数理解析研究所講究録
第651巻 1988年 132-143

C^*-環のStone-Weierstrassの定理について

日大文理　境　正一郎　(Shôichirô Sakai)

1. C^*-環の一般論の中で，長い間未解決の問題として残された最も重要な問題の一つとしてStone-Weierstrass予想がある。この予想については，C^*-環の理論の研究の初期の段階から繰返し研究されてき，徐々に精密化された部分解が得られてきたが，まだ完全解決をみるには至っていない。

本文では，この予想に関し得られてきた部分解を紹介すると共に，この予想を研究するのに役立つかも知れない，著者による最近の若干の結果を述べる。

Cを局所コンパクト，ハウスドルフ空間上の無限遠点で，0となる連続関数全体のつくるC^*-環とする。クラシカルなStone-Weierstrassの定理はCの部分C^*-環DがCと一致するための条件を与えている。この定理の，もっともらしい非可換化の予想は次の通りである。

予想。　A を C^*-環，B を A の C^*-部分環，$P(A)$ を A 上の純粋状態全体の集合，0 を A 上で恒等的に 0 となる関数とする。B が $P(A)\cup(0)$ を分離する（即ち，2つの異なる $\varphi_1, \varphi_2 \in P(A)\cup(0)$ に対し，$\varphi_1(b) \neq \varphi_2(b)$ なる如き b が B の中に存在する）とする。このとき $A=B$ である。

1951年に，Kaplansky [6] は，すべての GCR 環（即ち type I C^*-環）に対して，この予想が正しいことを示した。1960年に，Glimm [5] は次のような弱い形の Stone-Weierstrass theorem が成立することを示した。

Glimm の定理．　$\overline{P(A)}$ を $P(A)$ の，ステート空間 $S(A)$ 内での，閉包とする。もし B が $\overline{P(A)}\cup(0)$ を分離するならば $A=B$ である。

残念ながら，多くの C^*-環に対して，$\overline{P(A)}=S(A)$ となり，これらの C^*-環に対しては，Glimm の定理は自明となる。従って，Glimm の定理は完全解決からは，ほど遠いものである。

1969年に，Akemann [1] は，もう一つの弱い形の定理を示した。1970年に，著者は，von Neumann の reduction theory を使用して，A が可分 C^*-環で，B が nuclear 又は，すべての状態 φ に対し，$\pi_\varphi(A)$ から $\pi_\varphi(B)''$ へのノルム one 線型写像 Φ が存在して，$\Phi(\pi_\varphi(b)) = \pi_\varphi(b)$ $(b \in B)$ ならば，予想は真である（[9]）

ということを示した。

この結果の後，多くの研究者は予想は，少くとも可分C^*環については真であると信ずるようになったが，非可分C^*環については信じていない研究者も多くいるように思われる。

1981年に，Anderson & Bunce は著者の上の結果を使用して多くの興味ある結果を得て居る（[3]）。1984年に，Longo [7] と Popa [8] は上の Anderson & Bunce の結果を用いて，独立に，Stone-Weierstrass 問題についての非常に重要な結果を得た。それについて少し述べてみたい。

1971年に，予想に関連したものとして，著者は2つの問題を上げた（[9]）。一つは factorical Stone-Weierstrass Conjecture といわれるもので次の通りである。

予想$'$．　$F(A)$をAの factorial 状態全体の集合とする。Bが$F(A)\cup(0)$を分離するならば，$A=B$．

この予想$'$は，本来の予想より弱い形であるが，Aが可換又は type I C^*環ならば，本来の予想と同等である。また，C^*環が type I でないときは，表現論の Building Block としては，既約表現より Factor 表現の方が適切であるから，予想$'$が解かれるならば，可成り useful な定理となるものと思われる。

もう一つの問題は次のものである。

問題. A を C^*環，B を A の部分 C^*環とする。φ を B の factorial 状態とするとき，φ は A の factorial 状態に拡大できるであろうか？

