数理解析研究所講究録
第650巻 1988年 100-116

2次元戸田格子方程式の線形Bäcklund変換の解

横国大・工 湯浅 富久子 (Fukuko Yuasa)
瀧澤 英一 (Éi Iti Takizawa)

§1. はじめに

1つの離散変数と2つの連続変数をもつ多次元へ拡張された戸田格子方程式[1]について考える。この方程式は2次元戸田格子方程式とよばれており、既に厳密な解[2,3]も知られている。本稿では、これらの解の他にどのような解が存在し、それがどのような振舞いをするのかについて具体的に調べたことを述べる。方法としては、Bäcklund変換を用いる。Bäcklund変換を2階の線形方程式の形で表したために、解の導出やその振舞いを調べることが容易となった。

§2. 線形Bäcklund変換

1つの離散変数nと2つの連続変数x_+とx_-をもつ2次元戸田格子方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial x_+ \partial x_-} u_n = \exp[-(u_n - u_{n-1})] - \exp[-(u_{n+1} - u_n)], \quad (1)$$

は、従属変数変換

$$\exp[-(u_n - u_{n-1})] - 1 = \frac{\partial^2}{\partial x_+ \partial x_-} \log f_n \ , \quad (2)$$

によって次の双線形方程式

$$f_n(\partial_+ \partial_- f_n) - (\partial_+ f_n)(\partial_- f_n) - f_{n+1} f_{n-1} + f_n^2 = 0 \ , \quad (3)$$

$$\partial_\pm \equiv \frac{\partial}{\partial x_\pm} \ ,$$

に変換される。方程式 (3) には、円筒対称な場合にはベッセル関数で表わされる解[2)]や、直交座標の場合にはカソラチ行列式で表わされるNソリトン解[3)]が存在することが知られている。これらの解の他にどのような解が存在するのか、また得られた解の振舞はどのようなものかについて調べることが本稿の目的である。

f_{n-1}, f_n, f_{n+1}に対して次のような漸化式を考える。

$$\begin{cases} c_+ f_{n+1} = \dfrac{g_{n+1}}{g_n} [\partial_+ - \partial_+ \log g_{n+1}] f_n \ , & (4) \\[2ex] c_- f_{n-1} = \dfrac{g_n}{g_{n+1}} [\partial_- - \partial_- \log g_n] f_n \ , & (5) \end{cases}$$

ここで、g_nはx_+とx_-の関数で、$c_\pm$は任意定数とする。(4) 式と (5) 式の両立条件を考えると、f_nに対しては2階の線形方程式

$$\partial_+\partial_- f_n - (\partial_+ \log g_{n+1})(\partial_- f_n) - (\partial_- \log g_n)(\partial_+ f_n)$$
$$+ [1 + (\partial_+ \log g_{n+1})(\partial_- \log g_n)] f_n = 0 , \quad (6)$$

が、一方 g_n に対しては双線形方程式

$$g_n(\partial_+\partial_- g_n) - (\partial_+ g_n)(\partial_- g_n) + C_+C_- g_{n+1} g_{n-1} + g_n^2 = 0, \quad (7)$$

が得られる。ここで、$C_+C_- = -1$ とすると (7) 式は (3) 式と一致する。すなわち、(4), (5) 式が両立するためには g_n がまた2次元戸田格子の双線形方程式の解であることが要求される。従って (7) 式は、その係数に2次元戸田格子方程式の解を含む f_n についての2階の線形方程式となる。n 依存性は係数にのみ含まれている。1つの解 g_n を与えて線形方程式 (7) を解けば別の解 f_n を求めることができるので、(7) 式は線形方程式で表わされたBäcklund変換であるといえる。我々はこの線形方程式を線形Bäcklund変換とよんでいる。このようにBäcklund変換を線形方程式で表した場合には、解の導出や解の特異点での振舞を調べることが容易になるという利点がある。一方、漸化式 (4), (5) は、Hirota の双線形Bäcklund変換であるといえる。

この線形Bäcklund変換で、Nakamura のベッセル関数で表わされる解[2)]が、

$$1 \longrightarrow J_n(\rho) \longrightarrow 1.0 + \epsilon^2 \int^{\rho} J_n J_{n+1} d\rho$$
$$= 1.0 + \epsilon^2 \sum_{m=n+1}^{\infty} J_m^2(\rho) \quad , \qquad (8)$$

$\rho = \sqrt{x_+^2 + x_-^2}$,　ϵは任意定数 ，J_nはベッセル関数

のようにつくられることは文献4で示した。また、カソラチ行列式で表わされるNソリトン解についても漸化式(4),(5)(双線形Bäcklund変換)を使って(N-1)ソリトン解からNソリトン解が導出されることを示した。[5]

