

複素球面上の正則関数について

上智大理工 和田涼子 (Ryoko Wada)

d を 2 以上の自然数とする. $\mathcal{O}(\mathbb{C}^{d+1})$ で \mathbb{C}^{d+1} 上の正則関数の空間を表わす. 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ について $\mathcal{O}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1}) = \{F \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{d+1}); (\Delta_z + \lambda^2)F = 0\}$ とおく (ここで $\Delta_z = \sum_{j=1}^{d+1} (\frac{\partial}{\partial z_j})^2$). $\rho \in \mathbb{C}$ について $M_\rho = \{z \in \mathbb{C}^{d+1}; \sum_{j=1}^{d+1} z_j^2 = \rho^2\}$ とおく. 特に $\tilde{S} = M_1 = \{z \in \mathbb{C}^{d+1}; \sum_{j=1}^{d+1} z_j^2 = 1\}$ を \mathbb{C}^{d+1} 上の複素球面という. この解析的集合 M_ρ 上の正則関数の全体を $\mathcal{O}(M_\rho)$ で表わす. Oka-Cartan の定理 B より $\mathcal{O}(M_\rho) = \mathcal{O}(\mathbb{C}^{d+1})|_{M_\rho}$ である. M_0 への制限写像 $F \rightarrow F|_{M_0}$ が $\mathcal{O}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1})$ から $\mathcal{O}(M_0)$ への線型位相同型であることは [6][7] で示したが, ここでは $\rho \neq 0$ の場合も同様の結果が得られることを示す (定理 2.1, 系 2.3). また M_0 上の指数型の正則関数が \mathbb{C}^{d+1} 上の指数型整関数にのばせることは [6] で示したが, \tilde{S} 上の指数型の正則関数についても同様のことが成り立つことを示す (定理 3.1).

§1. 準備

d を 2 以上の自然数とする. $z = (z_1, \dots, z_{d+1})$, $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_{d+1}) \in \mathbb{C}^{d+1}$ について

$$z \cdot \zeta = \sum_{j=1}^{d+1} z_j \zeta_j,$$

$$\|z\| = \sqrt{z \cdot \bar{z}},$$

$$z^2 = z \cdot z$$

とおく. S を \mathbb{R}^{d+1} の単位球面とし, ds を $\int_S 1 ds = 1$ をみたす S 上の $O(d+1)$ -invariant な測度とする. $\|\cdot\|_\infty$ で S 上の sup norm を表わす. $H_{n,d}$ で $(d+1)$ 次元 n 次の球面調和関数の空間を表わす. (球面調和関数については [5] 参照). $S_n \in H_{n,d}$ について S 上で S_n と一致する \mathbb{C}^{d+1} 上の n 次同次調和多項式が一意的に決まる. それを \tilde{S}_n で表わす.

\mathbb{C}^{d+1} 上の Lie norm および dual Lie norm を各々次式で定義する:

$$(1.1) \quad L(z) = \left\{ \|z\|^2 + (\|z\|^4 - |z^2|^2)^{1/2} \right\}^{1/2},$$

$$(1.2) \quad L^*(z) = \sup \{ |z \cdot \zeta| ; L(\zeta) \leq 1 \} \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\|z\|^2 + |z^2|)^{1/2}.$$

([1]参照).

半径 r の開 Lie 球 および閉 Lie 球を各々

$$\tilde{B}(r) = \{z \in \mathbb{C}^{d+1}; L(z) < r\} \quad (0 < r \leq \omega),$$

$$\tilde{B}[r] = \{z \in \mathbb{C}^{d+1}; L(z) \leq r\} \quad (0 \leq r < \omega)$$

で表われ, $\mathcal{O}(\tilde{B}(r))$ で $\tilde{B}(r)$ 上の正則函数の全体を表わす.
 $\mathcal{O}(\tilde{B}(r))$ は広義一様収束の位相を入れると FS 空間になる.
 次に

$$\mathcal{O}(\tilde{B}[r]) = \text{ind} \lim_{r' > r} \mathcal{O}(\tilde{B}(r'))$$

とおく. $\mathcal{O}(\tilde{B}[r])$ は DFS 空間である.

