数理解析研究所講究録
第 661 巻 1988 年 221-230

平衡領域の乱流エネルギー・スペクトル

都立大・理　冨山泰伸　(Yasunobu Tomiyama)

§1．はじめに

Euler座標系に依拠した取り扱いで，DIA の欠点（慣性小領域の存在する程の高レイノルズ数の乱流では，その応答関数に発散が生じる）を取り除く理論は McComb，Qian によって提案されている。筆者も昨年のこの研究会に於て DIA の欠点を取り除くための理論を述べた。ここでは，理論の詳細には触れずに，その要約を述べるにとどめよう。

Navier-Stokes 方程式の非線形相互作用の項の Fourier 速度成分へ及ぼす影響を (1)振巾変動，(2)回転・位相変動の２つのタイプの効果に分離した近似を用い，それぞれの効果は応答関数に単に統計的に独立な影響を及ぼすとして，対応する２つの応答関数を導入した。これらの応答関数を用いた，閉じた乱流方程式系を定式化して，この方程式系が，慣性小領域においては，Kolmogorov spectrum を導くことは，既に述べた通りである。ここでは，この理論を用いて，普遍エネルギー・

スペクトルの形を見い出そうと思う。

§2. 乱流方程式

一様・等方性乱流を表わす諸量は次のようなものである。

$$\left.\begin{array}{ll} W(k,t) & :\text{エネルギー・スペクトル密度} \\ H(k,t) & :\text{エネルギー・伝達密度} \\ W(k:t,t') & :\text{エネルギー・応答関数} \\ \bar{G}(k;t,t') & ;\text{振巾応答関数} \\ \tilde{G}(k;t,t') & :\text{回転・位相応答関数} \end{array}\right\} \qquad (2.1)$$

さらに

$$\left.\begin{array}{l} \bar{W}(k;t,t') = W(k:t,t')/\tilde{G}(k:t,t') \\ G(k;t,t') = \bar{G}(k;t,t')\tilde{G}(k;t,t') \end{array}\right\} \qquad (2.2)$$

と定義して，これらの満す方程式は次のように表わされる。

エネルギー方程式：

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2\right] W(k,t) = H(k,t) \qquad (2.3)$$

$$H(k,t) = 2\pi k \int_0^\infty dp\, p^3 \int_{-1}^{1} d\mu\, b(p/k,\mu) \qquad (2.4)$$

$$\times \int_{t_0}^{t} ds\, [G(k;t,s)W(p;t,s) - W(k;t,s)G(p;t,s)]\, W(q:t,s)$$

エネルギー・応答方程式：

$$\left[\frac{\partial}{\partial t'} + \nu k^2 - \frac{5H(k,t')}{2W(k,t')}\right] \bar{W}(k:t,t') = H(k:t,t') \qquad (2.5)$$

$$H(k;t,t')=4\pi k\int_0^\infty dp\,p^3\int_{-1}^{1}d\mu\, b(p/k,\mu)\int_{t_0}^{t'}ds\,[\bar{W}(k;t,s)G(p;t',s)$$
$$-\bar{G}(k;t,s)W(p;t',s)]\,\tilde{G}(k;t',s)\,W(q;t',s) \qquad (2.6)$$

振巾応答方程式：

$$\left[\frac{\partial}{\partial t'}-\nu k^2-\frac{5H(k,t')}{2W(k,t')}\right]\bar{G}(k;t,t')=\bar{F}(k;t,t') \qquad (2.7)$$

$$\bar{F}(k;t,t')=\frac{4\pi k}{W(k,t')}\int_0^\infty dp\,p^3\int_{-1}^{1}d\mu\, b(p/k,\mu)\int_{t_0}^{t'}ds\,[\bar{W}(k;t,s)G(p;t',s)$$
$$-\bar{G}(k;t,s)W(p;t',s)]\,\tilde{G}(k;t',s)\,W(q;t',s) \qquad (2.8)$$

