数理解析研究所講究録
第 649 巻 1988 年 133-139

Radon-Nikodým Compact Spaces

岡山大.理　吉岡巖　(Iwao Yoshioka)

§0. 序.

関数空間あるいは一般的に Banach space の compact 性に関係する研究の過程で, Eberlein-compact, Talagrand-compact, Gul'ko-Compact, あるいは Corson-Compact などの概念が得られてきた。各々定義については[3]を参照されたい。ここでは, これ等の概念に関連して, Isaac Namioka 氏の講議録[2]で述べられている Radon-Nikodým compact (歴史については, この講議録の最後の Notes and comments)と関連する概念と, それに関連する彼の問題を紹介することにした。

§1. Banach space の Radon-Nikodým property.

Banach space の Radon-Nikodým property は, 最初 Banach space-valued な measure をあつかう概念として与えられたが, 後に多くの人達によって, 次のような

幾何学的な同値条件が得られた。([1]を参照).

定義(1.1) Banach space E の subset A に於いて、任意な $\varepsilon>0$ に対して、$x\in A$ が取れて、$x \notin \overline{co}(A\setminus B_\varepsilon(x))$ $(=$ closed convex hull of $A\setminus B_\varepsilon(x))$ であるとき、A を dentable という。($B_\varepsilon(x)\equiv\{y\in E \mid \|y-x\|\leqq\varepsilon\}$)

定義(1.2) Banach space E の、bounded set が常に dentable であるとき、E は Radon-Nikodým property (=RNP) を持つ、という。

ここでは、Asplund space を幾何的な次の形で定義する。

定義(1.3) [4] Banach space E は、その dual space E^* が RNP を持つとき、Asplund space と呼ばれる。

定義(1.4) 位相空間 $(X,\mathcal{T})$ は、下の条件(*)を満足するとき、fragmented by a metric ρ on X と呼ばれる。

(*): X の各々 non-empty subset は、任意に小さい ρ-diameter の relative open set を含む。

特に、ρ が norm より得られる metric の時、$(X,\mathcal{T})$ は norm-fragmented であるという。

dual space が RNP を持つための条件を抜き出しておく。

定理(1.5) Banach space E に於いて、次の条件は同値である。

(i) E^* が RNP を持つ.

(ii) $K \subset E^*$ が w^*-compact ならば, (K, w^*) (= K with w^*-topology) は norm-fragmented である.

(iii) $F \subset E$ が separable subspace ならば, F^* もまた separable である.

(iv) $K \subset E^*$ が w^*-compact ならば, identity map

$$j : (K, w^*) \longrightarrow (K, \text{norm})$$

は, (K, w^*) のある dense G_δ-set の各点で連続である.

(v) $K \subset E^*$ が w^*-compact ならば, E の bounded, countable set A に対して, K は p_A-separable である.

$$\left(p_A(x^*) \equiv \sup_{x \in A} |x^*(x)| \quad \text{for each } x^* \in E^* \right).$$

(vi) $K \subset E^*$ が w^*-compact ならば, Asplund space F と, bounded linear map $T : E \longrightarrow F$ が存在して, $T(E)$ は F で dense で, $D \subset T^*(U)$ である.

($U \subset F^*$: unit ball of F^* ; D: w^*-closed absolutely convex hull of K)

<u>定理(1.6)</u> K が Banach space E の weakly compact ならば, (K, w) は norm-fragmented である.

<u>例(1.7)</u> non-empty set Γ に対して, $l_1(\Gamma) \cong c_0(\Gamma)^*$: (linearly isometric) より, $l_1(\Gamma)$ は RNP を持つ。

§2. Radon-Nikodým Compact Spaces.

定義(2.1) compact Hausdorff space は,(ある Banach space の) RNP を持つ dual space の w^*-compact subset に同相のとき, Radon-Nikodým Compact (= RN-compact) という.

定理(1.6) と, 後に述べる定理(2.5)によって,

定理(2.2) Eberlein compact spaces は RN-compact spaces である。

この定理の逆は, 次の例によって成立しない。

例(2.3) 各 ordinal ξ について, ordinal space $[0,\xi]$ は scattered であるから, 続く定理(2.4)によって, $[0,\xi]$ は RN-compact である。しかし, $[0,\omega_1]$ は open F_σ-sets より成る point-countable separating family を持ち得ないことによって, Eberlein compact でない。

問題(1) RN-compact の Hausdorff image は RN-compact であるか?

問題(2) RN-compact の Hausdorff quotient image は RN-compact であるか?

問題(3) RN-compact が Eberlein compact になるための条件は何であるか?

scattered Corson compact は Eberlein compact であることは, Alster (Fund. Math. 104) によって, 知られて

いる。compact Hausdorff space X は，$(C(X)^*, w^*)$ に，自然に embedding できるから，次の定理によって，scattered compact Hausdorff space は RN-compact である。

定理(2.4) compact Hausdorff space X について，次は同値である。

(i) X が scattered.

(ii) $C(X)^*$ が RNP を持つ。

定理(2.5) compact Hausdorff space X について，次は同値である。

(i) X : RN-compact

(ii) X が，(ある Banach space の) dual space の norm-fragmented, w^*-compact subset に同相である。

問題(4) fragmented by a metric であるが，RN-compact でないような compact Hausdorff space を見つけよ。

以下，RN-compact の性質について述べる。

定理(2.6) RN-compact に関して，次の命題が成立する。

(i) RN-compact spaces の closed subspaces は RN-compact spaces.

(ii) RN-compact spaces の countable product spaces は RN-compact.

(iii) RN-compact space は metrizable dense G_δ-set

を含む.

(iv) RN-compact spaces は sequentially compact である.

(v) hereditarily Lindelöf RN-compact spaces は metrizable である.

double arrow space は, compact, sequentially compact, Hausdorff, separable and hereditarily Lindelöf であるが, RN-compact でない例になっている.

最後に

問題(5) (ある Banach space の) dual space の w^*-compact subset K が RN-compact ならば, その w^*-closed convex hull $\overline{co}(K)$ について, $(\overline{co}(K), w^*)$ は RN-compact になるか?

文献

[1] R. Bourgin : Geometric Aspects of convex sets with the Radon-Nikodým property, Lecture notes in Math. 993. Springer-Ver. Berlin (1983)

[2] I. Namioka : Eberlein and Radon-Nikodým compact spaces, Lecture note at Univ. Coll. London. (1985)

[3] S. Negrepontis : Banach spaces and Topology,

Handbook of set-theoretic top. (1984); edited by K. Kunen and J.E. Vaughan

[4] C. Stegall: The duality between Asplund spaces and spaces with the RNP, Israel Jour. of Math. 29 (1978)