次節では、これらの既知の解からつくられる解はどのような解であるのかを線形Bäcklund変換(7)を解きすすめて調べていく。

§3. 線形Bäcklund変換の解法

本節では2階の偏微分方程式(7)を実際に解きすすめていく方法について述べる。$x_+ = 0$と$x_- = 0$での境界条件を与えて逐次近似法で解くことについては文献6でその方法を示した。ここでは、座標変換を行い円筒対称な場合について解くことを詳しく説明する。

いま、未知の解f_nと既知の解g_nに対して次のような仮定をおく。

$$\begin{cases} f_n = e^{i\xi_n(\phi)} \cdot {}_k f_n(\rho) , & (9) \\ g_n = e^{i\zeta_n(\phi)} \cdot {}_k g_n(\rho) , & (10) \end{cases}$$

ただし

$$\begin{cases} \xi_n(\phi) = (\alpha n + \beta)\phi , & (11) \\ \zeta_n(\phi) = (\gamma n + \delta)\phi , & (12) \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{x_+^2 + x_-^2} , \quad \phi = \tan^{-1} \frac{x_-}{x_+}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は任意定数

とする。(9) ～ (12) から、双線形方程式 (3) は

$${}_k f_n \left(\partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho}\partial_\rho\right) {}_k f_n - (\partial_\rho\, {}_k f_n)^2 - {}_k f_{n+1}\, {}_k f_{n-1} + {}_k f_n^2 = 0 , \quad (13)$$

$$\partial_\rho \equiv \frac{\partial}{\partial \rho} ,$$

となり、$C_+ = -1$, $C_- = 1$ とすると漸化式 (4), (5) は

$$\begin{cases} {}_k f_{n+1} = -\dfrac{{}_k g_{n+1}}{{}_k g_n} \left[\partial_\rho - \dfrac{b_n}{\rho} - \partial_\rho \log {}_k g_{n+1}\right] {}_k f_n , & (14) \\ {}_k f_{n-1} = \dfrac{{}_k g_n}{{}_k g_{n+1}} \left[\partial_\rho - \dfrac{a_n}{\rho} - \partial_\rho \log {}_k g_n\right] {}_k f_n , & (15) \end{cases}$$

ただし

$$a_n = -n - \beta + \delta , \quad (16)$$

$$b_n = n + \beta - \gamma - \delta , \quad (17)$$

$$\alpha = \gamma + 1 , \quad (18)$$

となる。(14),(15) 式の両立条件より ${}_kf_n$ に対する2階の常微分方程式

$$ {}_kf_n'' + {}_kP_n \cdot {}_kf_n' + {}_kQ_n \cdot {}_kf_n = 0 \quad , \qquad (19) $$

$$ \begin{cases} {}_kP_n = \dfrac{1-(a_n+b_n)}{\rho} - \left(\dfrac{{}_kg_n'}{{}_kg_n} + \dfrac{{}_kg_{n+1}'}{{}_kg_{n+1}} \right) \quad , & (20) \\[2ex] {}_kQ_n = 1 + \left(\dfrac{a_n}{\rho} + \partial_\rho \log {}_kg_n \right)\left(\dfrac{b_n}{\rho} + \partial_\rho \log {}_kg_{n+1} \right) , & (21) \end{cases} $$

($'$ は ∂_ρ を意味する)

と、${}_kg_n$ に対する双線形方程式

$$ {}_kg_n \left(\partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho}\partial_\rho \right) {}_kg_n - \left(\partial_\rho \, {}_kg_n \right)^2 - {}_kg_{n+1} \, {}_kg_{n-1} + {}_kg_n^2 = 0 \quad , \qquad (22) $$

が得られる。前節で説明したように既知の解 ${}_kg_n$ を与えれば常微分方程式 (19) を解いて ${}_kf_n$ を求めることができる。さらに、得られた ${}_kf_n$ を ${}_{k+1}g_n$ として再び (19) の係数に代入すれば次の解 ${}_{k+1}f_n$ を求めることができる。[7] すなわち、

$$ \begin{array}{ccccc} {}_kg_n & \xrightarrow[\text{変換}]{\text{Bäcklund}} & {}_kf_n & & \\ & & \| & & \\ & & {}_{k+1}g_n & \xrightarrow[\text{変換}]{\text{Bäcklund}} & {}_{k+1}f_n \\ & & & & \| \\ & & & & {}_{k+2}g_n \longrightarrow \cdots \end{array} \quad , \qquad (23) $$