回転・位相応答方程式：

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}-\frac{H(k,t)}{2W(k,t)}\right]\tilde{G}(k;t,t')=\tilde{F}(k;t,t') \qquad (2.9)$$

$$\tilde{F}(k;t,t')=\frac{\pi k}{W(k,t)}\int_0^\infty dp\,p^3\int_{-1}^{1}d\mu\, b(p/k,\mu) \qquad (2.10)$$
$$\times\left\{\int_{t'}^{t}ds\,[\bar{G}(k;t,s)W(p;t,s)-\bar{W}(k;t,s)G(p;t,s)]\,\tilde{G}(k;s,t')\,W(q;t,s)\right.$$
$$\left.+\int_{t_0}^{t'}ds\,[\bar{G}(k;t,s)W(p;t,s)-\bar{W}(k;t,s)G(p;t,s)]\,\tilde{G}(k;t',s)\,W(q;t,s)\right\}$$

$$\bar{G}(k;t,t)=\tilde{G}(k;t,t)=1 \qquad (2.11)$$

ここで

$$b(k/p,\mu)=\left(\mu+\frac{kp}{q^2}\right)(1-\mu^2) \qquad (2.12)$$

(2.3) ~ (2.6) から次の関係式が得られる。

$$\left.\frac{\partial W(k;t,t')}{\partial t'}\right|_{t'=t} = \frac{1}{2}\frac{\partial W(k,t)}{\partial t} \qquad (2.13)$$

$$H(k;t,t) = 2H(k,t) \qquad (2.14)$$

また (2.7)～(2.11) より

$$\left.\frac{\partial \bar{G}(k;t,t')}{\partial t'}\right|_{t'=t} = \nu k^2 + \frac{H(k,t)}{2W(k,t)} \qquad (2.15)$$

$$\left.\frac{\partial \tilde{G}(k;t,t')}{\partial t}\right|_{t=t'} = 0 \qquad (2.16)$$

でなければならない。

§3. 定常乱流

慣性領域，粘性領域での普遍エネルギー・スペクトルを求めるために，波数 0 の付近で一定の割合のエネルギーを注入する。そのエネルギーが慣性領域を過て粘性領域へ流れ，散逸する定常乱流過程を考える。エネルギー散逸率を ϵ（即ちエネルギー供給率）とする。

定常性から， $W(k,t)\to W(k)$， $H(k,t)\to H(k)$，
$\bar{W}(k;t,t')\to W(k)\bar{R}(k,\tau)$， $\bar{G}(k;t,t')\to \bar{G}(k,\tau)$
$\tilde{G}(k;t,t')\to \tilde{G}(k,\tau)$， $W(k;t,t')\to W(k)R(k,\tau)$
$G(k;t,t')\to \bar{G}(k,\tau)\tilde{G}(k;\tau)$ のように表わすことができる。
従って (2.3)～(2.11) は次のようになる。

$$2\nu k^2 W(k) = H(k) + \frac{\epsilon f(k)}{2\pi k^2}, \quad \int_0^{k_0} f(k)\,dk = 1 \quad (k_0 \sim 0) \tag{3.1}$$

$$H(k) = 2\pi k \int_0^\infty dp\,p^3 \int_{-1}^{1} d\mu\, b(p/k, \mu)\, W(q)$$
$$\times \int_0^\infty ds\,[W(p)G(k.s)R(p.S) - W(k)\quad(k,s)G(p.S)]\,R(q.s) \tag{3.2}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial\tau} + \nu k^2 + \frac{3H(k)}{2W(k)}\right]\bar{R}(k,\tau) = \bar{F}(k,\tau) \tag{3.3}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial\tau} + \nu k^2 + \frac{5H(k)}{2W(k)}\right]\bar{G}(k,\tau) = \bar{F}(k,\tau) \tag{3.4}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{H(k)}{2W(k)}\right]\tilde{G}(k,\tau) = \tilde{F}(k,\tau) \tag{3.5}$$

$$\bar{F}(k,\tau) = \frac{4\pi k}{W(k)} \int_0^\infty dp\,p^3 \int_{-1}^{1} d\mu\, b(p/k,\mu)\, W(q)$$
$$\times \int_0^\infty ds\,[W(p)\bar{G}(k;\tau+s)R(p,s) - W(k)\bar{R}(k.\tau+s)G(p;s)]$$
$$\times \tilde{G}(k;s)\,R(q,s) \tag{3.6}$$

$$\tilde{F}(k,\tau) = \frac{\pi k}{W(k)} \int_0^\infty dp\,p^3 \int_{-1}^{1} d\mu\, b(p/k,\mu)\, W(q) \tag{3.7}$$
$$\times \int_0^\infty ds\,[W(k)\bar{R}(k,s)G(p.s) - W(p)\bar{G}(k.s)R(p,s)]\,\tilde{G}(k,|\tau-s|)R(q,s)$$

