数理解析研究所講究録
第662巻 1988年 148-179

Atiyah-Jones Conjecture and Yang-Mills Fields over Cohomogeneity One Manifolds

by Hajime Urakawa

東北大学 教養部　浦川 肇

序　この講演の目的は、リーマン多様体に大きなコンパクト・リー群が作用している時、この群作用について不変なYang-Mills接続の一般理論を展開することであり、これはEinstein計量の時の、D.PageやL.Berard Bergeryの理論、対称空間内の極小部分多様体の時のW.Y.Hsiangの理論等に対するゲージ理論版とも言うべきものである。

我々の研究の動機はゲージ理論における次の著名な予想にある：

Atiyah-Jones予想 (Comm. M.P., 61(1978), 97-118)

(S^4, can) 上のSU(2)-主束の上に、自己双対でも反自己双対でもないYang-Mills接続が存在するか？

[予想は、存在しないであろう。]

J.P. Bourguignon (Jber. d. Dt. Math.-Verein., (1985), 67-89) に

よれば、主束の構造群が、SU(3), U(2) の時も問題とのことである。実際、Bourguignon-Lawson は次の定理を示した：

定理（Comm. M. P., 79 (1982), 189-230）

(S^4, can) 上の、SU(2), SU(3) 又は U(2)-主束上の弱安定な Yang-Mills 接続は、自己双対か又は反自己双対となる。

従って、問題は、不安定な Yang-Mills 接続を捜さねばならない（もし存在するならば）。他方、伊藤光弘氏（Trans. A. M. S., 267 (1981), 229-236）によれば、

定理

(S^4, can) 上の SU(k)-等質主束上のカノニカル接続に対し、

(i) $k=2, 3$ の時、自己双対か又は反自己双対、

(ii) $k \geq 4$ の時、自己双対でも反自己双対でもない Yang-Mills 接続となる。

このような研究状況にある中で、Atiyah-Jones 予想にアプローチする時、Yang-Mills 接続を含む他の重要な変分問題から生ずる諸理論をここで比較対照しておくことは無駄ではあるまいと思われる。

ここで、定義をふり返ると、

[1] Yang-Mills 接続とは

コンパクト・リー群 G に対し，P をコンパクト・リーマン多様体 (M,g) 上の G-主束とした時，P 上の接続 ω に対し，Yang-Mills 汎関数 $E(\omega)$ を，

$$E(\omega) := \frac{1}{2}\int_M \|\Omega^\omega\|^2 \, dv_g$$

で与える。ここで，Ω^ω は ω の曲率形式である（詳しくは §1）。この時，ω が Yang-Mills 接続であるとは，ω が E の臨界点，すなわち，P 上の $\omega_0 = \omega$ となる任意の，接続の1径数族，ω_t，$-\varepsilon < t < \varepsilon$，に対して，

$$\frac{d}{dt} E(\omega_t)\Big|_{t=0} = 0,$$

となる時を言うのであった。

[2] Einstein 計量

コンパクト多様体 M 上のリーマン計量 g に対して，

$$E(g) := \int_M S_g \, dv_g \quad （全スカラー曲率）$$

を考える，ここで S_g は (M,g) のスカラー曲率。この時，Ric_g を g のリッチ・テンソルとした時，次が成立：

g が Einstein，i.e.，$\mathrm{Ric}_g = c\,g \iff g$ は E の臨界点．(D.Hilbert の定理)

[3] 調和写像とは

二つのコンパクト・リーマン多様体 (M,g), (N,h) の間の滑らかな写像 ϕ; $M \to N$ に対して、エネルギー

$$E(\phi) := \frac{1}{2}\int_M \|d\phi\|^2 dv_g$$

を考える。この時、ϕ が調和写像であるとは、ϕ が E の臨界点の時を言う。

この様に幾何学において重要な三つの理論はいづれも、変分原理によって、自然に導びかれるのであるが、これら、三者の理論の間には以下のように多くの点でその類似性が認められる。これらはもともと、物理学，特に場の理論から来たものであることを思えば当然とも言えよう。

場の理論によれば、自然界には4種の力……重力，電磁気力，弱い相互作用，強い相互作用……が存在し、重力はEinsteinによる相対性理論，電磁気力はMaxwellの理論，弱い相互作用はYang-Millsの理論，強い相互作用は量子色力学により記述され、いづれも広い意味でのゲージ理論として理解されるとのことであるが、近年，これら4つの力をまとめて統一する可能性をもつ理論として(超)弦理論がにわかに注目を浴びる様になった。これらの様々な動きを耳学問で知るに

つけ、以下の対照表は何か、統一場の理論の可能性を支持しているものの様にも思え、小生には興味深く感じている：

物理	重力理論	弦理論 (非線形シグマ・モデル)	ゲージ理論
数学	Einstein 計量	調和写像 (極小部分多様体)	Yang-Mills 接続
E の極小性 (複素構造)	Einstein-Kähler 計量	Kähler 多様体の間の正則写像	(反) 自己双対接続
解析性	Einstein 計量の調和座標による実解析性	Uhlenbeck による除去可能特異点定理	Uhlenbeck, 中島 らによる除去可能特異点、定理
モジュライ	Berger-Ebin, 小林 らによる E-計量の変形理論	リーマン面から対称空間への調和写像の Twistor 構成理論	自己双対接続のモジュライ理論
等質性	Jensen, Ziller らによる等質空間上の群不変な Einstein 計量の構成 注)	Hsiang-Lawson, 高木-高橋, 尾関-竹内 らによる球面内の等質極小超曲面の分類他.	伊藤, Unger らによる等質空間上の群不変 Yang-Mills 接続の理論
概等質性	Page, Berard Bergery らによる $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ 上の非等質 Einstein 計量の構成	Hsiang による. S^n 内の極小超曲面の多数構成. (球面 Bernstein 予想の反例)	?

注) M. Y. Wang & W. Ziller, Einstein metrics on principal torus bundles (プレプリント) によれば、最近、M. Kreck & S. Stolz, A diffeomorphism classification of 7-dimensional homogeneous Einstein manifolds with $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ symmetry, (to appear in Ann. Math.) により、$\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^2$ 上の S^1 束となる 7 次元等質空間 $M^{1,2}_{k,l} := U(2)\times U(3) / U(1)\times U(2)\times U_{k,l}$, ここで、$U_{k,l}$ は

$U_{k,l} := \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{il\theta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & e^{-ik\theta} \end{pmatrix} \right) : \theta \in \mathbb{R} \right\}$, k, l は整数, $(k,l)=1$ なら $M^{1,2}_{k,l}$ は単連結。l を $l \equiv 0\ (4)$, $l \equiv 0, 3, 4\ (7)$, かつ $l \neq 0$ にとると、