のように次々と解を求めていくことができる。ここで添字kはBäcklund変換の回数を表すものである。円筒対称な仮定(9), (10)のもとではBäcklund変換が2階の常微分方程式で表わされるのでより取り扱いがやさしくなる。

方程式(19)は係数に既知の解${}_k g_n$の他にnに依存する定数a_nやb_nも含むので、解${}_k f_n$を具体的に書きあらわすためにはこれらもその値を決めなければならない。文献4では$a_n=-n$, $b_n=n$ ($a_n+b_n=0$) ととり${}_0 g_n=1$から${}_0 f_n=J_n$を得た。さらに$a_n=-n$, $b_n=n+1$ ($a_n+b_n=1$) ととり${}_0 f_n\equiv{}_1 g_n=J_n$から${}_1 f_n=\int^\rho J_n J_{n+1}\,d\rho$ (Nakamuraの解) を得ることができた。その際a_nやb_nの決め方には特に指針を与えていなかった。以下に、a_nとb_nの決定の方法について簡単に述べる。${}_k f_n$に対する漸化式(14), (15)

$$\begin{cases} {}_k f_{n+1} = -\dfrac{{}_k g_{n+1}}{{}_k g_n}\left[\partial_\rho - \dfrac{b_n}{\rho} - \partial_\rho \log {}_k g_{n+1}\right] {}_k f_n \quad , & (14) \\ {}_k f_{n-1} = \dfrac{{}_k g_n}{{}_k g_{n+1}}\left[\partial_\rho - \dfrac{a_n}{\rho} - \partial_\rho \log {}_k g_n\right] {}_k f_n \quad , & (15) \end{cases}$$

を${}_k g_{n+1}$に対する漸化式にかきかえると

$$\begin{cases} {}_k g_{n+2} = -\dfrac{{}_k f_{n+1}}{{}_k f_n}\left[\partial_\rho - \dfrac{-a_{n+1}}{\rho} - \partial_\rho \log {}_k f_{n+1}\right] {}_k g_{n+1} \, , & (24) \end{cases}$$

$$ {}_k g_n = \frac{{}_k f_n}{{}_k f_{n+1}} \left[\partial_\rho - \frac{-b_n}{\rho} - \partial_\rho \log {}_k f_n \right] {}_k g_{n+1} \quad , \tag{25} $$

となる。(14),(15)式と(24),(25)式は

$$ a_n \longrightarrow -b_n \quad , \tag{26} $$
$$ b_n \longrightarrow -a_{n+1} \quad , \tag{27} $$

とおきかえれば同じ形となり、ちょうど${}_k f_n$と${}_k g_{n+1}$の役割が入れ替わったものと考えることができる。(24),(25)式の両立条件からは${}_k g_{n+1}$に対する線形方程式と${}_k f_n$に対する双線形方程式が得られる。このような${}_k f_n$と${}_k g_{n+1}$の間の関係を双対関係(duality relation)[8]とよんでいるが、これは(14),(15)式(あるいは(24),(25)式)が双線形なAuto Bäcklund変換であることを意味している。

線形方程式(19)を漸化式を使ってかきなおすと

$$ {}_k f_n'' + {}_k P_n \cdot {}_k f_n' - \frac{1}{{}_{k-2} f_{n+1}} \left[{}_{k-2} f_{n+1}'' + {}_k P_n \cdot {}_{k-2} f_{n+1}' \right] \cdot {}_k f_n = 0 \quad , \tag{28} $$

となる。これより${}_{k-2} f_{n+1}$が(28)式(あるいは(19)式)の2つの線形独立な解のうちの1つであることが容易にわかる。さらに、係数${}_k P_n$におけるa_n, b_nは$k=0$のときに

$a_n + b_n = A$（Aは定数）とすると

$$a_n + b_n = \begin{cases} A+1 & k = \text{odd} \\ A & k = \text{even} \end{cases}$$

となることが(26)，(27)からわかる。以上のことがらより $k=0$ のときの ${}_0g_n$ と A の値を決めれば任意の k に対して(28)は具体的に解くことができて

$$\begin{cases} {}_{k-2}f_{n+1} \quad , & (29) \\ {}_{k-2}f_{n+1}\cdot\displaystyle\int^{\rho}\frac{{}_kg_n\,{}_kg_{n+1}}{\rho^{1-(a_n+b_n)}\,{}_{k-2}f_{n+1}^{2}}\,d\rho \quad , & (30) \end{cases}$$