N を \mathbb{C}^{d+1} 上の任意のノルムとする. $A > 0$ について

$$X_{A,N} = \left\{ F \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{d+1}); \sup_{z \in \mathbb{C}^{d+1}} |F(z)| \exp(-AN(z)) < \infty \right\}$$

とおくと $X_{A,N}$ はノルム $\|F\|_{A,N} = \sup_{z \in \mathbb{C}^{d+1}} |F(z)| \exp(-AN(z))$ について Banach 空間になる. さらに

$$\text{Exp}(\mathbb{C}^{d+1}; (A:N)) = \text{proj} \lim_{A' > A} X_{A',N} \quad (0 \leq A < \omega),$$

$$\text{Exp}(\mathbb{C}^{d+1}; [A; \mathbb{N}]) = \text{ind} \lim_{A' < A} X_{A'; \mathbb{N}} \quad (0 < A \leq \infty)$$

とおく。 $\text{Exp}(\mathbb{C}^{d+1}) = \text{Exp}(\mathbb{C}^{d+1}; [\infty; \mathbb{N}])$ は指数型整函数の空間である。

\tilde{S} を \mathbb{C}^{d+1} 上の複素球面を表わす。すなわち

$$\tilde{S} = \{ z \in \mathbb{C}^{d+1} ; z^2 = 1 \}.$$

さらに

$$\tilde{S}(r) = \tilde{B}(r) \cap \tilde{S} \quad (1 < r \leq \infty),$$

$$\tilde{S}[r] = \tilde{B}[r] \cap \tilde{S} \quad (1 \leq r < \infty)$$

とおく。 $\mathcal{O}(\tilde{S}(r))$ を $\tilde{S}(r)$ 上の正則函数の全体とし、広義一様収束の位相を入れる。また

$$\mathcal{O}(\tilde{S}[r]) = \text{ind} \lim_{r' > r} \mathcal{O}(\tilde{S}(r'))$$

とおく。

f が S 上の函数または汎函数であるとき

$$(1.3) \quad \mathcal{S}_n(f; S) = N(n, d) \langle f, P_{n, d}(\cdot; S) \rangle$$

$$(S \in \mathcal{S})$$

とおく. ここで

$$(1.4) \quad N(n, d) = \frac{(2n+d-1)(n+d-2)!}{n!(d-1)!}$$

で, $P_{n,d}$ は $(d+1)$ 次元 n 次の Legendre 多項式とする.

$\tilde{S}_n(f; \cdot)$ は $H_{n,d}$ の元であり, f の n 次球面調和成分とよばれる ([3] [4] 参照).

$O(\tilde{S}(r))$, $\theta(\tilde{S}(r))$ は 球面調和函数の列 $\{\tilde{S}_n(f; \cdot)\}_{n=0,1,2,\dots}$ の増大度によつて次のように特徴づけられる.

補題 1.1 ([4] Theorem 5.1, 5.2). \tilde{S}_n を f の n 次球面調和成分とするとき

$$(1.5) \quad f \in O(\tilde{S}(r)) \iff \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{S}_n\|_{\infty}^{1/n} \leq 1/r \quad (1 < r \leq \infty),$$

$$(1.6) \quad f \in \theta(\tilde{S}(r)) \iff \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{S}_n\|_{\infty}^{1/n} < 1/r \quad (1 \leq r < \infty).$$

次に $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\Lambda_+ = \{(n, k) \in \mathbb{Z}_+^2; n \equiv k \pmod{2}, n \geq k\}$ とおく. 任意の $F \in O(\tilde{B}(r))$ についで $\tilde{S}_{n,k}(F; \cdot) \in H_{n,d}$ が一意的に存在して

$$(1.7) \quad F(z) = \sum_{(n,k) \in \Lambda_+} (\sqrt{z^2})^{n-k} \tilde{S}_{n,k}(F; z)$$