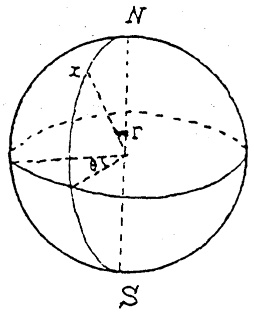
$$M^{1,2}_{k,l} \approx M^{1,2}_{k',l} \ (\text{位相同相}) \Longleftrightarrow k \equiv k' \ (\mathrm{mod}\ 2l^2).$$

$$M^{1,2}_{k,l} \cong M^{1,2}_{k',l} \ (\text{微分同相}) \Longleftrightarrow k \equiv k' \ (\mathrm{mod}\ 2\cdot 28\, l^2)$$

となり、特に、1つの位相同相類の中に、28個の異なる微分同相類をもつ例が、この様な簡単なコンパクト等質空間から作られ、いずれも、群不変Einstein計量をもつという結果が得られている。

さて、等質空間ですらこの様に豊富な多様性を持っているのであるが、それから少しズレた、非等質ではあるが、かなり十分な対称性をもつもの、それが、我々のテーマである概等質，cohomogeneity one,…，常微分方程式の使える世界の理論である。我々は、?の部分に当る空隙を埋めることが目標であるが、Einstein計量や調和写像の理論では、興味ある例がたくさん構成されているので、我々の理論においても、かなりの事を期待したいのである。なお、S^4上の回転不変な場合は、Taubes [T]、$\mathbb{C}P^2$上の自己双対接続の場合は古田幹雄氏[F]の先行する研究があり、我々は、これらの結果を包括する一般論と、他の場合への応用をめざす。

ここで、概等質，cohomogeneity one，の概念について、例を2次元球面S^2上の帯球関数の理論に取って、我々が以下で為すべき事のひな型としよう：



S^2 上のラプラシアン Δ の固有値問題

$$\Delta f = \lambda f , \quad f \in C^{\infty}(S^2),$$

を解くに当り、これを N-S を軸とする回転不変性の条件：

$$f(kx) = f(x), \quad k \in O(2), \quad x \in S^2,$$

の下で考えれば、これは容易である。実際、f は $r = \mathrm{dist}(x, N)$、のみの関数 $\tilde{f}(r)$ で書けている，$f(x) = \tilde{f}(r)$，ことに注意すると、

(1) $\Delta f = \lambda f \iff -\tilde{f}'' - \cot(r)\,\tilde{f}' = \lambda \tilde{f}, \quad 0 < r < \pi,$

となる。ここで、$\tilde{f}' := \frac{d}{dr}\tilde{f}$，$\tilde{f}'' := \frac{d^2}{dr^2}\tilde{f}$。こうして、常微分方程式(1)を解けば良いのであるが、この時，(1)の解 $\tilde{f}$ が、いつ S^2 全体に延長されるかという問題が生じる。今の場合、

(2) $r = \mathrm{dist}(x, N)$ のみの，$0 < r < \pi$ で定義された滑らかな関数 $\tilde{f}$ が S^2 全体で定義された滑らかな関数に延長されるための必要十分条件は，$\tilde{f}$ が、$r = 0, \pi$ の外に少し滑らかに延び、かつ $\tilde{f}(-r) = \tilde{f}(r)$，$\tilde{f}(\pi - r) = \tilde{f}(\pi + r)$，が成り立つことである。（この証明には $r = 0, \pi$ での奇数次の微係数がすべて零となることを本質的に用いる。）

こうして、(2) の"境界条件"の下に、(1) を解くことに問題が帰着されるのであった(いわゆる「変数分離法」)。

我々が以下に為すべき事は、Yang-Mills 接続や(反)自己双対接続に対して、この変数分離法を行った時、

(1) 常微分方程式(系)はどうなるか?

(2) M, あるいは P 全体に滑らかに延長される条件?

等について求めよう。そして、具体的な場合にこれらの解法を遂行し、その応用について若干述べよう。

§1. Yang-Mills 接続

P をコンパクト・リーマン多様体 (M, g) 上の、コンパクトリー群 G を構造群にもつ主束とする。P 上の接続 ω とは、

(i) ω は P 上の $\mathfrak{g}$-値 1 形式で、($\mathfrak{g} := G$ のリー環)、

(ii) $\omega(A^*) = A$, $A \in \mathfrak{g}$,

(iii) $R_a^* \omega = Ad(a^{-1})\omega$, $a \in G$,

を満すものを言う。ここで、$A \in \mathfrak{g}$ に対し、A^* は P 上のベクトル場で、(基本ベクトル場と呼ばれている)、

$$A^*_p := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} p \exp tA , \quad p \in P$$

で与えられる。$R_a^* \omega$ は、$R_a : P \ni p \longmapsto pa \in P$ による ω の引き戻しである。この時、$p \in P$ での接空間 T_pP は、

$$T_pP = V_p \oplus H_p .$$

と直和分解する。ここで、射影 $\pi ; P \to M$ に対して、

$$V_p = \mathrm{Ker}(\pi_*) = \{A_p^* ; A \in \mathfrak{g}\},\quad H_p = \{v \in T_pP ; \omega(v) = 0\},$$

である。$T_pP \ni X = X^V + X^H$, $X^V \in V_p$, $X^H \in H_p$ について、X^V, X^H をそれぞれ X の垂直成分，水平成分という。

接続 ω の曲率形式 Ω^ω とは、

$$\Omega^\omega(X, Y) = d\omega(X^H, Y^H),\quad X, Y \in T_pP,$$

で与えられる P 上の $\mathfrak{g}$-値 2形式であって、

(i) $\Omega^\omega(X, Y) = 0$,　X 又は $Y \in V_p$,

(ii) $R_a^* \Omega^\omega = Ad(a^{-1}) \Omega^\omega$,　$a \in G$,

を満している。従って、$\mathfrak{g}$ 上の $Ad(G)$-不変内積 $\langle\ ,\ \rangle$ について、内積 $\langle \Omega^\omega, \Omega^\omega \rangle$ が定義でき、しかも M 上の関数と考えて良いことがわかる。こうして、Yang-Mills 汎関数

$$E(\omega) := \frac{1}{2}\int_M \langle \Omega^\omega, \Omega^\omega \rangle\, dv_g$$

が与えられる。Yang-Mills 接続 ω とは、ω の任意の変分、ω_t, $-\varepsilon < t < \varepsilon$,（$\omega_0 = \omega$ となる P 上の接続の1径数族）に対して、

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} E(\omega_t) = 0 .$$

の時を言うのであった。この時，ω_t を $\omega_t = \omega + \alpha_t$，ここで，$\alpha_t$ は P 上の $\mathfrak{g}$-値 1 形式，と書き，$\alpha := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \alpha_t$ とし，$D\alpha(X,Y) := d\alpha(X^H, Y^H)$，$D^*$ は D の形式随伴とすると，

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} E(\omega_t) = \int_M \langle D\alpha, \Omega^\omega \rangle dv_g = \int_M \langle \alpha, D^*\Omega^\omega \rangle dv_g$$