という2つの線形独立な解を得ることができる。

例　$a_n = -n$, $b_n = n$　すなわち $A = 0$

${}_0g_n = 1$　のとき、

$$\begin{tikzcd}
& & & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & \\
& & N_n \arrow[dl] \arrow[dr] & & J_n \arrow[dl] \arrow[dr] & & & \\
& \int^{\rho} N_n N_{n+1}\,d\rho \arrow[dl] \arrow[dr] & & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \int^{\rho} J_n J_{n+1}\,d\rho \equiv h_n \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
{} \arrow[dr] & & N_{n+1} \arrow[dl] \arrow[dr] & & J_{n+1} \arrow[dl] \arrow[dr] & & J_{n+1}\cdot\int^{\rho}\frac{h_n h_{n+1}}{\rho J_{n+1}^{2}}\,d\rho \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
& {} & & {} & & {} & & {}
\end{tikzcd}$$

のように線形Bäcklund変換を解きすすめて新しい解を得ることができる。

§4. 解の振舞[9)]

線形方程式を解いて2つの独立な解(29),(30)を得ることができた。しかし、解は(30)のように不定積分で表わされているために解がどのような振舞いをするのかについては具体的にはわからない。本節ではこの解について解析的あるいは数値的にその振舞いを調べる。解(30)は$\rho=0$または${}_{k-2}f_{n+1}$の零点において特異性をもつことが予想される。その特異性は線形方程式の性質を使って明らかにすることができる。すなわち、2階の線形方程式の解の特異点での振舞いはその方程式の係数の特異性を調べればわかる。線形方程式(28)の場合$\rho=0$, ${}_{k}g_{n}$, ${}_{k}g_{n+1}$および${}_{k-2}f_{n+1}$の零点が係数の特異点となる。係数を特異点のまわりで展開し、解をベキ級数展開したときの決定方程式を解けば特異点での振舞いがわかる。以下では、各々の場合についてその振舞いを述べるが、解析的な結果をもとに数値計算を行った結果もあわせて紹介する。

<u>$k=0$のとき</u>

$$1 \longrightarrow \begin{cases} J_n(\rho): & \text{ベッセル関数} \\ N_n(\rho): & \text{ノイマン関数} \end{cases}$$

$J_n(\rho)$ は $\rho = 0$ で

$$\begin{cases} J_n = \rho^n \cdot u_0 \\ u_0 \text{ は } \rho = 0 \text{ で 解析的な関数} \end{cases}$$

のように振舞うことが知られている。$0 \leq \rho \leq 20$, $0 \leq n \leq 4$ の場合に $J_n(\rho)$ を Fig. 1 に示す。

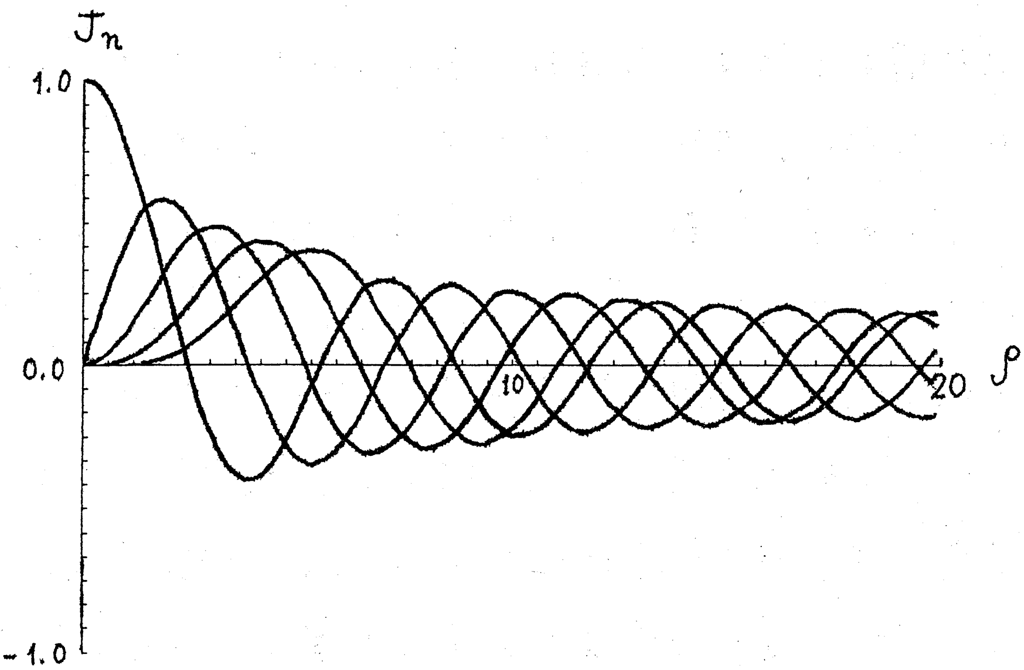

Fig. 1

<u>$k = 1$ のとき</u>　　$J_n(\rho) \longrightarrow \begin{cases} 1 \\ \int^\rho J_n J_{n+1} d\rho \equiv h_n(\rho) \end{cases}$