慣性領域 $(\nu \to 0)$ においては $\bar{R}(k.\tau) = \bar{G}(k.\tau)$ であることは (3.3), (3.4) から明らかである。$W(k)$ は Kolmogrov spectrum

$$W(k) = \frac{K_0}{2\pi}\epsilon^{2/3} k^{-11/3} \tag{3.8}$$

を解にもつこともわかる。更に (3.4) の解が

$$\bar{G}(k,\tau)=[1+\bar{\gamma}(k)\tau]e^{-\bar{\gamma}(k)\tau},\quad \bar{\gamma}(k)=\bar{D}\epsilon^{1/3}k^{2/3} \tag{3.9}$$

で表わされることがわかる。$\tilde{G}(k,\tau)$ の解の形は定かでないので,

$$\tilde{G}(k,\tau)=[1+\tilde{\gamma}(k)\tau]e^{-\tilde{\gamma}(k)\tau},\ \tilde{\gamma}(k)=\tilde{D}\epsilon^{1/3}k^{4/3} \tag{3.10}$$

と近似する。(3.8), (3.9), (3.10) を (3.1) を k に関して, K (慣性領域の任意の波数) から ∞ まで積分したエネルギー式, (3.4), (3.5) を t に関して 0 から ∞ まで積分した式に代入して, K_0, $\bar{D}$, $\tilde{D}$ の値を求めると.

$$K_0=1.4,\quad \bar{D}=0,\quad \tilde{D}=0.78 \tag{3.11}$$

が得られる。その他の値をとることができるが, 妥当性を欠くので, (3.11) を採用した。したがって, 慣性領域では, $\bar{R}(k,\tau)=\bar{G}(k,\tau)=1$ となり, 非線形相互作用の振巾に関する効果は無視できることを示している。即ち, 回転・位相変動に関与する非線形相互作用が, 応答関数に大きな影響を及ぼしていると解釈できる。

そこで, 粘性領域でも, 上の解釈は正しいものとして,

$$\bar{R}(k,\tau)=1,\quad \bar{G}(k,\tau)=1, \tag{3.12}$$

と近似し, さらに

$$\tilde{G}(k,\tau)=[1+\tilde{\gamma}(k)\tau]e^{-\tilde{\gamma}(k)\tau},\quad \tilde{\gamma}(k)=\tilde{D}\epsilon^{1/3}k^{2/3}\omega(x) \tag{3.13}$$

$$W(k)=\frac{K_0}{2\pi}\epsilon^{2/3}k^{-11/3}F(x) \tag{3.14}$$

$$x=k/k_d. \qquad (k_d=(\epsilon/\nu^3)^{1/4})$$

とおく。(3.12), (3.13), (3.14) を (3.1) と (3.4) に代入して,

$$W(k)=\frac{2\pi k\int_0^\infty dp\,p^3W(p)\int_{-1}^1 d\mu\, b(p/k,\mu)W(q)\theta(k,p,q)+\epsilon f(k)/2\pi k^2}{2\pi k\int_0^\infty dp\,p^3\int_{-1}^1 d\mu\, b(p/k,\mu)W(q)\theta(k,p,q)+2\nu k^2} \tag{3.15}$$

$$\gamma(k)=\frac{\pi k}{W(k)}\int_0^\infty dp\,p^3\int_{-1}^1 d\mu\, b(p/k,\mu)W(q) \tag{3.16}$$

$$\times\{W(p)[\omega(k,p,q)-3\theta(k,p,q)]-W(k)[\omega'(k,p,q)-3\theta(k,p,q)]\}$$

$$\omega(k,p,q)=4\left\{\frac{1}{[2\nu k^2+\gamma(p)+\gamma(q)]}+\frac{\gamma(p)+\gamma(q)}{[2\nu k^2+\gamma(p)+\gamma(q)]^2}\right.$$