より，次を得る：

$$\omega \text{ が Yang-Mills 接続} \Leftrightarrow D^*\Omega^\omega = 0 .$$

しかし，一般に，方程式 $D^*\Omega^\omega = 0$ を解くことは難しい。

$\dim M = 4$ の時には，特別の事情があり，Hodge の $*$-作用素を Ω^ω にまで拡張した時，

ω が自己双対 $\Leftrightarrow * \Omega^\omega = \Omega^\omega$，

反自己双対 $\Leftrightarrow * \Omega^\omega = -\Omega^\omega$，

と定義した時，これらは共に Yang-Mills 接続となることが知られている。[近年，新田貴士氏により，$\dim M = 4k$ なる四元数 Kähler 多様体の場合に，(反)自己双対接続の概念が拡張され，やはり Yang-Mills 接続を与えることが得られた。]

Atiyah-Jones の予想は，これらの事実の逆の問題を問うているのである。

§2. cohomogeneity one リーマン多様体

さて，常微分方程式（系）によって物事が記述されるためには次の様な状況を考えねばならない：

コンパクト・リーマン多様体 (M, g) の等長変換群 $Iso(M, g)$ の閉部分群 K が M に cohomogeneity one に作用しているとは，

$$\exists\, x \in M \ : \ \dim(Kx) = \dim M - 1$$

の時をいう。この時，K は M に非推移的であるが，この軌道空間 $_K\backslash^M$ は，1次元的で，

$$\text{(i)}\ S^1 \quad \text{か又は，} \quad \text{(ii) 閉区間}\ [0, \ell]$$

となることが知られている。以下では，我々は専ら (ii) の場合のみを考えることとする。[(i) の場合，M を向きづけ可能とすると，$M = S^1 \times N$，$\dim N = \dim M - 1$ となってしまうので。]

この時，軌道空間 $_K\backslash^M$ の代表元として，長さ t でパラメータ化された (M, g) の測地線 $c(t)$，$0 \leqq t \leqq \ell$，が取れ，$x = c(t_0)$，$0 < t_0 < \ell$，であって，次の諸事実が知られている (Berard Bergery [B.B])：

(i) $0 < t < \ell$ に対して，$\dim K c(t) = \dim M - 1$，

(ii) $c(t)$ における等方部分群 $J_t := \{k \in K \,;\, k c(t) = c(t)\}$ に対し，$0 < t < \ell$ に対し，$J_t = J$ (共通) $\subset J_0, J_\ell$.

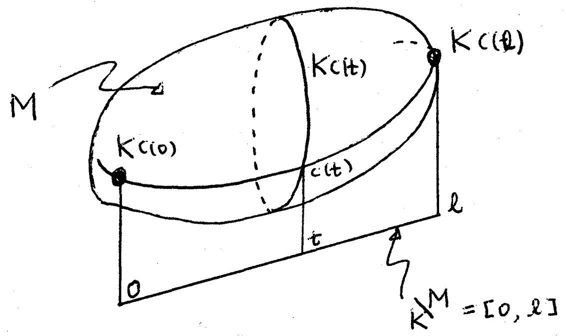
(iii) 写像 F ; $K/J \times [0,\ell] \ni (kJ, t) \longmapsto kc(t) \in M$ は滑らかで、F を $K/J \times (0,\ell)$ に制限した F の像は、M の開かつ稠密な部分集合となる。

(iv) J_0/J, J_ℓ/J は何次元かの球面で、射影

$$q : M \longrightarrow K\backslash M = [0,\ell]$$

について、$q^{-1}([0,\frac{\ell}{2}])$, $q^{-1}([\frac{\ell}{2},\ell])$ は共に、閉ディスク束で、それらの境界を、$Kc(\frac{\ell}{2})$ で貼り合わせて、M を得る。

(v) $g(\dot{c}(t), T_{c(t)}(Kc(t))) = 0$, $0<t<\ell$.



このような cohomogeneity one となる K 作用をもつコンパクト・リーマン多様体 (M,g) 上の G-主束としては、我々は次のような K-不変なものを考える：

すなわち、K は P にも作用しており、

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\tau_k} & P \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ M & \xrightarrow{\tau_k} & M \end{array} \quad (\text{可換}), \qquad \begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\tau_k} & P \\ {\scriptstyle R_a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle R_a} \\ P & \xrightarrow{\tau_k} & P \end{array} \quad (\text{可換})$$

となるものを考える。ここで、K の作用を τ_k, $k\in K$ と書いた。

このような主束Pが、どれくらいあるか、$M=\mathbb{C}P^2$ の時に古田氏[F]が調べておられる。次の様になっている：

今、PをK-不変G-主束とする。$u(t)\in P$ を、$c(t)$ の任意のリフト, i.e., $\pi(u(t))=c(t)$, $0\leqq t\leqq \ell$, とする。この時、ホロノミー表現 λ_t ; $J_t\to G$ が、$\pi(j\,u(t))=j\,\pi(u(t))=\pi(u(t))$, $j\in J_t$ より、

$$j\,u(t)=u(t)\,\lambda_t(j)\ ,\quad j\in J_t\ ,$$

より定まる。$c(t)$ の別のリフト $u'(t)$ を取ると、$u'(t)=u(t)\,s(t)^{-1}$, $s(t)\in G$, と書けるので、$u'(t)$ に関するホロノミー表現 λ'_t ; $J_t\to G$, は

$$\lambda'_t(j)=s(t)\,\lambda_t(j)\,s(t)^{-1},\quad j\in J_t\ ,\quad 0\leqq t\leqq \ell\ ,$$

を満たす。この様な $\lambda=(\lambda_t)$, $\lambda'=(\lambda'_t)$ とは、同値であるとして、$\lambda\sim\lambda'$ と書くことにすれば、

$$\Pi:=\{\lambda=(\lambda_t)\ ;\ \lambda_t: J_t\to G \text{ 準同型}\}/\sim$$

が得られる。逆にこの元 $\lambda=(\lambda_t)\in\Pi$ に対し、

$$P_\lambda:=K\times[0,\ell]\times G/\sim\ ,\quad \text{ここで、}(kj,t,g)\sim(k,t,\lambda_t(j)g),\ j\in J_t\ ,\ 0\leqq t\leqq \ell,$$

によって主束 P_λ を定めたい。ただし、K, G の P_λ への作用は、

$$k\,[(k',t,g')]\,g:=[(kk',t,g'g)]$$

で与える。この際、P_λ の局所自明性が問題となる：

今，P_λ の局所切断 s_0 があれば，

$$s_0(kc(t)) = [(k, t, \varphi(k,t))], \quad \varphi(k,t) \in G,$$

と書けるが，これは $[(kj, t, \varphi(kj,t))] = [(k, t, \varphi(k,t))]$, $j \in J_t$, を満していなければならない。我々は，そこで，簡単のため，

$$\Pi' := \{\lambda = (\lambda_t) \in \Pi \,;\, \text{次の条件 (i), (ii) をみたす}\},$$

を考える。ここで，

(i) λ_0, λ_ℓ は各 λ_t, $0<t<\ell$, の拡張である（$J_t \subset J_0, J_\ell$ より），

(ii) $\exists\ \varphi, \psi \,;\, K \to G$ 滑らかな写像で，

$\varphi(kj) = \lambda_0(j^{-1})\varphi(k)$, $j \in J_0$, $k \in K$ 　かつ

$\psi(kj) = \lambda_\ell(j^{-1})\psi(k)$, $j \in J_\ell$, $k \in K$.