関数 $h_n(\rho)$ は $\rho = 0$ で

$$\begin{cases} h_n = \rho^{2n+2} \cdot u_1 \\ u_1 \text{ は } \rho = 0 \text{ で 解析的な関数} \end{cases}$$

のように振舞う。また、$\rho \to \infty$では

$$\int_0^\infty J_n J_{n+1}\, d\rho = \frac{1}{2}$$

より $\frac{1}{2}$ に収束することがわかる。$h_n(\rho)$ は $\rho = 0$ 以外には零点をもたない。$0 \leq \rho \leq 20$, $0 \leq n \leq 4$ の場合に、$f_n = 1.0 + h_n(\rho)$ （2つの解の線形結合）を Fig. 2 に示す。

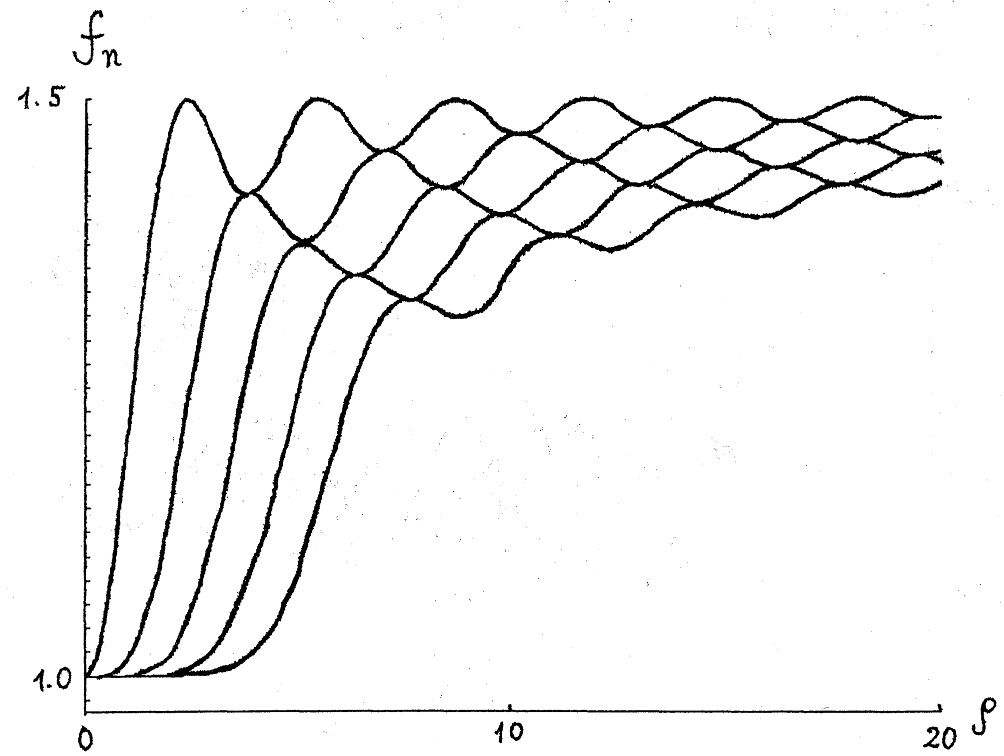

Fig. 2

<u>$k = 2$ のとき</u>

$$h_n(\rho) \longrightarrow \begin{cases} J_{n+1}(\rho) \\ J_{n+1} \cdot \int^\rho \frac{h_n h_{n+1}}{\rho J_{n+1}^2} d\rho \equiv g_n(\rho) \end{cases}$$

関数 $\varphi_n(\rho)$ は $\rho=0$ で

$$\begin{cases} \varphi_n = \rho^{3n+5} \cdot u_2 \\ u_2 \text{ は } \rho = 0 \text{ で解析的な関数} \end{cases}$$

のように振舞う。J_{n+1} の零点 $\rho=a$ ($a \neq 0$) では有限な値をもつ。$\varphi_n(\rho)$ は $\rho=0$ 以外にも零点をもつ。$0 \leq \rho \leq 20$, $0 \leq n \leq 4$ の場合に $\varphi_n(\rho)$ を Fig. 3 に示す。