という形に展開できる。(1.7)の右辺は $\tilde{B}(r)$ 上広義一様収束する。 $S_{m,k}(F; \cdot)$ は F の (m,k) -成分とよばれる ([2] 参照)。

$\Delta_z = \sum_{j=1}^{d+1} \left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right)^2$ とする。 $\lambda \in \mathbb{C}$ について $\mathcal{O}_\lambda(\tilde{B}(r)) = \{F \in \mathcal{O}(\tilde{B}(r)) ; \Delta_z F(z) = -\lambda^2 F(z)\}$, $\mathcal{O}_\lambda(\tilde{B}[r]) = \text{ind} \lim_{r' > r} \mathcal{O}_\lambda(\tilde{B}(r'))$ とおく。

§2. $\tilde{\mathcal{S}}$ 上の正則関数

Bessel 関数 J_ν ($\nu \neq -1, -2, \dots$) は次式で表わされる:

$$J_\nu(x) = (x/2)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)}$$

この節では 次のことを証明する。

定理 2.1 ([8]) $\lambda \in \mathbb{C}$ が $\forall n \in \mathbb{Z}_+ + 1$ について

$$\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-n-\frac{d+1}{2}} J_{n+\frac{d+1}{2}}(\lambda) \neq 0$$

をみたすならば 制限写像 $\alpha_\lambda: F \rightarrow F|_{\tilde{\mathcal{S}}}$ は $\mathcal{O}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1})$ から $\mathcal{O}(\tilde{\mathcal{S}})$ への線型位相同型である。

定理 2.1 を証明するために 次の補題が必要である。

補題 2.2 (cf. [2][3][7]). $F \in \mathcal{O}_\lambda(\tilde{B}(r))$ (resp. $F \in \mathcal{O}_\lambda(\tilde{B}[r])$) とし, $S_{n,k}$ を F の (n,k) -成分とする. このとき $\forall (n,k) \in \Lambda_+$ について

$$(2.1) \quad S_{n,k} = \frac{(i\lambda/2)^{n-k} \Gamma(k + \frac{d+1}{2})}{\Gamma(\frac{n-k}{2} + 1) \Gamma(\frac{n+k+d+1}{2})} \tilde{S}_{k,k}$$

かつ

$$(2.2) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|S_{n,n}\|_w^{1/n} \leq 1/r$$

(resp.

$$(2.2') \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_{n,n}\|_w^{1/n} < 1/r).$$

逆に $\{S_{n,k}\}_{(n,k) \in \Lambda_+}$ が (2.1), (2.2) (resp. (2.2')) をみたす球面調和函数の列 ($S_{n,k} \in H_{k,d}$) であるとき, $z \in \tilde{B}(r)$ (resp. $z \in \tilde{B}[r]$) について

$$(2.3) \quad F(z) = \sum_{(n,k) \in \Lambda_+} (\sqrt{z^2})^{n-k} \tilde{S}_{n,k}(z)$$

とおくと (2.3) の右辺は $\tilde{B}(r)$ 上で義一様絶対収束して $F \in \mathcal{O}_\lambda(\tilde{B}(r))$ となる (resp. (2.3) の右辺は $\mathcal{O}(\tilde{B}[r])$ の位相で F に収束し, $F \in \mathcal{O}_\lambda(\tilde{B}[r])$ となる). さらに

$$S_{n,k} = S_{n,k}(F; \cdot) \quad ((n,k) \in \Lambda_+)$$

が成り立つ.

定理 2.1 の証明. $\mathcal{O}(\mathbb{C}^{d+1})|_{\tilde{S}} = \mathcal{O}(\tilde{S})$ であるから
 $\mathcal{O}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1})|_{\tilde{S}} \subset \mathcal{O}(\tilde{S})$ はあきらか.