である。この時，各 $\lambda = (\lambda_t) \in \Pi'$ に対し，対応する P_λ は局所自明性をもち，K-不変な G-主束となる。

［実際］点 $c(0)$, $c(\ell)$ の近傍上の局所切断 s_0, s_ℓ として，

$$s_0(kc(t)) := [(k, t, \varphi(k))], \quad s_\ell(kc(t)) := [(k, t, \psi(k))],$$

が取れる。実際，$j \in J_t$ に対し，（$0 \leqq t < \ell$）

$$\begin{aligned} (kj, t, \varphi(kj)) &= (kj, t, \lambda_0(j)^{-1}\varphi(k)) && \text{((ii) より)}, \\ &= (kj, t, \lambda_t(j^{-1})\varphi(k)) && \text{((i) より)} \\ &\sim (k, t, \varphi(k)) && (\sim \text{の定義}) \end{aligned}$$

すなわち，$[(kj, t, \varphi(kj))] = [(k, t, \varphi(k))]$ より，s_0 は局所切断である。同様に s_ℓ についても言える。

注意　上の条件 (ii) における φ, ψ は、$\varphi(e)=e$, $\psi(e)=e$ を満すとして一般性を失わない。実際、

$$\varphi'(k) := \varphi(k)\,\varphi(e)^{-1}, \quad \psi'(k) := \psi(k)\,\psi(e)^{-1}$$

を考えればよいから。この時、

$$u_0(t) := [(e, t, e)], \quad 0 \leqq t \leqq \ell,$$

は、$c(t)$ のリフトを与え、

$$s_0(kc(t)) = k\,u_0(t)\,\varphi(k), \quad s_\ell(k\,c(t)) = k\,u_0(t)\,\psi(k),$$

特に、

$$s_0(c(t)) = u_0(t), \quad s_\ell(c(t)) = u_0(t),$$

を満たす。

§3. K-不変接続

K-不変 G-主束 P 上の接続 ω が K-不変 とは

$$\tau_k{}^*\omega = \omega, \quad k \in K$$

の時を言う。我々に与えられた問題は次の問題である：

問題

K-不変 Yang-Mills 接続、(反)自己双対接続をさがせ。

(i) $0<t<\ell$ 上で満すべき常微分方程式(系)は何か？

(ii) $t=0, \ell$ での境界条件、P 上全体で滑らかになる条件？

このために，まず，K-不変接続がどの様に与えられるかを調べておこう。

補題3.1.

Pへの $c(t)$ のリフトを $u(t)$ とする。この時，Pの部分集合

$$\mathrm{int}(P) := \{ k\,u(t)\,a \ ; k \in K,\ 0 < t < \ell,\ a \in G \}$$

は，開かつ稠密な部分集合で，$0 < t < \ell$ に対し，

$$T_{u(t)}P = \mathbb{R}\,\dot{u}(t) \oplus T_{u(t)}(K\,u(t)) \oplus V_{u(t)}$$

が成り立つ。

後半は，π_*(右辺) $= T_{c(t)}M$ に注意すればよい。

命題3.2.

K-不変接続 ω に対し，線形写像 $\Lambda_t : \mathfrak{k} \to \mathfrak{g}$ を，

$$\Lambda_t(X) := \omega_{u(t)}(\tilde{X}_{u(t)}), \quad X \in \mathfrak{k},$$

で与える。ここで，P上のベクトル場 $\tilde{X}$，$X \in \mathfrak{k}$，は，

$$\tilde{X}_p := \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp sX \cdot p, \quad p \in P,$$

で与えられている。この時，$0 < t < \ell$，に対し次が成立；

(1) $\Lambda_t(X) = \lambda_t(X)$, $X \in \mathfrak{j} :=$ J_t のリー環，

(2) $\Lambda_t(\mathrm{Ad}(j)X) = \mathrm{Ad}(\lambda_t(j))\,\Lambda_t(X)$, $X \in \mathfrak{k}$, $j \in J_t$.

また、 $\omega(\dot{u}(t)) \in \mathfrak{g}$ は、

$$(3) \qquad Ad(\lambda_t(j))\,\omega(\dot{u}(t)) \equiv \omega(\dot{u}(t)),$$

を満たす。逆に (1), (2), (3) を満す $\Lambda_t ; \mathfrak{k} \to \mathfrak{g}$ と $\omega(\dot{u}(t)) \in \mathfrak{g}$ が与えられた時、

$$\omega(\tau_{k*} R_{a*}(r\,\dot{u}(t) + \tilde{X}_{u(t)} + A^*_{u(t)})) = Ad(a^{-1})(r\,\omega(\dot{u}(t)) + \Lambda_t(X) + A),$$

$k \in K$, $a \in G$, $r \in \mathbb{R}$, $0 < t < \ell$, とすると、 ω は P 内の部分集合 $\mathrm{int}(P)$ 上の滑らかな K-不変接続を与える。

§4. 滑らか拡張条件

この § では次の問題の完全な答を与える：

問題

P 内の開かつ稠密な部分集合 $\mathrm{int}(P)$ 上の滑らかな K-不変接続が P 全体で滑らかとなるための必要十分条件は何か？

K, $J = J_t$ $(0 < t < \ell)$, J_0, J_ℓ のリー環を、$\mathfrak{k}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{j}_0$, $\mathfrak{j}_\ell$ とする。

$$\mathfrak{k} = \underbrace{\mathfrak{j} \oplus \mathfrak{t}_0}_{=\,\mathfrak{j}_0} \oplus \mathfrak{m}_0 = \underbrace{\mathfrak{j} \oplus \mathfrak{t}_\ell}_{=\,\mathfrak{j}_\ell} \oplus \mathfrak{m}_\ell$$

と、$\mathfrak{k}$ 上の $Ad(K)$-不変内積に関する $\mathfrak{k}$ の直交分解を取る。

命題 4.1.

$u_0(t)$ は、§2.注意における $c(t)$ のリフトとしておく。

$\mathrm{int}(P)$ 上の K-不変接続 ω が P 全体に C^∞ 級に拡張されるための必要十分条件は次の通り：

(I) $t=0$ において

(i) $X \in \mathfrak{k}_0$, $\exp 2\pi X \in J$ に対して

(i-1) $Ad(\exp \pi \lambda_0(X))\,\omega(\dot{u}_0(t)) = -\omega(\dot{u}_0(t))$, かつ

$$Ad(\exp \pi \lambda_0(X))\,\Lambda_t(X) = \Lambda_{-t}(X), \qquad |t| < \varepsilon,$$

(i-2) $\Lambda_0(X) = \lambda_0(X)$, かつ $\omega(\dot{u}_0(0)) = \sum_{\mu_j=1} (b_j X_j + c_j Y_j)$, $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Lambda_t(X) = \sum_{\mu_j=1} (-c_j X_j + b_j X_j)$,