Longo と Popa は，それぞれ独立に，可分 C^*環に対し，予想$'$ と問題が肯定的であることを示した。Longo と Popa の factorial 状態の拡大定理は Stone-Weierstrass 予想とは独立した重要な定理であり，これを非可分に拡大する問題はきわめて興味深いが，予想$'$ に関しては，重要ではあるが我々の究極の目標とは言い難い。少くとも，可分 C^*環に対し，本来の予想を解くことは C^*環研究者に課せられた急務のように思われる。本文の目的は若い研究者が予想を研究するよう刺激することである。なお，最近の研究論文として，Akemann & Shultz [2] と Batty [4] がある。

2. 若干の結果。A を可分 C^*環，B を A の部分 C^*環とする。この節を通じて，B は $P(A)\cup(0)$ を分離するものと仮定する。一般性を失わず，A が単位元 1 をもち，B がそれを含んでいると仮定できる (cf. [9])。

この場合，" B が $P(A)\cup\{0\}$ を分離する" ということと " B が $P(A)$ を分離する" ということとは同等である。まず，次の2つの補題を述べる。

補題 1（[9]）．$\{\pi, \mathcal{H}\}$ を A の可分ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の任意の $*$-表現で，$\pi(1)$ が $\mathcal{H}$ の単位作用素となるものとする。$\pi(A)'$（$\pi(B)'$）をそれぞれ $\pi(A)$（$\pi(B)$）の commutant，C を $\pi(A)'$ の任意の極大可換 C^* 部分環，$(\pi(A), C)''$ を $\pi(A)$ と C で生成される $B(\mathcal{H})$ の部分 W^* 環とする。もし，P が $\pi(A)$ の selfadjoint portion から $(\pi(A), C)''$ の selfadjoint portion の中への real linear mapping で，$P(\pi(b)) = \pi(b)$ $(b \in B^s)$，かつ $\|P\| \leq 1$ とすると，$P(\pi(a)) = \pi(a)$ $(a \in A^s)$ である，ここで A^s (B^s) は，それぞれ A（B）の selfadjoint portion とする。

補題 2（[3]）．φ を B の factorial 状態，$\{\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi\}$ を φ によって作られた B の GNS-表現，D を $\pi_\varphi(B)$ の commutant $\pi_\varphi(B)'$ の任意の極大可換 C^* 部分環，$(\pi_\varphi(B), D)''$ を $\pi_\varphi(B)$ と D によって生成された $B(\mathcal{H}_\varphi)$ の部分 W^* 環とする。このとき，A の $*$-表現 $\{\pi, \mathcal{H}_\varphi\}$ が次の条件をみたすように存在する：(i) $\pi(A) \subset (\pi_\varphi(B), D)''$；(ii) $\pi_\varphi(b) = \pi(b)$ $(b \in B)$。更に，もし A の $*$表現 $\{\pi_1, \mathcal{H}_\varphi\}$ が (i)′ $\pi_1(A) \subset (\pi_\varphi(B), D)''$；(ii)′ $\pi_1(b) = \pi_\varphi(b)$ $(b \in B)$ をみたすならば $\pi_1(a) = \pi(a)$ $(a \in A)$ である。

さて，B が $P(A)\cup(0)$ を分離するが，$B \subsetneqq A$ であると仮定する。このとき，B^0 を，A の双対空間 A^* に於ける B の polar とし，S を B^0 の selfadjoint portion の単位球とし，f を S の一つの端点とすると，$f = f^+ - f^-$ なる直交分解ができる。$\psi = f^+ + f^-$ とすると，ψ は A の状態である。このとき，次の2つの補題を示すことができる。

補題 3.　$\{\pi_\psi, \mathcal{H}_\psi\}$ を ψ によって作られた，A の GNS 表現，$\overline{\pi_\psi(A)}$ （$\overline{\pi_\psi(B)}$）を，それぞれ，$\pi_\psi(A)$（$\pi_\psi(B)$）の弱閉包，$Z(\overline{\pi_\psi(A)})$ （$Z(\overline{\pi_\psi(B)})$）を，それぞれ，$\overline{\pi_\psi(A)}$（$\overline{\pi_\psi(B)}$）の中心とすると，$Z(\overline{\pi_\psi(B)}) \subset Z(\overline{\pi_\psi(A)})$ である。