$$\left.+\frac{2\gamma(p)\gamma(q)}{[2\nu k^2+\gamma(p)+\gamma(q)]^3}\right\}-\left\{\frac{1}{[\gamma'(k)+\gamma(p)+\gamma(q)]}+\frac{\gamma(p)+\gamma(q)}{[\gamma'(k)+\gamma(p)+\gamma(q)]^2}\right.$$

$$\left.+\frac{2\gamma(p)\gamma(q)}{[\gamma'(k)+\gamma(p)+\gamma(q)]^3}\right\} \tag{3.17}$$

$$\omega'(k,p,q)=4\left\{\frac{1}{[\gamma'(p)+\gamma(q)]}+\frac{\gamma(p)+\gamma(q)}{[\gamma'(p)+\gamma(q)]^2}+\frac{2\gamma(p)\gamma(q)}{[\gamma'(p)+\gamma(q)]^3}\right\}$$

$$-\left\{\frac{1}{\gamma(k)+\gamma'(p)+\gamma(q)}+\frac{\gamma(p)+\gamma(q)}{[\gamma(k)+\gamma'(p)+\gamma(q)]^2}+\frac{2\gamma(p)\gamma(q)}{[\gamma(k)+\gamma'(p)+\gamma(q)]^3}\right\}$$

(3.18)

$$\theta(k,p,q)=\frac{1}{[\gamma'(k)+\gamma(p)+\gamma(q)]}+\frac{\gamma(k)+\gamma(p)+\gamma(q)}{[\gamma'(k)+\gamma(p)+\gamma(q)]^2}$$

$$+\frac{2[\gamma(p)\gamma(q)+\gamma(q)\gamma(k)+\gamma(k)\gamma(p)]}{[\gamma'(k)+\gamma(p)+\gamma(q)]^3}+\frac{6\gamma(k)\gamma(p)\gamma(q)}{[\gamma'(k)+\gamma(p)+\gamma(q)]^4} \tag{3.19}$$

$$\gamma'(k)=\gamma(k)+2\nu k^2. \tag{3.20}$$

の形で $W(k)$, $\gamma(k)$ が表わされる。

$F(x)$, $\omega(x)$ に適当な関数形を仮定し，(3.15), (3.16)の右辺に代入して，数値的に $F_1(x)$, $\omega_1(x)$ を求めた。その際，x を $0\leqq x\,(=k/k_d)\leqq 1$ の範囲を $N=100$ の区間に分け，p と μ について数値積分（p は 63 区間; μ は 127 区間）を行った。同様に $F_1(x)$, $\omega_1(x)$ を (3.15), (3.16) の右辺に代入して，$F_2(x)$ $\omega_2(x)$ を求め… と繰り返し計算を行い，$F(x)$, $\omega(x)$ を求めた。$\langle\Delta F_i\rangle=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}[F_i(x_n)-F_{i-1}(x_n)]/F_{i-1}(x_n)$

$\langle\Delta\omega_i\rangle=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}[\omega_i(x_n)-\omega_{i-1}(x_n)]/\omega_{i-1}(x_n)$ とするとき

$\langle\Delta F_i\rangle\cong 0.013$，$\langle\Delta\omega_i\rangle\cong 0.03$ 程度のところで計算を打切った。その結果，得られた普遍エネルギー・スペクトルは図に示す通りである。