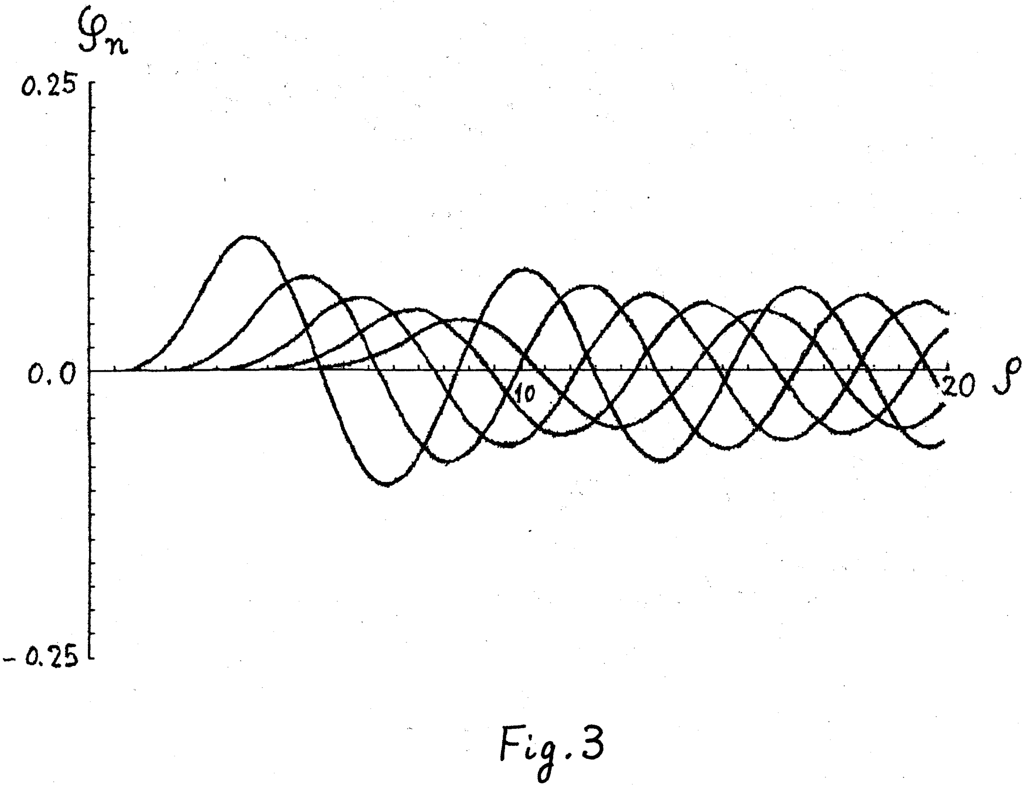

Fig. 3

<u>$k=3$ のとき</u>

$$\varphi_n(\rho) \longrightarrow \begin{cases} h_{n+1}(\rho) \\ h_{n+1} \cdot \displaystyle\int^{\rho} \frac{\varphi_n \varphi_{n+1}}{h_{n+1}^2} d\rho \end{cases}$$

$$\equiv \Psi_n(\rho)$$

関数 $\Psi_n(\rho)$ は $\rho = 0$ で

$$\begin{cases} \Psi_n = \rho^{4n+10} \cdot u_3 \\ u_3 \text{ は } \rho = 0 \text{ で解析的な関数} \end{cases}$$

のように振舞う。$\Psi_n(\rho)$ は $\rho = 0$ 以外には零点をもたない。$0 \leq \rho \leq 20$, $0 \leq n \leq 3$ の場合に $\Psi_n(\rho)$ と $f_n(\rho) = h_{n+1} + \Psi_n$ を Fig. 4 a), b) に示す。

