851年創立という歴史と最高の学問的水準を誇っています。同じトロント市内にあるヨーク大学は、トロントの分校として出発し戦後独立した新しい大学であり、この両大学の研究交流は非常に活発です。



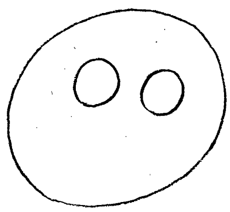
"Topological" map of Canada

現在、公理的集合論が最も active な所は Israel と Toronto です。Toronto は、F. D. Tall 教授の強力な統率力のもと、非常に優秀な若手の人材が集っています。トロント・ヨーク大の常駐主力メンバーは、Tall 氏の他、W. Weiss, A. Dow, S. Watson, J. Steprāns 等がおりますが、この4人はいずれも Tall 氏の御弟子さんです。"Toronto" は、インディアン語で「人々が集まる所」という意味ですが、その通りに世界各地の数学者が訪れています。私の滞在中だけでも Todorčević, Roitman, van Douwen, Magidor, Just, Simon 等が来ました。また、'87年8月にヨーク大で Set Theory & its Applications Conference at York が開催され、おかげさまで無数の set-theorists にまみえることができました。これらの人々から得られた情報を十二分に伝えることは不可能ですが、私なりの立場から理解した研究方針を、未解決問題を中心に紹介したいと思います。

$\boxed{1}$ (Magidor, Tall) "<u>If</u> "<u>small</u>" <u>has</u> <u>a</u> <u>certain</u> <u>property</u>, <u>does</u> <u>the</u> <u>structure</u> <u>have</u> <u>the</u> <u>property</u>?"

これは、どんな数学的構造に対しても考えられる問題です。小さな部分が或る性質を持てば全体もその性質をもつか？ということで、次のような例があります。個々の場合場合に

より "small" の解釈が変化するのは当然でしょう。



Problem 1. (Pontrjagin) Abelian group G において、その任意の subgroup of smaller card. が free ならば、G 自身も free になるか？

Problem 2. Collection C of sets, $|C| = \kappa$, が与えられたとき、その任意の subcollection of card. $< \kappa$ が、transversal (i.e., 1-1 choice function) をもつならば、C 自身も transversal をもつか？

これらの例では簡単な反例がある。たとえば、abelian gp $\mathbb{Z}^{\omega}$ は free ではないが、その任意の countable subgp は free であるから連続体仮説(CH)のもとで、$\mathbb{Z}^{\omega}$ は Prob. 1 の反例になっている。なお、CH を使わないで card. ω_1 の subgp of $\mathbb{Z}^{\omega_1}$ で not free なものを作ることもできる。Prob. 2 については、$C = \{\alpha : \alpha < \omega_1\}$ が反例になっていることは Pressing-Down Lemma からわかる。しかし、全体の card. κ が singular の場合はどうか？と考えると非常に set-theoretic で難しくなってくる。

さて、Topology においては我々の関心は次のようになる。

If all "small" subspaces have a property, does the whole space have the property?

いま、discrete space κ に one pt を add して co-$<\kappa$ topology を入れれば、たいていの場合 trivial counterexample になる。従って

次の Prob. 3 の場合、全空間は 1-st countable と仮定している。"normal" を仮定しているのは normal Moore space problem との関連であろうと思われる。

<u>Problem</u> 3.　1-st countable normal space X において、その任意の subset $\leq \aleph_1$ が metrizable (paracompact) ならば、X は metrizable (paracompact) か？

$V=L$ のもとで $\forall \alpha < \omega_2$ $E \cap \alpha$ not stat. となる stationary subset $E \subseteq \omega_2 \cap CF(\omega)$ の存在が知られている (Jensen)。$CF(\omega)$ は ordinals of countable cofinality 全体である。従って interval topology を考えれば、space E は反例になっている (E は 1-st countable, collec. normal, not paracompact である)。かゝる $E \subseteq \omega_2 \cap CF(\omega)$ の存在は Mahlo cardinal と呼ばれる Large card. の存在と equiconsis. であることが知られている。一方、Dow-Tall-Weiss は、supercompact 個の Cohen reals を add した model において

1-st countable + "subspaces $< \mathfrak{c}$ metriz." $\Rightarrow$ metriz.