補題 4.　補題3に於ける，A の状態 ψ の B に制限したものは，B の factorial 状態である。

補題4から，A の状態 φ で，$[\pi_\varphi(A)1_\varphi] = [\pi_\varphi(A)'1_\varphi]$，$\overline{\pi_\varphi(B)} \subsetneqq \overline{\pi_\varphi(A)}$，かつ $\overline{\pi_\varphi(B)}$ が factor となる，GNS 表現 $\{\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi\}$ が存在することが判る。$\mathcal{J}$ を π_φ の Kernel とする。一般性を失わずに，$\mathcal{J} = (0)$ と仮定することができる。実際，$B+\mathcal{J}/\mathcal{J}$ は $P(A/\mathcal{J})\cup(0)$ を分離し，π_φ は $A/\mathcal{J}$ の $*$表現を induce するからである。

さて，Aと$\pi_\varphi(A)$を同一視することにする。このとき，次の補題を示すことができる。

補題 5．$\{\pi_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$を$A$の$\mathcal{H}_\varphi$上での*-表現で，$\pi_\alpha(b)=b$ $(b\in B)$を充たすものの全体とし，$\mathfrak{A}$を$\{\pi_\alpha(A) \mid \alpha\in\Pi\}$で生成される$B(\mathcal{H}_\varphi)$の部分$C^*$環とすると，$\mathfrak{A}$から$A$上への*-準同型$\rho$で次の条件をみたすものが存在する：(i) $\rho(a)=a$ $(a\in A)$；(ii) $\mathfrak{A}=A+I$，かつ$A\cap I=(0)$；(iii) Iはρのkernelである。

補題 6．$\mathfrak{F}$をIの任意の可分部分C^*環，CをB'の任意の極大可換部分C^*環とする。このとき，Cの中にユニタリ元の列$\{v_n'\}$が存在して，$\mathfrak{F}$の任意の元xに対し，$\{v_n'^* x v_n'\}$は*-強位相に関して0に収束する。

$\mathfrak{D}$を$\mathfrak{A}$とB'によって生成される$B(\mathcal{H}_\varphi)$の部分C^*環，JをIを含む$\mathfrak{D}$の最小の両側閉イデアルとする。このとき，補題6を使用して次の命題を示すことができる。

命題 1．DをB'の任意の極大可換部分C^*環，$(B,D)''$をBとDによって生成される$B(\mathcal{H}_\varphi)$の部分W^*環とする。このとき，$(B,D)''\cap J=(0)$である。

次に，D_1, D_2 を任意の2つの B' の極大可換部分 C^*-環とする。

命題 2. もし，$\{(B,D_1)''+(B,D_2)''\}\cap I=(0)$ ならば Stone-Weierstrass 予想は真である。

証明。補題2により，A の$*$-表現 π_1, π_2 が存在して，$\pi_i(b)=b$，$\pi_i(A)\subset(B,D_i)''$ $(i=1,2)$。特に，D_1 を A' の極大可換部分 C^*-環とすると，B が $P(A)$ を分離することと，reduction 理論により D_1 は B' の極大可換部分 C^*-環である。従って，補題2により，π_1 は A の恒等表現，即ち $\pi_1(a)=a$ $(a\in A)$ である。補題5により，写像 $a\longmapsto \rho(\pi_2(a))$ $(a\in A)$ は A の$*$-表現で $\rho(\pi_2(b))=b$ $(b\in B)$ かつ，$\rho(\pi_2(A))\subset A\subset(B,D_1)''$. 故に，補題2により，$\rho(\pi_2(a))=a$ $(a\in A)$。従って，$a-\pi_2(a)\in I$. 仮定より $a=\pi_2(a)$，即ち，任意の D に対し，$A\subset(B,D)''$. よって，$A'\supset(B,D)'=D$. 即ち A' は B' の任意の極大可換部分 C^*-環を含む，よって $A'\supset B'$. これは $A''\supsetneq B''$ に矛盾する．(終)