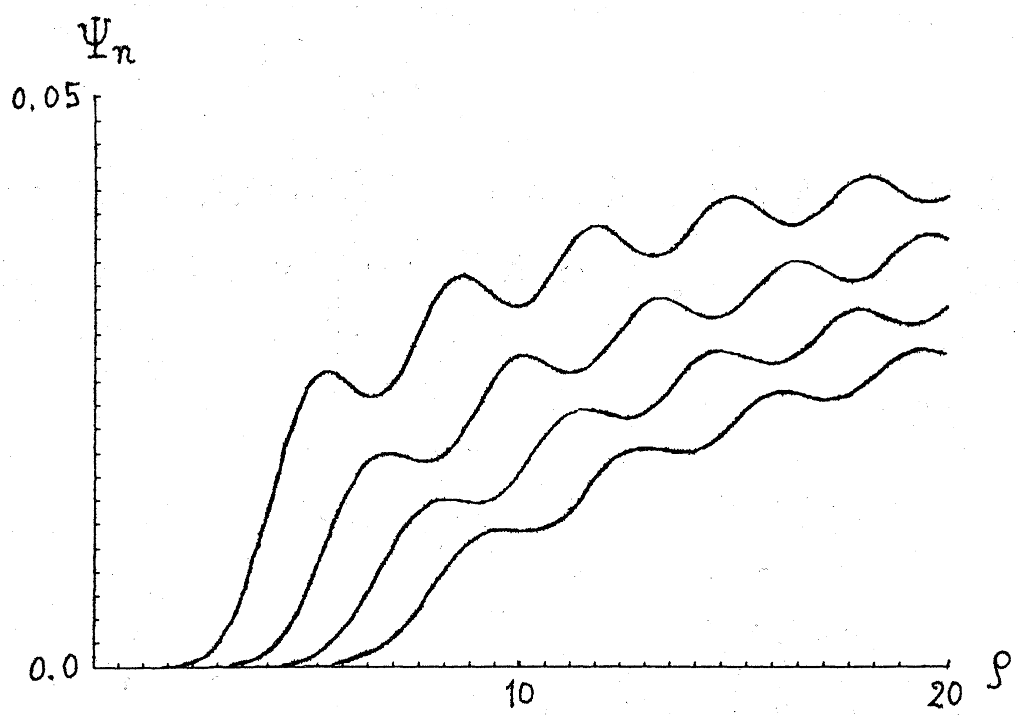

Fig. 4 a)

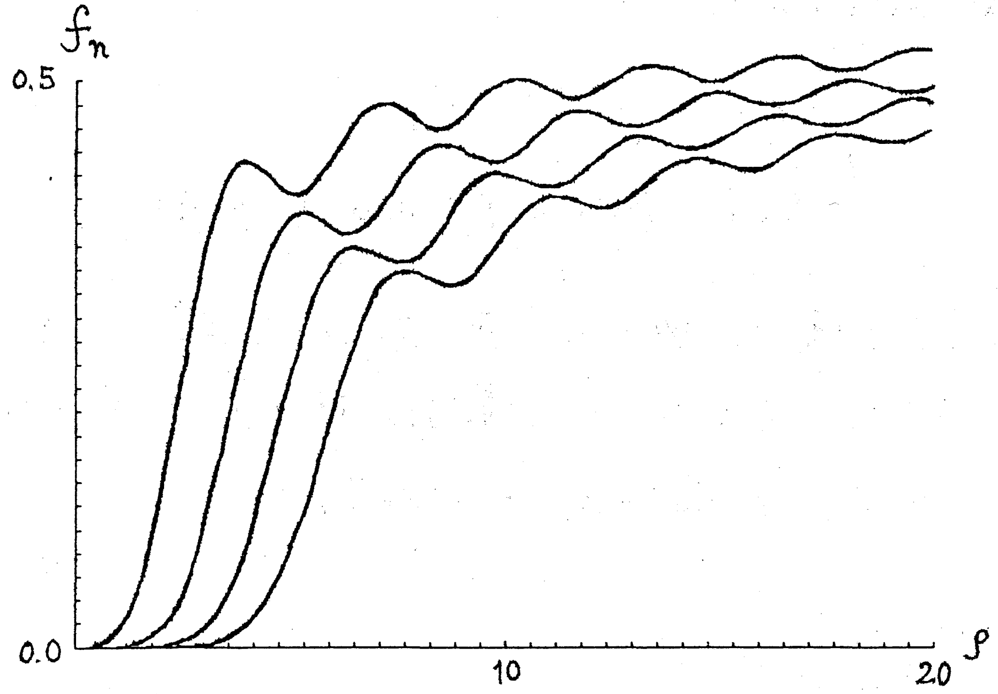

Fig. 4 b)

最後に、$k=1$ ，$k=3$ のとき双線形変数 f_n を変位 u_n に逆変換し、$0 \leq \rho \leq 20$ での振舞を Fig. 5 と Fig. 6 に示す。