となることを示したが、この場合、連続体の card. $\mathfrak{c}$ が非常に大きい。そこで、$\mathfrak{c} = \aleph_2$ のときが問題となる。すなわち

<u>Open Question</u>:　Con (YES to Prob. 3 + $\mathfrak{c} = \aleph_2$) ?

こゝで一般に Con(Φ) は「命題 Φ が consistent with ZFC である」という意味である。

$\boxed{2}$ (Tall) "Which topological properties are preserved by what kind of forcing over which models ?"

これは、forcing を general topology に応用する上で最も知りたいことであるが、未だ十分に解明されていない。Model $\mathfrak{M}$ における topological space (X, τ) に対し、base τ が extension $\mathfrak{M}[G]$ において generate する topology を $\tilde{\tau}$ とする。このとき、

$\mathfrak{M} \models$ "(X, τ) has a top. prop. Φ" $\Rightarrow$ $\mathfrak{M}[G] \models$ "$(X, \tilde{\tau})$ has Φ"

が、どんな Φ, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}[G]$ に対して成立するか？というのが、上の質問の意味である。たとえば、"metrizable" は明らかに保存されるが、Dow-Tall-Weiss は、"non-metrizable" も Cohen real forcing の場合には保存されることを示した。すなわち $(X, \tilde{\tau})$ が metrizable ならば (X, τ) が metrizable である、というのであるが、extension においては open sets が増えているのであるからこれは trivial ではない。

$\boxed{3}$ "Find concrete spaces in general spaces !"

Gruenhage は、$MA(\omega_1)$ を更に強力にした Proper Forcing Axiom (PFA) のもとで次の結果を得ている。Space X は、その topology を弱めれば metric topology が得られ、各点がその metric top. に関して closed な sets から成る nbd base を有するとき、cometrizable といわれる。

定理（PFA）Xが cometrizable ならば、次のいずれかのケースが起る：(1) Xは、uncountable discrete space を含む。or (2) Xは、uncountable Sorgenfrey line を含む。or (3) Xは cosmic (i.e. continuous image of a sep. metric space) である。

この証明においては、PFAのもとで real line $\mathbb{R}$ の中の $\aleph_1$-dense subsets はすべて homeomorphic である、という結果 (Baumgartner) が利用される。この定理に関連して Gruenhage は次の問題を投げかけている。

Open Question: Con (Every uncountable space contains either (1) unc. discrete space or (2) unc. subspace of Sorgenfrey line, or (3) unc. subspace of the real line $\mathbb{R}$) ?

この答えが肯定的ならば美しい結果になると思う。もし反例があるならば、その例を第4番目の concrete space として新たに open question を掲げることができるので、遂には何らかの肯定的結果が得られるであろう。General Topology に於ても有限群の分類定理のような定理を期待するのは楽しいものである。

さて、Balogh, Nyikos, Fremlin らは、次の問題と取組んでいる。

Problem. 1-st countable, countably compact T_3, non-compact space は copy of ω_1 (with interval topology) を含むか？

Ostazewski's ♣ のもとでは、2-1 perfect preimage of ω_1（これは 1-st countable, cc, not cpt）で copy of ω_1 を含まない例を作ること

ができることが知られている。一方．Martin's Maximum (MM) のもとでは．「任意の 2-1 perfect preimage は．copy of ω_1 を含む」ことがわかっている (Fremlin)。Nyikos の次の結果も興しろい。

<u>定理</u>．(PFA) 任意の locally compact，1-st countable space of card. $\leq \omega_1$ は．countable union of closed discrete subspaces（従って Moore space）になるか．copy of ω_1 を含むか．のいずれかである。

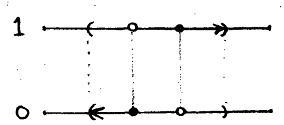
ここで MM，PFA，MA の関係を述べておくと

$$\mathrm{MM} \Rightarrow \mathrm{PFA} + \mathfrak{c} = \omega_2 \quad ; \quad \mathrm{PFA} \Rightarrow \mathrm{MA}(\omega_1).$$

次の Fremlin の問いかけも興味をそゝる。

<u>Problem</u>． "Are there <u>many</u> examples of compact perfectly normal, non-metrizable spaces in ZFC ?"