$F \in \mathcal{O}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1})$ のとき (1.7) と (2.1) より $\forall z \in \mathbb{C}^{d+1}$ について

$$(2.4) \quad F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda \sqrt{z^2}/2)^{-k - \frac{d+1}{2}} J_{k + \frac{d+1}{2}}(\lambda \sqrt{z^2}) \\ \times \Gamma(k + \frac{d+1}{2}) \tilde{S}_{k,k}(F; z)$$

とかける. $\alpha_\lambda(F) = 0$ ならば (2.4) より $\forall s \in S$ について

$$(2.5) \quad F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda/2)^{-k - \frac{d+1}{2}} J_{k + \frac{d+1}{2}}(\lambda) \Gamma(k + \frac{d+1}{2}) \tilde{S}_{k,k}(F; s) \\ = 0$$

である. 仮定から $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ について $(\lambda/2)^{-k - \frac{d+1}{2}} J_{k + \frac{d+1}{2}}(\lambda) \\ \times \Gamma(k + \frac{d+1}{2}) = 0$ であるから (2.5) と球面調和関数の直交性より $\tilde{S}_{k,k}(F; s) = 0$ ($\forall k \in \mathbb{Z}_+$). 従って $\tilde{S}_{k,k}(F; z) \equiv 0$ となり (2.4) より $F \equiv 0$ である. よって α_λ は単射.

次に $f \in \mathcal{O}(\tilde{S})$ とし \mathbb{C}^{d+1} 上の関数 F を次のように定義する:

$$(2.6) \quad F(z) = \sum_{(n,k) \in \Lambda_+} (\sqrt{z^2})^{n-k} \tilde{S}_{n,k}(z),$$

$$(2.7) \quad \tilde{S}_{n,k}(z) = \frac{(\lambda/2)^{n+\frac{d-1}{2}} (-1)^{\frac{n-k}{2}} \tilde{S}_k(f; z)}{\Gamma(\frac{n-k}{2}+1) \Gamma(\frac{n+k+d+1}{2}) J_{k+\frac{d+1}{2}}(\lambda)}$$

$f \in \mathcal{O}(\tilde{\mathcal{S}})$ であるから (1.5) より

$$(2.8) \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \| \tilde{S}_k(f; \cdot) \|_{\infty}^{1/k} = 0$$

十分大きい k について

$$(2.9) \quad \left| \Gamma(k+\frac{d+1}{2}) (\lambda/2)^{-k-\frac{d+1}{2}} J_{k+\frac{d+1}{2}}(\lambda) \right| > 1/2$$

が成り立つので (2.7) - (2.9) より

$$(2.10) \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \| \tilde{S}_{k,k} \|_{\infty}^{1/k} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{(\lambda/2)^{k+\frac{d+1}{2}} \tilde{S}_k(f; \cdot)}{\Gamma(k+\frac{d+1}{2}) J_{k+\frac{d+1}{2}}(\lambda)} \right\|_{\infty}^{1/k} \\ \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \| \tilde{S}_k(f; \cdot) \|_{\infty}^{1/k} = 0$$

補題 2.2, (2.7), (2.10) より $F \in \mathcal{O}_{\lambda}(\mathbb{C}^{d+1})$. $z \in \tilde{\mathcal{S}}$ のとき F のつくり方から $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{S}_k(f; z) = f(z)$ となるから α_{λ} は全射である.

あきらかに α_{λ} は連続であり, $\mathcal{O}_{\lambda}(\mathbb{C}^{d+1})$, $\mathcal{O}(\tilde{\mathcal{S}})$ は FS 空間だから 閉グラフ定理より α_{λ}^{-1} も連続になる. (証明終)

注意 ある $n \in \mathbb{Z}_+$ について $(\frac{\lambda}{2})^{-n-\frac{d-1}{2}} J_{n+\frac{d-1}{2}}(\lambda) = 0$ であるとき, $\lambda \in \mathbb{R}$ であり $n \neq 0$ なる $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ について $(\lambda/2)^{-k-\frac{d-1}{2}} J_{k+\frac{d-1}{2}}(\lambda) \neq 0$ であることが知られている.