注意. 命題1と命題2の仮定との間には，かなりの開きがある．然しながら matrix method 等の方法によって命題1を命題2の仮定の形に拡大できないだろうか？

補題 7. $\mathcal{D}/J = A\otimes_\beta B'$，ここで β は一つの C^*-クロスノルムである。

この補題の証明は，B が $P(A)$ を分離することと，補題3を

使用して得られる。

B'' は factor であるから，B と B' で生成される $B(\mathcal{H}_\varphi)$ の部分 C^* 環は $B \otimes_\delta B'$（ここで，δ は一つの C^*-クロスノルム）とかける。もし，$\delta \leqq \beta$ が $B \odot B'$ で示せれば Stone-Weierstrass 予想は真であることは容易に判る。特に，δ が the least C^* cross norm であれば予想は真である。

次に C^* 環のテンソル積を使用した方法を考えてみよう。

$A \odot B'$ を A と B' の代数的なテンソル積とする。このとき，$B \odot B'$ は $A \odot B'$ の $*$-部分環と考えられる。B' が factor であるから，$B \odot B'$ は，B と B' で生成される $B(\mathcal{H}_\varphi)$ の部分 C^* 環 $\mathcal{E}$ の中に，canonically に imbed できる。$B \odot B'$ の元 x に対し，x の $\mathcal{E}$ に於けるノルムを $\|x\|$ で示すことにする。A^s，B'^s を，それぞれ，A，B' の selfadjoint portion とし，$A^s \odot B'^s$ 上に新しいノルム $|||\cdot|||$ を定義することを考える。$x \in A^s \odot B'^s$ に対し，$x = \sum_{i=1}^{n} f_i$，ここで $f_i \in C_i^s \odot D_i^s$（$C_i$ は A の可換部分 C^* 環，D_i は B' の可換部分 C^* 環）と表わし，$|||x||| = \inf \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|$（ここで，inf は上の様な x のすべての expression を動くものとし，$\|f_i\|$ は $C_i \otimes_\lambda D_i$ に於ける f_i のノルムを示す，λ は the least cross norm である）．このとき，明らかに，$\alpha(x) \leqq |||x|||$（$x \in A^s \odot B'^s$）である（ここで，α は the least C^* cross norm）．

命題 3。もし，$\|x\| \leqq |||x|||$（$x \in B^s \odot B'^s$）ならば Stone-Weierstrass 予想は真である。

証明。 $x\in B^s\odot B'^s$ に対し，$\tilde{\varphi}(x)=(x1_\varphi, 1_\varphi)$ とおくと $\tilde{\varphi}$ は $B^s\odot B'^s$ 上の real linear functional である。$|\tilde{\varphi}(x)|\leqq \|x\|$ $(x\in B^s\odot B'^s)$ より，$\tilde{\varphi}$ は $A^s\odot B'^s$ 上の real linear functional f に，$|f(x)|\leqq |||x|||$ $(x\in A^s\odot B'^s)$ をみたし拡大できる。