実際．かゝる例で我々がすぐに思いつくのは．"double arrow" space (i.e. $[0,1] \times \{0,1\}$ with lexicographic order) ぐらいであろう。



これは Sorgenfrey line を 2 つもってきて compact にしたものである。そこで Fremlin は．上の問題を次のように具体化した。

In ZFC, is there a compact perfectly normal, non-metrizable space which is not the cont. image of a closed subspace of the product of $I = [0,1]$ and the double arrow space ?

これに対し最近 Watson が YES と答えたがその例は．ω と Cantor set variant of the double arrow space との union であり．

"double arrow" から脱け出た example ではないので、まだまだ上の Problem は本質的に解決されていない、と思う。「In ZFC」としてあるのは、Suslin line の segment は、compact perf. normal (i.e. compact, hered. Lindelöf), non-metriz. だからである。

4 "Might-be Empty Classes"

或る class of topological spaces を新しく定義したら empty だった、という悲喜劇はよく繰返され、パーティ好きのアメリカ人には格好の話のタネであるが、empty ならばそれはそれで立派な定理になり得る場合もある。A. Dow は最近次の結果を得た。ZFC における absolute な結果であることに注目されたい。証明は model theoretic な集合論の手法を用いていた。

定理 (ZFC) Compact T_2 space は、その任意の subspace of card. $\leq \aleph_1$ が metrizable ならば、metrizable である。

この定理は $\boxed{1}$ の Problem 3 と深く関連した結果である(定理の仮定から 1-st countable がいえる)。

次に consistent の意味で empty になり得るかもしれない class について考察する。

Problem 1. Perfectly normal, countably compact space は常に compact になり得るか?

これは別の言い方をすれば、perf. normal, cc, non-cpt spaces

から成る class は、empty になり得るか？ということである。この class を PCC と表わしておく。Ostaszewski のよく知られた example は、PCC に属すが、これは ◇ を仮定して構成されている。MA+¬CH のもとでは PCC = ϕ である（Weiss）。◇ ⇨ CH だから CH の場合が問題となる。…

<u>Open Question</u>：（Nyikos） Is there a model of <u>CH</u> where PCC = ϕ ?
これを解決した者には Nyikos が \$100 あげるそうである。ドルが安くならないうちに解決した方がよい。

<u>Problem</u> 2. Perfectly normal space of non-measurable card は、realcompact になるか？

CC かつ realcompact ならば compact であるからこの問題は上の Prob. 1 と関連する。Perf. normal spaces of non-meas. card. で not realcpt なもの全体の class を PNR と表わすと、"non-meas." なる条件を無視すれば PCC ⊆ PNR である。

<u>Open Question</u>：（Blair, Woods） Does MA+¬CH imply PNR = ϕ ?

この question は、私が Manitoba 大学を訪問したとき G. Woods 教授から伺った。Manitoba 州は土地が想像を絶するくらい平らである。時速 110 km で車を飛ばしても余りに平らで景色も変らないので眠くなってくる。Manitoba 大学の正門に校内に入る時のスピード制限が表示してあったがそれが 80 km/h だったことを覚えている。

Problem 3. (Moore-Mrowka) Compact T_2 space が countable tightness をもつならば, sequential か?

Ostaszewski's space の one pt compactification は この反例になるが

Z. Balogh は PFA + $\mathfrak{c} = \omega_2$ を仮定すれば YES であることを示した。実は, PFA の無矛盾性には large cardinal が必要であるが, Con (YES to Prob. 3) を示すには large card. は不要であることが最近 A. Dow により示された。

$\boxed{5}$ (Juhász-Weiss) "Omitting Cardinals"

Space X, card. $\kappa < |X|$ に対し, X の closed subset で card. κ のものが存在しないとき X omits the card. κ という。たとえば $\beta\omega$ は $\omega \leq \kappa < 2^{\mathfrak{c}}$ なるすべての card. κ を omit する。

Open Question: (Juhász) "Is there, in ZFC, a T_3 space omitting the card. ω_2 ?"

scattered spaces を考えると一般連続体仮説 GCH のもとでは scattered space はどんな regular card.s も omit しないことがわかっている。一方, W. Weiss は最近次の結果を得た。

Con ($\exists$ Lindelöf scattered space of card. $2^{\omega_1} > \mathfrak{c} = \omega_2$ which has no closed nor Lindelöf subset of card. $\mathfrak{c}$)