このとき

$$\text{Ker } d_\lambda = \left\{ F(z) = \left(\lambda \sqrt{z^2} / 2 \right)^{-n-\frac{d-1}{2}} J_{n+\frac{d-1}{2}}(\lambda \sqrt{z^2}) \tilde{S}_n(z); \right. \\ \left. S_n \in \mathbb{H}_{n,d} \right\},$$

$$\text{Coker } d_\lambda = \mathbb{H}_{n,d}$$

である.

$p \in \mathbb{C}$ について $M_p = \{ z \in \mathbb{C}^{d+1}; z^2 = p^2 \}$ とおき

$$M_p(r) = M_p \cap \tilde{B}(r) \quad (0 \leq |p| < r \leq \infty)$$

$$M_p[r] = M_p \cap \tilde{B}[r] \quad (0 \leq |p| \leq r < \infty)$$

とおく. $\mathcal{O}(M_p(r))$ を $M_p(r)$ 上の正則関数の全体を表わし, $M_p(r)$ 上の広義一様収束の位相を入れる. また $\mathcal{O}(M_p[r]) = \text{ind} \lim_{r' > r} \mathcal{O}(M_p(r'))$ とする.

定理 2.1 と 補題 1.1, 補題 2.2 より 次の系が得られる.

系 2.3. $\lambda, p \in \mathbb{C}$ が $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ について

$$(\lambda \rho/2)^{-n-\frac{d-1}{2}} J_{n+\frac{d-1}{2}}(\lambda \rho) \neq 0$$

をみたすとき 次の制限写像 $\alpha_{\lambda, \rho} : F \rightarrow F|_{M_\rho}$ は 線型位
相同型である。

$$\alpha_{\lambda, \rho} : \mathcal{O}_\lambda(\tilde{B}(r)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(M_\rho(r)) \quad (0 \leq |\rho| < r \leq \infty),$$

$$\alpha_{\lambda, \rho} : \mathcal{O}_\lambda(\tilde{B}[r]) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(M_\rho[r]) \quad (0 \leq |\rho| \leq r < \infty).$$

(注意. $\lambda=0, \rho=1$ の場合は [3][4] で, $\rho=0$ の場合
は [7] で 各々 証明されている).

§3. \tilde{S} 上の指数型の正則函数

\mathbb{C}^{d+1} 上の任意のノルム $N(z)$ と $A > 0$ について

$$Y_{A, N} = \{ f \in \mathcal{O}(\tilde{S}) ; \sup_{z \in \tilde{S}} |f(z)| \exp(-AN(z)) < \infty \}$$

とおく. $Y_{A, N}$ は ノルム

$$\|f\|_{A, N} = \sup_{z \in \tilde{S}} |f(z)| \exp(-AN(z))$$

について Banach 空間である. さらに

$$\text{Exp}(\tilde{S} : (A; N)) = \text{proj} \lim_{A' > A} Y_{A', N} \quad (0 \leq A < \infty),$$

$$\text{Exp}(\tilde{S} : [A; N]) = \text{ind} \lim_{A' < A} Y_{A', N} \quad (0 < A \leq \infty)$$

とおく.

この節では次の定理を証明する.