$a\ (0\leqq a\leqq 1)\in A$，$b'\ (0\leqq b'\leqq 1)\in B'$ に対し，$|||1\times 1-a\times b'|||$ $=\lambda(1\times 1-a\times b')\leqq 1$。従って，$|f(1\times 1-a\times b')|\leqq 1$。故に $f(a\times b')\geqq 0$。$f_a(b')=f(a\times b')$ $(b'\in B'^s)$ とすると，f_a は B'^s 上の positive, real linear functional である。f_a は B' 上の positive linear functional $\tilde{f}_a$ に一意に拡大できる。$f((\|a\|1-a)\otimes b')\geqq 0$ $(b'(\geqq 0)\in B')$ であるから，$\tilde{f}_a(b')\leqq \|a\|\varphi(b')$ $(b'(\geqq 0)\in B')$。従って，B'' の元 $T(a)$ が存在して，$\tilde{f}_a(b')=(T(a)b'1_\varphi, 1_\varphi)$ $(b'\in B')$，かつ，$\|T(a)\|\leqq\|a\|$。$[B'1_\varphi]=\mathcal{H}_\varphi$ であるから，このような $T(a)$ は一意である。もし，$b(\geqq 0)\in B$ ならば，$T(b)=b$。線型性により T は A 上に一意に拡大できる。$T(\|a\|1\pm a)$ $=\|a\|1\pm T(a)$ であるから，$\|T(a)\|\leqq\|a\|$ $(a\in A^s)$。故に，補題1により，$T(a)=a\in B''$ $(a\in A^s)$。即ち $A\subset B''$。これは矛盾である。(終)

いま，命題3の仮定が成立しないとすると，A の可換部分 C^* 環 C_i $(i=1,2,\cdots,n)$ と B' の可換部分 C^* 環 D_i $(i=1,2,\cdots,n)$，及び $A_i^s\odot C_i^s$ の元 f_i $(i=1,2,\cdots,n)$ が存在して，$f_1+f_2+\cdots+f_n$

は $B^S \odot B'^S$ に属し，$\lambda(f_1)+\lambda(f_2)+\cdots+\lambda(f_n) < \|f_1+f_2+\cdots+f_n\|$，ここで，$\lambda(f_i)$ は f_i の $C_i \otimes_\lambda D_i$，即ち C^*テンソル積 $C_i \otimes_\alpha D_i$（可換 C^*環については $\alpha=\lambda$ に注意）に於ける f_i のノルム，$\|f_1+f_2+\cdots+f_n\|$ は，B と B' によって生成される $B(\mathcal{H})$ の部分 C^*環に於ける $f_1+f_2+\cdots+f_n$（$\in B^S \odot B'^S$）のノルムである。

従って $(\lambda(f_1)1\times1 \pm f_1)+(\lambda(f_2)1\times1 \pm f_2)+\cdots (\lambda(f_n)1\times1 \pm f_n)$

$= (\sum_{i=1}^{n}\lambda(f_i))1 \pm (f_1+f_2+\cdots+f_n)$

故に $C_i \otimes_\lambda D_i$ に positive element h_i が存在して，$h_i \in C_i^S \odot D_i^S$ かつ，$\sum_{i=1}^{n} h_i \in B^S \odot B'^S$，さらに $\sum_{i=1}^{n} h_i$ は B と B' で生成される $B(\mathcal{H})$ の部分 C^*環，即ち，$B \otimes_\delta B'$ で non-positive，self-adjoint element となる。 従って次の予想を解けば Stone-Weierstrass 予想は解決する。

予想". 上の $\sum_{i=1}^{n} h_i$ は $B \otimes_\delta B'$ で positive element である。

References

1. C. Akemann, The Stone-Weierstrass problem of C*algebras, J. Functional Analysis 4, 277-294 (1969)

2. C. Akemann and F. Shultz, Perfect C*algebras,

Mem. Amer. Math. Soc. 55 (1985), no. 326

3. J. Anderson and Bunce, Stone-Weierstrass theorems for separable C^*-algebras, J. Operator Theory 6, 363-374 (1981)

4. C. Batty, to appear

5. J. Glimm, A Stone-Weierstrass theorem for C^*-algebras, Ann. Math., 72, 216-244 (1960)

6. I. Kaplansky, The structure of certain operator algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 70, 219-255 (1951)

7. R. Longo, Solution of the factorial Stone-Weierstrass conjecture, Invent. Math. 76, 145-155 (1984)

8. S. Popa, Semiregular maximal abelian $*$-subalgebras and the solution to the factor state Stone-Weierstrass theorem, Invent. Math., 76, 157-161 (1984)

9. S. Sakai, C^*-algebras and W^*-algebras, Ergebnisse der Math., 60 (1971), Springer-Verlag, Heidelberg