まず ω_3 個の Cohen subsets of ω_1 を add し, 次に ω_2 個の Cohen reals を add した model において この consis. がいえる。

Lindelöf space of card. $> \mathfrak{c}$ で、Lindelöf subspace of size $\mathfrak{c}$ を含まない、というのは topological にも非常におもしろい。この model ではもちろん GCH は成立していない。

Open Question:（Weiss） 次の命題は consis. with GCH か？

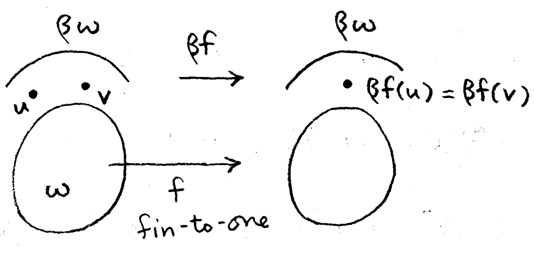
"$\exists$ Lindelöf space of card. $2^{\omega_1} = \omega_2$ which contains no Lindelöf subspace of size $\mathfrak{c} = \omega_1$"

$\boxed{6}$ "New Principles : NCF & CSP"

新しい原理をひっさげて現れた２人（A. Blass, W. Just）の仕事を紹介する。Blass は次の主張を the principle of Near Coherence of Filters（NCF）と呼んでいる：

"Every two non-principal ultrafilters on ω have a common image via a finite-to-one function."

すなわち $\forall u, v \in \omega^* \ \exists f : \omega \to \omega$ fin.-to-one s.t. $\beta f(u) = \beta f(v)$ ということである。 MA $\Rightarrow \neg$ NCF つまり NCF は MA と矛盾する。Con（NCF）は、A.W. Miller が発見した rational perfect set forcing を用いて示される：



定理（Blass & Shelah） $\mathfrak{M} \models$ CH, Iterate rational perfect set forcing $\aleph_2$ times with countable supports, then

$$\mathfrak{M}[G] \models \text{NCF}$$

この単純明解な原理 NCF は、驚くべきことに数学の色々な分野に見い出されている：

<u>定理</u>　NCF は次のいずれとも equiv. である。

(1) $\forall u \in \omega^* \ \exists_{\text{fin.-to-one}} f : \omega \to \omega$. $\beta f(u)$ is generated by $< \underline{d}$ sets

(2) The Stone-Čech remainder of a closed half line $H = [0, \infty)$ has only one composant.

(3) The ideal of compact operators on Hilbert space is not the sum of two smaller ideals.

(4) The partial ordering of slenderness classes of abelian groups, minus its top element, has a top element.

ここで (1) に於る $\underline{d}$ は dominant number，すなわち，dominant family D in $({}^{\omega}\omega, <)$ の minimal card. である。General topologists の興味を引くのは indecomposable continuum $H^* = \beta H \setminus H$ の構造を示す (2) の結果だろう。

ポーランドの若い数学者 W. Just（ユスト）は $P(\omega)/I$ （I は ideal）の構造に興味をもっている。1987 年 6 月頃 Toronto 大学に Tall 氏から招かれ、少なくとも 1 年間は滞在する，といっていた。次の 2 つの ideal I_1, I_{log} を考えるとき $P(\omega)/I_1$ と $P(\omega)/I_2$ の違いを何をもってとらえるか、というのが彼の出発点である。

$I_1 = \{ A \subset \omega : \lim_{n\to\infty} |A \cap n|/n = 0 \}$　ideal of density 0

$I_{log} = \{ A \subset \omega : \lim_{n\to\infty} (\sum_{m \in A\cap n} 1/m+1)/\log n = 0 \}$ ideal of logarithmic density 0

それには $\mathcal{P}(\omega)$ を Cantor set 2^ω と identify し，その時 ideal がどんな subset になるかに注目する。そうすれば $\mathcal{P}(\omega)$ に metric topology が入るからそれを利用して精妙な議論が展開できる，というわけである。次の主張を Continuous Selection Property (CSP) という："For every $F: \mathcal{P}(\omega) \to \mathcal{P}(\omega)$ preserving intersections mod. Fin. there exist an infinite subset $A \subseteq \omega$ & a continuous $F^*: \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(\omega)$ such that $F^* = F \restriction \mathcal{P}(A)$ mod. Fin."