定理 3.1 ([8]). $\lambda \in \mathbb{C}$ が $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ について

$$\left(\gamma_2\right)^{-n - \frac{d-1}{2}} J_{n + \frac{d-1}{2}}(\lambda) \neq 0$$

をみたすとき 次の制限写像 $\alpha_\lambda : F \rightarrow F|_{\mathbb{R}}^{\sim}$ は線型位相同型である.

$$(3.1) \quad \alpha_\lambda : \text{Exp}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1}; (A; L^*)) \xrightarrow{\sim} \text{Exp}(\tilde{S}; (A; L^*)) \\ (|\lambda| \leq A < \infty),$$

$$(3.2) \quad \alpha_\lambda : \text{Exp}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1}; [A; L^*]) \xrightarrow{\sim} \text{Exp}(\tilde{S}; [A; L^*]) \\ (|\lambda| < A \leq \infty),$$

ここで

$$\text{Exp}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1}; (A; N)) = \mathcal{O}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1}) \cap \text{Exp}(\mathbb{C}^{d+1}; (A; N)),$$

$$\text{Exp}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1}; [A; N]) = \mathcal{O}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1}) \cap \text{Exp}(\mathbb{C}^{d+1}; [A; N])$$

とする.

$1 < r$ について $S[r] = \{z \in \tilde{S} ; L^*(z) = r\}$ とおく.

$S[r] \simeq O(d+1)/O(d+1)$ なのて $S[r]$ 上の $O(d+1)$ -invariant な測度 dz で $\int_{S[r]} 1 dz = 1$ なるものが一意的に存在する.

定理 3.1 を証明するためにいくつかの補題を証明する.

補題 3.2. 任意の $\alpha, s \in S$ について

$$(3.3) \quad N(n, d) \int_{S[r]} \overline{P_{n, d}(z \cdot \alpha)} P_{k, d}(z \cdot s) dz \\ = P_{n, d}(2r^2 - 1) P_{n, d}(s \cdot \alpha) \delta_{n, k}.$$

証明. $s, \alpha \in S$ について

$$(3.4) \quad F(s, \alpha) = N(n, d) \int_{S[r]} P_{k, d}(z \cdot s) \overline{P_{n, d}(z \cdot \alpha)} dz$$

とおくと [6] Lemma 1.3 と同様の方法で

$$(3.5) \quad F(s, \alpha) = \tilde{C}_n(r) P_{n, d}(s \cdot \alpha) \delta_{n, k},$$

$$(3.6) \quad \tilde{C}_n(r) = N(n, d) \int_{S[r]} |P_{n, d}(z \cdot s)|^2 dz$$

がわかる ((3.6) の右辺は $s \in S$ によらない). (3.6) より

$$(3.7) \quad \tilde{C}_n(r) = \int_S \tilde{C}_n(r) ds$$

$$= N(n, d) \int_{S[r]} \int_S |P_{n,d}(z \cdot s)|^2 ds dz.$$

$z \in \tilde{S}$ のとき $P_{n,d}(\cdot, z) \in H_{n,d}$, $\tilde{P}_{n,d}(s, z) = P_{n,d}(z \cdot s)$ であるから

$$(3.8) \quad N(n, d) \int_S |P_{n,d}(z \cdot s)|^2 ds = P_{n,d}(\|z\|^2).$$

$z \in S[r]$ のとき $L^*(z)^2 = \frac{1}{2}(\|z\|^2 + 1) = r^2$ より $\|z\|^2 = 2r^2 - 1$ となる. このことと (3.5)-(3.8) より (3.3) が得られる.

(証明終)

補題 3.3. $f \in \mathcal{O}(\tilde{S})$ のとき f の n 次球面調和成分は次式で表わされる.

$$(3.9) \quad \tilde{S}_n(f; s) = \frac{N(n, d)}{P_{n,d}(2r^2 - 1)} \int_{S[r]} f(z) \overline{P_{n,d}(z \cdot s)} dz$$

($s \in S$)

証明. $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{S}_k(f; z)$ は $S[r]$ 上 f に一様収束するので

$$(3.10) \quad \int_{S[r]} f(z) \overline{P_{n,d}(z \cdot s)} dz$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{S[r]} \tilde{S}_k(f; z) \overline{P_{n,d}(z \cdot s)} dz.$$