$\ell \geqq 1$ に対し、

$$\left.\frac{d^{2\ell}}{dt^{2\ell}}\right|_{t=0} \omega(\dot{u}_0(t)),\ \left.\frac{d^{2\ell+1}}{dt^{2\ell+1}}\right|_{t=0} \Lambda_t(X) \text{ は、} \sum_{\mu_j=\mathrm{odd}} (b'_j X_j + c'_j Y_j) \text{ の形},$$

$$\left.\frac{d^{2\ell-1}}{dt^{2\ell-1}}\right|_{t=0} \omega(\dot{u}_0(t)),\ \left.\frac{d^{2\ell}}{dt^{2\ell}}\right|_{t=0} \Lambda_t(X) \text{ は、} \sum_i a''_i H_i + \sum_{\mu_j=\mathrm{even}} (b''_j X_j + c''_j Y_j) \text{ の形}.$$

をしている。ここで、$\{H_1, \cdots, H_p, X_1, Y_1, \cdots, X_q, Y_q\}$ は $\mathfrak{g}$ の基底で、

$$[\lambda_0(X), H_i] = 0,\ [\lambda_0(X), X_j] = \mu_j Y_j,\ [\lambda_0(X), Y_j] = -\mu_j X_j,\quad \mu_j > 0$$

を満すものを取る。

(ii) $j \in J_0$, $j\,c(t) = c(-t)$, $|t| < \varepsilon$, $Y \in \mathfrak{m}_0$ に対して、

(ii-1) $Ad(\lambda_0(j))\,\omega(\dot{u}_0(t)) = \omega(\dot{u}_0(t))$,

(ii-2) $Ad(\lambda_0(j))\,(\Lambda_t(Ad(j^{-1})Y)) = \Lambda_{-t}(Y)$.

(II) $t=\ell$ において

(i′) $X' \in \mathfrak{k}_\ell$, $\exp 2\pi X' \in J$ に対して

(i′-1) $\mathrm{Ad}(\exp \pi \lambda_\ell(X'))\,\omega(\dot{u}_0(\ell+t)) = -\,\omega(\dot{u}_0(\ell-t))$,

$\mathrm{Ad}(\exp \pi \lambda_\ell(X'))\,\Lambda_{\ell+t}(X') = \Lambda_{\ell-t}(X')$, $\quad |t|<\varepsilon$,

(i′-2) $\Lambda_\ell(X')=\lambda_\ell(X')$ かつ $t=\ell$ での（高次）微係数 $\left.\frac{d^k}{dt^k}\right|_{t=\ell}\omega(\dot{u}_0(t))$, $\left.\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}\right|_{t=\ell}\Lambda_t(X')$, $k\geq 1$, は，$[\lambda_\ell(X'), H_i']=0$, $[\lambda_\ell(X'), X_j']=\mu_j' Y_j'$, $[\lambda_\ell(X'), Y_j'] = -\mu_j' X_j'$, $\mu_j'>0$ を満す $\mathfrak{g}$ の基底 $\{H_i', X_j', Y_j'\}$ に関して (i-2) と同じ形をしている。

(ii′) $j'\in J_\ell$, $j'c(\ell+t)=c(\ell-t)$, $|t|<\varepsilon$, $Y'\in \mathfrak{m}_\ell$ に対して，

(ii′-1) $\mathrm{Ad}(\lambda_\ell(j'))\,\omega(\dot{u}_0(\ell+t)) = \omega(\dot{u}_0(\ell-t))$,

(ii′-2) $\mathrm{Ad}(\lambda_\ell(j'))\,(\Lambda_{\ell+t}(\mathrm{Ad}(j'^{-1})Y')) = \Lambda_{\ell-t}(Y')$,

のすべてが成り立つことである。

§5. Yang-Mills 接続の常微分方程式(系)

この§では K-不変 Yang-Mills 接続，自己双対接続，等の満すべき常微分方程式系を与える。

まず，M上の K-不変なリーマン計量 h についてであるが，

$$h = dt^2 + k_t,$$

なる形をしていることに注意する。ここで，k_t は各 K-軌道 $Kc(t)$ 上の K-不変なリーマン計量で，$\mathfrak{k}=\mathfrak{j}\oplus\mathfrak{m}$ とした時，

$$k_t(X_{c(t)}, Y_{c(t)}) = \alpha_t(X,Y), \quad X, Y\in\mathfrak{m},$$

$X_{c(t)}, Y_{c(t)}\in T_{c(t)}M$，で，$\alpha_t$ は，$\mathfrak{m}$ 上の $\mathrm{Ad}(J)$-不変な内積である。ここで我々は簡単のため，次の仮定を α_t におく：

$\mathfrak{m}$ の内積 α_t は次を満すとする：

$$\alpha_t(X_i, X_j) = f_i^2(t)\,\delta_{ij},$$

ここで，$\{X_i\}$ は $\mathfrak{k}$ 上の $Ad(K)$-不変な内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に関する $\mathfrak{m}$ の正規直交基底である。

また $X \in \mathfrak{k}$ に対し，$X = X_{\mathfrak{g}} + X_{\mathfrak{m}} \in \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{m}$ とかき，

$$2\,\alpha_t(U_t(X,Y), Z) = \alpha_t(X, [Z,Y]_{\mathfrak{m}}) + \alpha_t([Z,X]_{\mathfrak{m}}, Y),$$

$X, Y, Z \in \mathfrak{m}$，により，$U_t(X,Y) \in \mathfrak{m}$ を定める。

命題 5.1.

ペアー Λ_t，$\omega(\dot{u}(t))$ が，P の開かつ稠密な部分集合 $\mathrm{int}(P)$ 上で，Yang-Mills 接続を与えるための必要十分条件は次の通りである：　$m = \dim M$ として，

(i) $$\sum_{i=1}^{m-1} f_i^{-2}\Big\{\Big[\Lambda_t(X_i), -\frac{d}{dt}\Lambda_t(X_i) + [\Lambda_t(X_i), \omega(\dot{u}(t))]\Big] - \frac{d}{dt}\Lambda_t(U_t(X_i,X_i)) + [\Lambda_t(U_t(X_i,X_i)), \omega(\dot{u}(t))]\Big\} = 0,$$

かつ，

(ii) $j = 1, \cdots, m-1$，に対して，

$$\frac{d}{dt}\Big\{\frac{d}{dt}\Lambda_t(X_j) - [\Lambda_t(X_j), \omega(\dot{u}(t))]\Big\}$$
$$+ \Big[\omega(\dot{u}(t)), \frac{d}{dt}\Lambda_t(X_j) - [\Lambda_t(X_j), \omega(\dot{u}(t))]\Big]$$

（次頁に式は続く）

$$
\begin{aligned}
&- 2 f_j^{-1} \frac{df_j}{dt} \left\{ \frac{d}{dt} \Lambda_t(X_j) - [\Lambda_t(X_j), \omega(\dot{u}(t))] \right\} \\
&+ \sum_{i=1}^{m-1} \left\{ \begin{aligned}
& f_i^{-2} [\Lambda_t(X_i), [\Lambda_t(X_i), \Lambda_t(X_j)] - \Lambda_t([X_i, X_j])] \\
& - f_i^{-2} ([\Lambda_t(U_t(X_i, X_i)), \Lambda_t(X_j)] - \Lambda_t([U_t(X_i, X_i), X_j])) \\
& - f_i^{-2} ([\Lambda_t(X_i), \Lambda_t(\tfrac{1}{2}[X_i, X_j]_m + U_t(X_i, X_j))]) \\
& + f_i^{-2} \Lambda_t([X_i, \tfrac{1}{2}[X_i, X_j]_m + U_t(X_i, X_j)]) \\
& + f_i^{-1} \frac{df_i}{dt} (\frac{d}{dt} \Lambda_t(X_j) - [\Lambda_t(X_j), \omega(\dot{u}(t))])
\end{aligned} \right\} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となることである。

命題 5.2.