ここでの F^* の連続性は $\mathcal{P}(A)$，$\mathcal{P}(\omega)$ を Cantor space 2^A，2^ω とみてのそれである。

定理（Just）　CH $\Rightarrow$ $\mathcal{P}(\omega)/I_1 \approx \mathcal{P}(\omega)/I_{\log}$

CSP $\Rightarrow$ $\mathcal{P}(\omega)/I_1 \not\approx \mathcal{P}(\omega)/I_{\log}$

この他，次のような topological におもしろい結果を出している。

CSP $\Rightarrow$「ω^* から $\omega^* \times \omega^*$ の上への continuous map は存在しない」

LCSP $\Rightarrow$「ω^* を，ω^* の中に nowhere dense P-set として embed することはできない。」

LCSP は local CSP の意味で LCSP $\Rightarrow$ CSP である。

Con (LCSP) は Just の Doctor 論文で示されている。Just は Analysis が好きだ，と言っていた。

以上でこの報告を了させていただくが，全体を振返って感ずることは，各数学者の強烈な個性が花開いていることである。

文献

各文献の末尾の番号は、本稿の topics との関連を示す。

1) A. Dow, F. Tall, W. Weiss "New Proofs of the consistency of the normal Moore space conjecture" (preprint) [1] [2]

2) F. Tall "Topological Applications of Super compact & huge cardinals" Proc 6th Prague Symp. 1986 [1]

3) F. Tall "Topological Applications of Generic Huge Embeddings" (preprint) [1]

4) Hajnal, Juhász "On spaces in which every small subspace is metrizable" Bull. Acad. Polo. Sci. 24 (1976) 727-731 [1]

5) Z. Balogh "Locally nice spaces under Martin's Axiom" Comment. Math. Univ. Carolinae 24 (1983) 63-87 [3]

6) P. Nyikos "Progress on countably compact spaces" Proc. 6th Prague Symp. 1986 [3] [4]

7) A. Ostaszewski "On countably compact perfectly normal spaces" J. London Math. Soc 14 (1976) 501-516 [3] [4]

8) A. Arkhangel'skii "Structure & Classification of Top. spaces & cardinal invariants" Russ. Math. Surveys 33 No.6 (1978) 33-96 [4]

9) I. Juhász "Cardinal Functions II" Handbook of Set-theoretic Topology 63~109 [5]

10) Juhász, W. Weiss "Omitting the Cardinality of the continuum in scattered spaces" (preprint) [5]

11) A. Blass "Near Coherence of Filters I: Cofinal equivalence of Models of Arithmetic" Notre Dame J. of. Formal Logic 27 (1986) 579-591 [6]

12) Blass "Near Coherence of Filters II: Applications to Operator ideals, the Stone-Čech remainder of a Half line, order ideals of sequences, and Slenderness of Groups" Trans. AMS 300 (1987) 557-582 [6]

13) Blass & Shelah "Near Coherence of Filters III: A simplified consistency Proof" (preprint) [6]

14) A. Miller "Rational Perfect set Forcing" Contemporary Math. 31 (1984) 143-159 [6]

15) J. Mioduszewski "On composants of $\beta R - R$" Proc. Conf. Topology & Measure, I. (Zinnowitz 1974) (1978) 257-283 $\boxed{6}$

16) W. Just & A. Krawczyk "On certain Boolean algebras $\mathcal{P}(\omega)/I$" Trans. A.M.S. 285 (1984) 411-429 $\boxed{6}$

17) W. Just "The space $(\omega^*)^{n+1}$ is not always a cont. image of $(\omega^*)^n$." (preprint) $\boxed{6}$

18) W. Just "Triviality conditions for homomorphisms of Boolean algebras $\mathcal{P}(\omega)/I \to \mathcal{P}(\omega)/J$" $\boxed{6}$

∞) 1987年8月 York University で開催された Set Theory & its Applications Conference の Proceedings が近々刊行される予定。それには、ここで紹介した Magidor, Tall, Nyikos, Blass, Just らの研究が掲載されると思いますので参照されたい。また、1987年3月 University of Alabama (USA) で開催された第21回 Spring Topology Conference の Proceedings も刊行されると思いますので合せて参照して下さい。