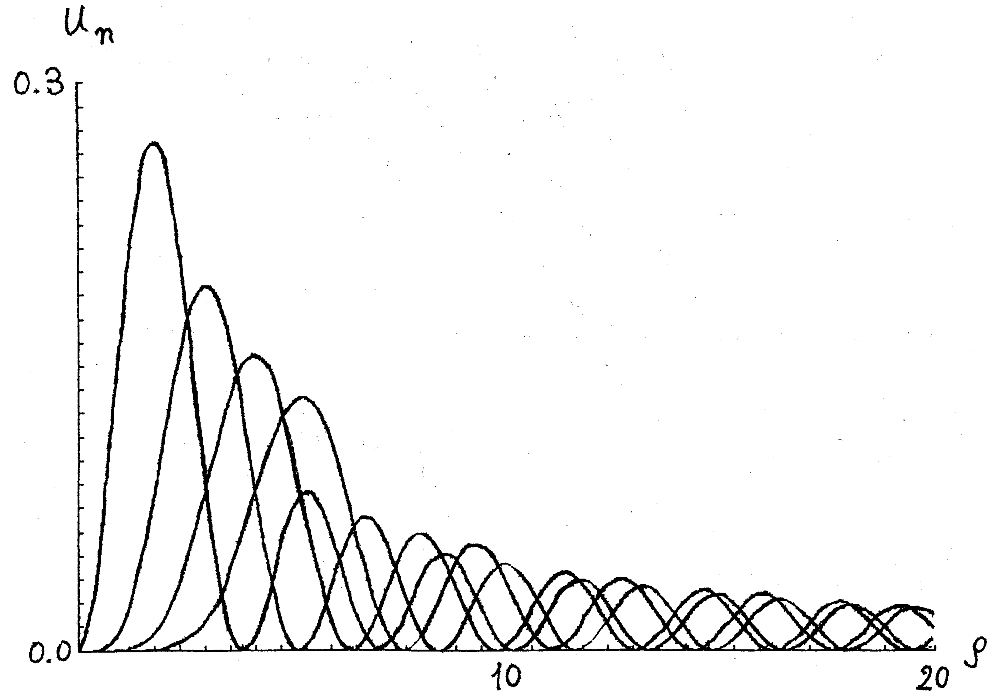

Fig. 5

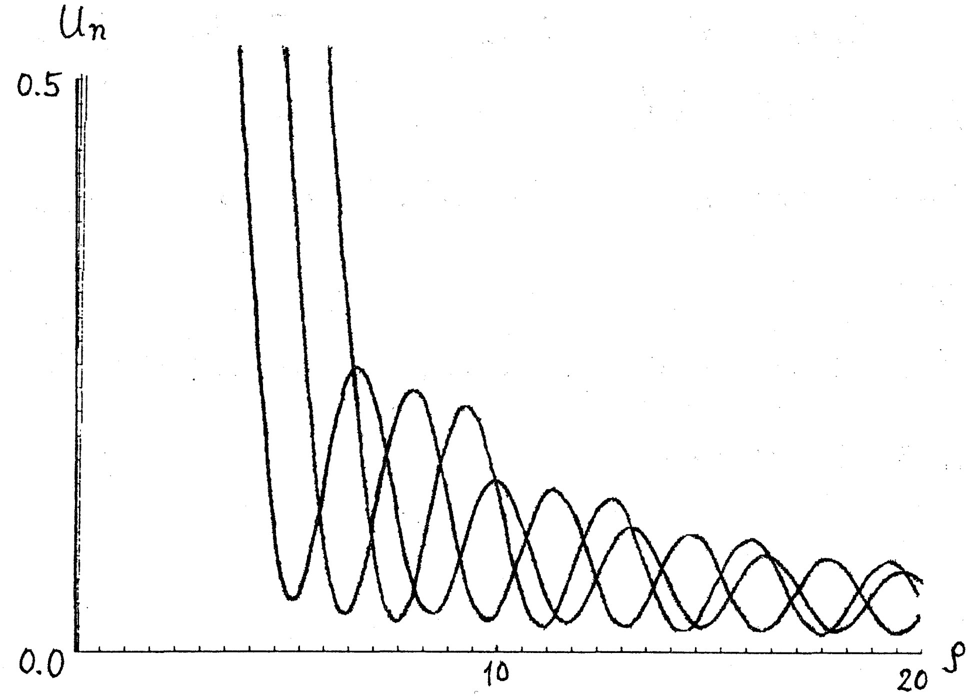

Fig. 6

References

1) A.V. Mikhailov : JETP Lett., 30 (1979) 414.

2) A. Nakamura : J. Phys. Soc. Jpn., 52 (1983) 380.

3) R. Hirota : 1986年秋の日本物理学会での講演
(No. 28a - Ra - 3)

4) N. Saitoh and É.I. Takizawa : J. Phys. Soc. Jpn., 55 (1986) 1827.

5) F. Yuasa : J. Phys. Soc. Jpn., 56 (1987) 423.

6) F. Yuasa, N. Saitoh, and É.I. Takizawa : J. Phys. Soc. Jpn., 56 (1987) 3813.

7) F. Yuasa and É. I. Takizawa: J. Phys. Soc. Jpn., 56 (1987) 3740.

8) N. Saitoh and S. Saito: Phys. Lett., A119 (1986) 287.

9) F. Yuasa and N. Saitoh: to be submitted for publication.