$\{P_{k,d}(\alpha_j \cdot)\}_{1 \leq j \leq N(k,d)}$ が $H_{k,d}$ の基底になるような

$\alpha_1, \dots, \alpha_{N(k, \lambda)} \in S$ が存在するので, このことと, (3.10), (3.3) から (3.9) がわかる. (証明終)

補題 3.4. $F \in \mathcal{O}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1})$, $\tilde{S}_{k, k} = \tilde{S}_{k, k}(F:)$ とする時

$$(3.11) \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (k! \|\tilde{S}_{k, k}\|_{L^*})^{1/k} \leq A \quad (|\lambda| \leq A < \infty)$$

(resp.

$$(3.11') \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (k! \|\tilde{S}_{k, k}\|_{L^*})^{1/k} < A \quad (|\lambda| < A \leq \infty))$$

ならば $F \in \text{Exp}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1}; (A; L^*))$ (resp. $\text{Exp}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1}; [A; L^*])$) とある. ここで $\|g\|_{L^*} = \sup\{|g(z)|; L^*(z) \leq 1\}$ とする.

証明. $\lambda = 0$ の場合は [4] Lemma 4.2 より あきらか.

$\lambda \neq 0$, $F \in \mathcal{O}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1})$ かつ $\{\tilde{S}_{k, k}\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ かつ (3.11) をみたすとすると $\forall A' > A$ について ある $c_{A'} > 0$ が存在して

$$(3.12) \quad |\tilde{S}_{k, k}(z)| \leq c_{A'} (k!)^{-1} A'^k \quad (L^*(z) \leq 1)$$

となる. (1.7) と (3.12) より $z \in M_0$ のとき

$$(3.13) \quad |F(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\tilde{S}_{k, k}(z)| \leq c_{A'} \exp(A' L^*(z)).$$

(3.13) と [6] Corollary 3.4 より $F \in \text{Exp}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1}; (A; L^*))$ かつ

わかる。後半の証明も同様にできる。 (証明終)

定理3.1の証明. $|\lambda| \leq A < \infty$ とせよ. $\alpha_\lambda(\text{Exp}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1}; (A; L^*))) \subset \text{Exp}(\tilde{\mathcal{S}}; (A; L^*))$ はあきらか. また定理2.1より α_λ は単射である.

$f \in \text{Exp}(\tilde{\mathcal{S}}; (A; L^*))$ とすると $\forall A' > A$ についてある $C_{A'} > 0$ が存在して

$$(3.14) \quad |f(z)| \leq C_{A'} \exp(A' L^*(z)) \quad \text{on } \tilde{\mathcal{S}}$$

となる. 定理2.1より $\alpha_\lambda(F) = f$ なる $F \in \mathcal{O}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1})$ が一意的に決まり (2.7) より

$$(3.15) \quad \tilde{\mathcal{S}}_{k,k}(F; z) = \frac{(\lambda/2)^{k+\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(k+\frac{d-1}{2}) J_{k+\frac{d-1}{2}}(\lambda)} \tilde{\mathcal{S}}_k(f; z)$$

となる. $t \geq 1$ について

$$(3.16) \quad P_{n,d}(t) = \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d-1}{2})\sqrt{\pi}} \int_{-1}^1 (t + \sqrt{t^2-1} x)^n (1-x^2)^{\frac{d-3}{2}} dx$$

であるので (3.16) より $\forall r > 1$ について

$$(3.17) \quad P_{n,d}(2r^2-1) \geq 2^{2n} C_d (n+d)^{-d} (r-1)^{2n}$$

(C_d は定数) が与える. (3.6) - (3.9), (3.14), (3.17) と Schwarz の不等式 より

$$(3.18) \quad \|S_n(f; \cdot)\|_\infty \leq \left\{ \frac{N(n, d)}{I_{n, d}(2r-1)} \right\}^{1/2} \sup_{z \in S[r]} |f(z)| \\ \leq C_d' \frac{\sqrt{N(n, d) (n+d)^d}}{2^n (r-1)^n} e^{A'(r-1)} \quad (\forall r > 1)$$

(C_d' は定数).