$\dim M = m = 4$ の時，

ペアー Λ_t ，$\omega(\dot{u}(t))$ が $\mathrm{int}(P)$ 上で，自己双対（反自己双対）接続を与えるための必要十分条件は次の通りである：

$$f_1^{-1} f_2^{-1} \{ [\Lambda_t(X_1), \Lambda_t(X_2)] - \Lambda_t([X_1, X_2]) \} = \pm f_3^{-1} \{ - \frac{d}{dt} \Lambda_t(X_3) + [\Lambda_t(X_3), \omega(\dot{u}(t))] \},$$

$$f_2^{-1} f_3^{-1} \{ [\Lambda_t(X_2), \Lambda_t(X_3)] - \Lambda_t([X_2, X_3]) \} = \pm f_1^{-1} \{ - \frac{d}{dt} \Lambda_t(X_1) + [\Lambda_t(X_1), \omega(\dot{u}(t))] \},$$

$$f_3^{-1} f_1^{-1} \{ [\Lambda_t(X_3), \Lambda_t(X_1)] - \Lambda_t([X_3, X_1]) \} = \pm f_2^{-1} \{ - \frac{d}{dt} \Lambda_t(X_2) + [\Lambda_t(X_2), \omega(\dot{u}(t))] \},$$

である。ここで，$\pm$ は，$+$ が，自己双対に，$-$ が反自己双対に対応している。

命題 5.3.

K-不変接続 ω に対する Yang-Mills 汎関数 $E(\omega)$ は

$$E(\omega) = \frac{D}{2}\int_0^{\ell} \prod_{i=1}^{m-1} f_i(t) \left\{ \begin{aligned} &\sum_{1\leqq i<j\leqq m-1} f_i^{-2} f_j^{-2} \| [\Lambda_t(X_i), \Lambda_t(X_j)] - \Lambda_t([X_i, X_j]) \|^2 \\ &+ \sum_{i=1}^{m-1} f_i^{-2} \| -\tfrac{d}{dt}\Lambda_t(X_i) + [\Lambda_t(X_i), \omega(\dot{u}(t))] \|^2 \end{aligned} \right\} dt$$

と与えられる。ここで定数Dは内積$\langle\, ,\rangle$に関するK/J上のリーマン計量に関する体積を表わす。

命題 5.4.

特に、$\dim M = 4$, $K = G = SU(2)$ の時を考える。$\Lambda_t : k \to g$, は

$$\Lambda_t(X_j) = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}(t) X_i \quad , \qquad A := (a_{ij}) \in M(3, \mathbb{R})$$

と表示できる。ただし、$X_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ とする。

$\omega(\dot{u}(t)) \equiv 0$ にとる。3次正方行列 A が $\mathrm{int}(P)$ 上で、

Yang-Mills 接続を与える必要十分条件は、

$$\begin{cases} A\,\Xi_2 \frac{d}{dt}{}^t\!A - \frac{d}{dt}A\,\Xi_2\,{}^t\!A = 0, \\ \frac{d^2}{dt^2}A + \frac{dA}{dt}\Xi_1 + 4A\,\Xi_2\,{}^t\!A A - 4\,\mathrm{Tr}(\Xi_2\,{}^t\!A A)\,A + 4\tilde{A}\,\Xi_3 - 4A\,\Xi_0^2 = 0, \end{cases}$$

Aが、自己双対(反自己双対)を与える必要十分条件は、

$$\frac{d}{dt}A = -2(\tilde{A} - A)\Xi_0 \quad \left(\frac{d}{dt}A = 2(\tilde{A} - A)\Xi_0 \right)$$

である。また A に対応する K-不変接続 ω の Yang-Mills 汎関数は

$$E(\omega) = \frac{D}{2}\int_0^{\ell} f_1 f_2 f_3 \left\{ \|2(\tilde{A} - A)\Xi_0 \Xi_4\|^2 + \|\tfrac{d}{dt}A \cdot \Xi_4\|^2 \right\} dt.$$

と与えられる。ここで，

$${}^tA := A \text{の転置行列}, \quad \tilde{A} := A \text{の余因子行列}$$

であり，$\Xi_i\ (i=0,\sim,4)$ は3次対角行列で，その対角成分は，

$$\Xi_0 := [f_1 f_2^{-1} f_3^{-1},\ f_1^{-1} f_2 f_3^{-1},\ f_1^{-1} f_2^{-1} f_3],$$

$$\Xi_1 := [-f_1^{-1} f_1' + f_2^{-1} f_2' + f_3^{-1} f_3',\ f_1^{-1} f_1' - f_2^{-1} f_2' + f_3^{-1} f_3',\ f_1^{-1} f_1' + f_2^{-1} f_2' - f_3 f_3'],$$

$$\Xi_2 := [f_1^{-2},\ f_2^{-2},\ f_3^{-2}],$$

$$\Xi_3 := [f_1^{2} f_2^{-2} f_3^{-2} + f_2^{-2} + f_3^{-2},\ f_1^{-2} f_2^{2} f_3^{-2} + f_1^{-2} + f_3^{-2},\ f_1^{-2} f_2^{-2} f_3^{2} + f_1^{-2} + f_2^{-2}],$$

$$\Xi_4 := [f_1^{-1},\ f_2^{-1},\ f_3^{-1}].$$

と与えられている。ここで，$f_i' := \frac{d}{dt} f_i$ である。

§6. 例

現在のところ，常微分方程式がなかなか解けないこともあり，既に知られているものの他に，面白い例を小生は残念ながら見つけていない。

例 1 (S^4, can)

Hopf 主束 $P = S^7 = Sp(2)/Sp(1) \longrightarrow M = S^4 = Sp(2)/Sp(1)\times Sp(1)$，（構造群は $G = Sp(1) \cong SU(2)$）の時，$K = Sp(1)\times Sp(1) \cong \widetilde{SO(4)}$ は，M

上に cohomogeneity one に作用し，Hopf主束 P は K-不変である。この時，

$$c(t) := \exp tZ \cdot K \quad , \quad Z := \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{array}\right) \quad , \quad 0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$$

とおくと，これは，K の軌道空間の代表を与える測地線となり，$c(\frac{\pi}{2})$ が，$c(0)$ の S^4 での対心点となっている。

K の $c(t)$ での等方部分群 J_t は，

$$J_0 = J_{\frac{\pi}{2}} = K \ , \quad J_t = \Delta = \{(x,x);\, x \in Sp(1)\} \quad (0 < t < \tfrac{\pi}{2}) .$$