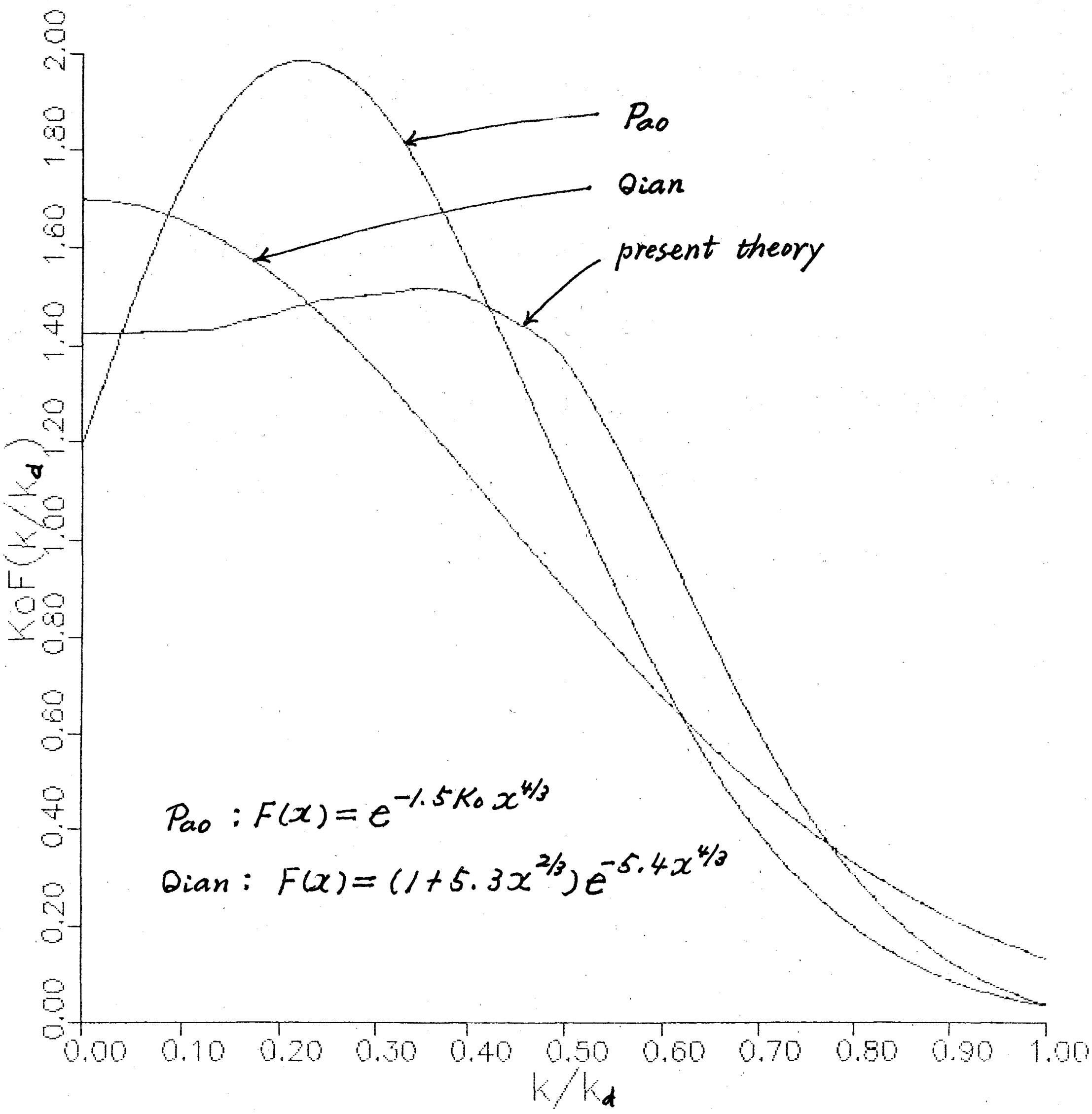
§4. 結び

ここで用いた理論では非線形相互作用を，振巾変動，回転・位相変動に寄与する2つの形に分け，それぞれが，統計的

に独立に応答に作用するとして，振巾応答関数，回転・位相応答関数を導入している。慣性領域における計算結果から，$\bar{R}(k,\tau)=\bar{\Theta}(k,\tau)=1$ であり，これから，一般に，振巾応答は回転・位相応答にくらべ鈍いものと推察される。従って，乱流は過去の情報を主に回転や位相の変動によって失われているものと思われる。

普遍エネルギー・スペクトルの結果はおおむね妥当なものと考えられるが skewness などの他の物理も調べ，もっと広い角度から，実験結果と比較する必要があるだろう。更に他の理論との比較も必要で，この理論の位置づけも，それによって，明らかになるであろう。

普遍エネルギー・スペクトル



Pao : $F(x) = e^{-1.5 K_0 x^{4/3}}$

Qian : $F(x) = (1 + 5.3 x^{2/3}) e^{-5.4 x^{4/3}}$