(3.18) で $r = \frac{n}{A'} + 1$ おき Stirling の公式を使うと

$$(3.19) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (n! \|S_n(f; \cdot)\|_\infty)^{1/n} \leq A'/2 \quad (\forall A' > A).$$

(3.15), (3.19), (2.9) より

$$(3.20) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (n! \|S_{n, n}(F; \cdot)\|_\infty)^{1/n} \leq A/2.$$

[7] (2.21) および Remark 2.2 から

$$(3.21) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (n! \|\tilde{S}_{n, n}(F; \cdot)\|_{L^*})^{1/n} = 2 \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (n! \|S_{n, n}(F; \cdot)\|_\infty)^{1/n}$$

が与えるので (3.20), (3.21) より

$$(3.22) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (n! \|\tilde{S}_{n, n}(F; \cdot)\|_{L^*})^{1/n} \leq A.$$

補題 3.4 と (3.22) より $F \in \text{Exp}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1}; (A; L^*))$ となるので, α_λ は全射である.

あきらかに α_λ は連続で, $\text{Exp}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1}: (A:L^*))$, $\text{Exp}(\tilde{\mathcal{S}}:(A:L^*))$ は FS 空間であるから 閉グラフ定理より α_λ も連続である. よって (3.1) が示せた. (3.2) も同様に証明できる. (証明終)

注意. $\text{Exp}(\tilde{\mathcal{S}}:(A:L)) = \text{Exp}(\tilde{\mathcal{S}}:(2A:L^*))$ かつ
 $\text{Exp}_0(\mathbb{C}^{d+1}: (A:L)) = \text{Exp}_0(\mathbb{C}^{d+1}: (2A:L^*))$ が成り立つので 定理3.1 より 次の制限写像は 線型位相同型である.

$$\alpha_0: \text{Exp}_0(\mathbb{C}^{d+1}: (A:L)) \xrightarrow{\sim} \text{Exp}(\tilde{\mathcal{S}}:(A:L)) \quad (0 \leq A < \infty),$$

$$\alpha_0: \text{Exp}_0(\mathbb{C}^{d+1}: [A:L]) \xrightarrow{\sim} \text{Exp}(\tilde{\mathcal{S}}:[A:L]) \quad (0 < A \leq \infty),$$

(cf. [8] Corollary 3.5).

References

- [1] L. Drużkowski, Effective formula for the cross norm in the complexified unitary spaces, Zeszyty Nauk. Uniw. Jagielloń., Prace Mat. 16 (1974), 47-53.
- [2] M. Morimoto, Analytic functionals on the Lie sphere, Tokyo J. Math. 3 (1980), 1-35.
- [3] M. Morimoto, hyperfunctions on the sphere, Sophia

- Kokyuroku in Mathematics, 12, Sophia University,
Department of Math., Tokyo, 1982 (in Japanese).
- [4] M. Morimoto, Analytic functionals on the sphere and their
Fourier-Borel transformations, Complex Analysis, Banach
Center Publications, 11, PWN-Polish Scientific Publishers,
Warsaw, 1983, 223-250.
- [5] C. Müller, Spherical Harmonics, Lecture Notes in Math.,
17, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1966.
- [6] R. Wada, On the Fourier-Borel transformations of analytic
functionals on the complex sphere, Tôhoku Math. J., 38
(1986), 93-105.
- [7] R. Wada and M. Morimoto, A uniqueness set for the
differential operator $\Delta_z + \lambda^2$, Tokyo J. Math. 10 (1987),
93-105.
- [8] R. Wada, Holomorphic functions on the complex sphere,
preprint.