と与えられ，$\mathfrak{m} = \{(X,-X) ; X \in \mathfrak{sp}(1)\}$，$\mathfrak{j} = \Delta = \{(X,X) ; X \in \mathfrak{sp}(1)\}$ である。$c(t)$ のリフト $u(t) := \exp tZ\, Sp(1) \in P$ でのホロノミー表現 $\lambda_t : J_t \to G$ は

$$\lambda_t : J_t \ni (a,a) \longmapsto (1,a) \in G \quad , \quad 0 < t < \frac{\pi}{2} .$$

となる。そこで，

$$\omega(\dot{u}(t)) \equiv 0 , \quad \Lambda_t(X) := \begin{cases} \lambda_t(X) , & X \in \mathfrak{j} = \Delta , \\ \mu(t)\, f_0(X) , & X \in \mathfrak{m} . \end{cases}$$

とおく。ここで，$f_0 : \mathfrak{m} \to \mathfrak{g}$ は，

$$f_0 : \mathfrak{m} \ni (X,-X) \longmapsto (0,X) \in \mathfrak{g}$$

で与えられる線形写像である。この時，上記は，命題3.2 の (1), (2), (3) を満すが，逆に，今の場合，(1), (2), (3) を満すものは，これ以外にはないことがわかる。更に，f_i，U_t は，

$$f_i(t) = \sin 2t \ , \quad i = 1,2,3 \ ; \qquad U_t(X,Y) \equiv 0 \ , \quad X, Y \in \mathfrak{m},$$

となる。従って Yang-Mills 接続，(反)自己双対接続の方程式は $\mu(t)$ に関する単独の方程式となる：

(1) YM $\Leftrightarrow$ $\dfrac{d^2\mu}{dt^2} + 2\cot(2t)\dfrac{d\mu}{dt} + \dfrac{8}{\sin^2 2t}\mu(-\mu^2+1) = 0$，

(2) 自己双対 $\Leftrightarrow$ $\dfrac{d\mu}{dt} = -\dfrac{2}{\sin 2t}(\mu^2-1)$，

(3) 反自己双対 $\Leftrightarrow$ $\dfrac{d\mu}{dt} = \dfrac{2}{\sin 2t}(\mu^2-1)$，　　$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$.

また，対応する Yang-Mills 汎関数は，

(4) $$E(\omega) = \frac{3D}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \left\{ \left(\frac{2(\mu^2-1)}{\sin 2t}\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 \right\} dt < \infty$$

で与えられる。ここで，$D = 4\pi^2/16$ である。

ところで，$x = \cos 2t$，$s = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$，$-\infty < s < \infty$ と2回変数変換すると，

(1) $\Leftrightarrow$ (1′) $\dfrac{d^2\mu}{ds^2} + 2\mu(-\mu^2+1) = 0$，

(2) $\Leftrightarrow$ (2′) $\dfrac{d\mu}{ds} = -(\mu^2-1)$，

(3) $\Leftrightarrow$ (3′) $\dfrac{d\mu}{ds} = \mu^2 - 1$，

(4) $\Leftrightarrow$ (4′) $E(\omega) = \dfrac{3D}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left\{(\mu^2-1)^2 + \left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2\right\} ds < \infty$

となる。この時，次が成り立つ：

$E(\omega) < \infty$ となる (1′) の解は，(2′) 又は (3′) の解に限る。

[実際] (1′) の両辺に，$2\dfrac{d\mu}{ds}$ をかけて，

$$\frac{d}{ds}\left[\left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2 - (1-\mu^2)^2\right] = 2\frac{d\mu}{ds}\frac{d^2\mu}{ds^2} + 4\mu(-\mu^2+1)\frac{d\mu}{ds} = 0.$$

従って，$\left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2-(1-\mu^2)^2=C$（定数）となる。これを(4′)に代入して，

$$E(\omega)=\frac{3D}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{C+2(\mu^2-1)^2\right\}ds<\infty$$

が成立するためには $C=0$ でなければならぬ。すなわち，$\left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2=(1-\mu^2)^2$，i.e.，(2′) 又は (3′) を満さねばならぬ。//

従って，次を得る：

命題 6.1.

(S^4, can) 上の Hopf 主束 P 上の $Sp(1)\times Sp(1)$-不変な Yang-Mills 接続は，自己双対か反自己双対に限る。

次に (2) の解法についてであるが，その一般解は，

$$\mu_\lambda(t)=\frac{1-\cos 2t-\lambda(1+\cos 2t)}{1-\cos 2t+\lambda(1+\cos 2t)},\quad 0<\lambda<\infty\ (\text{定数}),$$

で与えられる。これは P 全体で滑らかな自己双対接続 ω_λ に延びることがわかる。その曲率形式 Ω^{ω_λ} の各点毎ノルムは，点 $c(t)$ において，

$$\langle\Omega^{\omega_\lambda},\Omega^{\omega_\lambda}\rangle(c(t))=\frac{48\lambda^2}{(\sin^2 t+\lambda\cos^2 t)^4}$$

と与えられ，従って異なる λ に対して，ω_λ は互いにゲージ同

値ではない。 $\lambda=1$ の時，ω_λ は $Sp(2)$-不変なカノニカル接続となっている。

更に，$K=Sp(1)\times Sp(1)$ の代わりに，$K=x(Sp(1)\times Sp(1))x^{-1}$, $x\in Sp(2)$, を考えると、$x(Sp(1)\times Sp(1))x^{-1}$-不変自己双対接続 $\omega_{x,\lambda}$ が得られる。$\Omega^{\omega_{x,\lambda}}$ の各点毎ノルム $\langle \Omega^{\omega_{x,\lambda}}, \Omega^{\omega_{x,\lambda}} \rangle$ の最大値を取る点は，

$0<\lambda<1$ の時，$x\,c(0)$ ； $1<\lambda<\infty$ の時，$x\,c(\frac{\pi}{2})$

となる。これから、5次元パラメータをもった自己双対接続 $\omega_{x,\lambda}$ を得る。（cf. [BPST]）。

例2 (S^4, can) （つづき）

上の例において，$K=Sp(1)$ ととると，

$$J_t=\{id\}\ \ (0<t<\tfrac{\pi}{2}),\quad J_0=J_{\frac{\pi}{2}}=K=Sp(1),$$

となる。この場合，$f_i(t)=\frac{1}{2}\sin 2t$，$i=1,2,3$，となり，前と同様に，$x=\cos 2t$，$s=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ と，2回変数変換すると，

$$\mathrm{YM}\iff\begin{cases} A\dfrac{d}{ds}{}^t\!A-\dfrac{dA}{ds}{}^t\!A=0,\\[2mm] \dfrac{d^2A}{ds^2}+4A\,{}^t\!A\,A-4\,\mathrm{Tr}({}^t\!AA)A+12\tilde{A}-4A=0.\end{cases}$$

$$\text{自己双対}\iff\frac{dA}{ds}=-2(\tilde{A}-A),$$

$$\text{反自己双対}\iff\frac{dA}{ds}=2(\tilde{A}-A),$$

$$E(\omega)=\frac{D}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\|2(\tilde{A}-A)\|^2+\left\|\frac{dA}{ds}\right\|^2\right\}ds<\infty.$$

となる。今の場合，Aが対角行列の時は，例1と同一になるが，他の場合の一般解等は，小生にはよくわからない。

例3 $(S^1\times S^3, \mathrm{can})$

$S^1\times S^3 = U(1)\times SU(2) = \{(e^{it}, x)\,;\, t\in\mathbb{R},\ x\in SU(2)\}$ の時。$K = SU(2)$ は $S^1\times S^3$ に，$k(e^{it}, x) := (e^{it}, kx)$ と作用でき，cohomogeneity one である。この場合，

$$J_t = \{id\} \quad (0\leqq t\leqq 2\pi),$$

$$\lambda_t(e) = e \quad (\text{自明なホロノミー表現})$$

となり，対応する G-主束 P は，

$$P = M\times G\ (\text{自明束}),$$

$$f_i(t)\equiv 1 \quad (i=1,2,3)$$

であり，周期 2π の周期解が，P全体に C^∞ に延長するもので，Yang-Mills，(反)自己双対の方程式等は，例2において，変数 s を t におきかえたものになる。この時，

命題 6.2

$(M,g) = (S^1\times S^3, \mathrm{can})$ の時，(反)自己双対接続は t について定数解のみであり，

$$A = U_1 T U_2, \quad U_1, U_2\in SO(3),$$

なる形をしている。ここで，T は対角行列で，その対角成分は次のものに限る：

$[0,0,0]$, $[1,1,1]$, $[-1,-1,1]$, $[1,-1,-1]$, $[-1,1,-1]$.

命題 6.3.

他方、Yang-Mills 接続には上記以外に、T として、

$$[\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}],\ [-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}],\ [-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}],\ [\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}].$$

となるものが存在する。

例 4 ($\mathbb{C}P^2$, can)

これについては古田氏 [F] の仕事があるので、ここでは省略する。

例 5 ($S^2 \times S^2$, can)

$SU(2)$-主束で (反) 自己双対でない Yang-Mills 接続があるが、ここでは省略。Unger [Un] の仕事がある。

最後に.

- 我々の §2 ~ §5 の話は、群作用が cohomogeneity one でありさえすれば、適用できる。目下、$(M,g)=(S^4,\mathrm{can})$ への別の cohomogeneity one 作用として、

$$K = SO(2)\times SO(3)\ ,\quad SO(3)$$

の作用もあり、計算中である。

• 群作用が cohomogeneity two の場合には，2変数の偏微分方程式系が出て来る。実際，導びいてはいるのであるが，(主要部にはラプラシアンが出てくる)，複雑で，解くことはむつかしい。この場合，矩形領域の境界値問題に帰着される。

• $S^2 \times S^2$ の自己双対接続の方程式系は，未知関数を μ_1, μ_2, μ_3 とした時，$0<t<\frac{\pi}{4}$ 上で，

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\mu_1}{dt} = -2(\mu_2\mu_3-\mu_1)\tan(2t), \\[2ex]
\dfrac{d\mu_2}{dt} = -2(\mu_3\mu_1-\mu_2)\dfrac{1}{\sin 2t\cos 2t}, \\[2ex]
\dfrac{d\mu_3}{dt} = -2(\mu_1\mu_2-\mu_3)\cot(2t)
\end{cases}
$$

となる。この一般解が，どうなっているか？知りたいのですが，お教えいただければ，大変有難く存じます。

• 結論として，私の知る限り，Atiyah-Jones 予想は現在のところ，まだ open のようである。このような上のやり方で $(M,g)=(S^4,\mathrm{can})$，$G=SU(3)$，$K=SO(2)\times SO(3)$ の時には，反例があるのではないかという希望を棄ててはいないのだが，得られている方程式が複雑なので，yes とも no とも判定できないでいる。

References

[A.J] M.F.Atiyah and J.D.S.Jones, *Topological aspects of Yang-Mills theory*, Commun. Math. Phys., **61**,(1978), 97-118.

[B.B] L.Berard-Bergery, *Sur de nouvelles varietes riemammienne d'Einstein*, Publ. de l'Inst. E.Cartan, n° **6**, 1982.

[BPST] A.Belavin, A.Polyakov, A.Schwartz and Y.Tyupkin, *Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations*, Phys. Letter, **B59**,(1975),85.

[B.L1] J.P.Bourguignon and H.B.Lawson,Jr., *Stability and isolation phenomena for Yang-Mills theory*, Commun. Math. Phys., **79**,(1982),189-230.

[B.L2] J.P.Bourguignon and H.B.Lawson,Jr., *Yang-Mills theory, its physical origins and differential geometric aspects*, Ann. of Math. Studies, **102**, ed. by S.T.Yau, Princeton Univ. Press, Princeton, 1982, 395-421.

[F] M. Furuta, *Self-dual connections on the principal $SU(2)$ bundle over CP^2 with* $c_2 = -1$,Tokyo Univ. Masters thesis, 1984.

[H] W.Y.Hsiang, *On the construction of infinitely many congruence classes of imbedded closed minimal hypersurfaces in $S^n(1)$ for all $n \geqq 3$*, Duke Math. J., **55**,(1987),361-367.

[H.L] W.Y.Hsiang and H.B.Lawson,Jr., *Minimal submanifolds of low cohomogeneity*, J. Diff. Geom.,**5**,(1971),1-38.

[He] S.Helgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Acad. Press, New York, London,1962.

[H.S] M.W.Hirsch and S.Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Acad. Press, New York , London,1974.

[I] M.Itoh, *Invariant connections and Yang-Mills solutions*, Trans. Amer. Math. Soc.,**267**,(1981),229-236.

[K.N] S.Kobayashi and K.Nomizu, *Foundation of Differential Geometry*, I,II, Interscinece Publ.,New Yrok, London,1963,1969.

[K.W] J.L.Kazdan and F.W.Warner, *Curvature functions for open 2-manifolds*, Ann. of Math.,**99**,(1974),203-219.

[M] P.S.Mostert, *On a compact Lie groups acting on a manifold*, Ann. of Math.,**65**,(1957),447-455,**66**,(1957),589.

[P] D.Page, *A compact rotating gravitational instanton*, Phys. Letters, **B79**,(1978),235-238.

[T] C.H.Taubes, *On the equivalence of the first and the second order equations for gauge thoeries*, Commun.Math.Phys.,**75**,(1980),207-227.

[U] K.K.Uhlenbeck, *Removable singularities for Yang-Mills fields*, Commun. Math.Phys.,**83**,(1982),11-30.

[Un] F.R.Unger, *Invariant Sp*(1)*-instantons on* $S^2 \times S^2$, Geometriae Dedicata, **23**,(1987),365-368.

[Ur] H.Urakawa, Equivariant theory of Yang-Mills connections over Riemannian manifolds of cohomogeneity one, a preprint, 1987.

Department of Mathematics
College of General Education
Tohoku University,
Kawauchi, Sendai, 980, Japan