数理解析研究所講究録
第666巻 1988年 190-194

ある種の平面有向ネットワークの多品種流問題に対する実行可能性の判定法

京都大学工学部　永持　仁 (Hiroshi Nagamochi)
京都大学工学部　茨木 俊秀 (Toshihide Ibaraki)

1. まえがき

K種のフローを,指定された節点間に与えられた量だけ流し得るか否かを判定する多品種流問題は，特殊な線形計画問題として定式化でき，従って強多項式時間で解けるが[9]，２品種無向ネットワークや特別な平面無向ネットワークに対してはより効率の良いグラフ論的アルゴリズムが知られている[3,8]。最近我々は有向ネットワークのクラスCBとCS[4]及びクラスCU[5]に対し，グラフ論的アルゴリズムを開発した。また，このクラスのうちCB及びCSに対して最大流-最小カットの定理が成立することを示した[6]。

CB,CSの最大流-最小カット性に基づけば，CB,CSネットワークにおいて，与えられたソース及びシンクが全て外周上にあるとき，最大流-最小カットの定理を利用した実行可能性判定アルゴリズムが構築できることを示す[7]。

2. 諸定義

次の多品種流問題 N=(G,P,g,c) を考える。ただし，

G=(V,A):節点集合Vと有向枝の集合Aを持つ有向グラフ。

a(x,y):節点xから節点yへ向かう有向枝。OUT(x):始点がxである有向枝の集合。IN(x):終点がxである有向枝の集合。

$P=\{(s^k,t^k)\mid k=1,2,...,K\}$。Kは品種数。各品種kはソース$s^k\in V$とシンク$t^k\in V$を一つずつ持つ。$S=\{s^k\mid k=1,2,...,K\}, T=\{t^k\mid k=1,2,...,K\}$とおく。

$g:\{1,2,...,K\}\to Z^+$(正整数の集合)。$g^k=g(k)$と記す。g^kは品種kの供給量(=需要量)。

$c:A\to Z^+$は容量関数。

枝aを通る品種kの流量をf(a,k)と記す。次の条件(1)と(2)を満たすf(a,k), $a\in A, k=1,2,...,K$が存在するとき，Nは<u>実行可能</u>であると言う。

<u>流量保存則</u>　全ての$x\in V, k=1,...,K$ に対し

$$\sum_{a\in OUT(x)} f(a,k) - \sum_{b\in IN(x)} f(b,k) = \begin{cases} g^k & (x=s^k\text{のとき}) \\ 0 & (x\neq s^k, x\neq t^k\text{のとき}) \\ -g^k & (x=t^k\text{のとき}) \end{cases} \tag{1}$$

<u>容量制約</u>　全ての$a\in A$に対し

$$0 \leq f(a,k),\ k=1,2,\ldots,K,\qquad \sum_{k=1}^{K} f(a,k) \leq c(a)。\qquad (2)$$

なお，グラフの連結性については，枝の向きを無視して議論する。節点集合$X\subseteq V$は，Xの作るGの部分グラフが連結であるとき，<u>連結</u>であると言う。

【定義1】次の条件を満たす$N=(G,P,g,c)$をCBネットワークと呼ぶ。

(1) $G=(V,A)$は，有向閉路および関節点を持たないグラフである(関節点とは，その点を除くと連結成分の数が1個以上増える節点)。

(2) Gは平面グラフである。Gは平面に描かれており，次の記法を用いる。B:Gの外周。V_B:B上の節点集合。A_B:B上の枝集合。Gは関節点を持たないのでA_Bの枝の作る(無向)閉路(つまり外周)は初等的(同じ節点を二度以上通らない)である。このとき，次の(i),(ii)を満たす。

(i) 外周上以外の任意の節点$x\notin V_B$に対し，$|IN(x)|\geq 1$ かつ $|OUT(x)|\geq 1$。

(ii) $T\subset V_B$。

(3) 全ての節点$x\in V$において　$\Delta c(x)=0$。ただし，

$$\Delta c(x)= \sum_{a\in OUT(x)} c(a)+\sum_{t^k=x} g^k-\sum_{b\in IN(x)} c(b)-\sum_{s^k=x} g^k \quad (容量ﾊﾞﾗﾝｽ関数)。\ \square$$

【定義2】 次の条件を満たす$N=(G,P,g,c)$をCSネットワークと呼ぶ。

(1)定義1(1)~(2)を満たす。

(2)$S^d\triangleq\{x\mid\Delta c(x)>0\}$,$T^d\triangleq\{x\mid\Delta c(x)<0\}$とすると，$S^d\cup T^d\subseteq V_B$。(つまり，外周上以外の節点$x$は全て$\Delta c(x)=0$である(容量バランスしている)。)

(3) $S^d\subseteq X$,$T^d\subseteq V-X$を満たす連結集合X,$V-X$が存在する。(つまり，外周上でS^dとT^dとがそれぞれ左右に分離して出現する。)$\square$

平面上に描かれたGの任意の初等的(無向)閉路は，平面を二つの領域に分ける。これらの領域の一方の内部にGの枝が存在しないとき，その閉路は<u>窓</u>と呼ばれる。 外周上の節点$x,y\in V_B$に対し，時計回りに見てxからyまでの外周線を$B(x,y)$，この上の節点集合を$VB[x,y]$と記す(x,yも$VB[x,y]$に属する)。ただし，$VB[x,x]=V_B$とする。更に，以下の記号を導入する。ただし，$X\cap Y=\phi$を仮定している。

$VB(x,y]\triangleq VB[x,y]-\{x\}$, $VB[x,y)\triangleq VB[x,y]-\{y\}$, $VB(x,y)\triangleq VB[x,y]-\{x,y\}$,

$c(X;Y)\triangleq \sum\{c(a)\mid a(x,y)\in A, x\in X, y\in Y\}$, 特に$c(X)\triangleq c(X;V-X)$,

$K(X;Y)\triangleq\{k\mid s^k\in X, t^k\in Y\}$, 特に$K(X)\triangleq K(X;V-X)$,

$g(X;Y)\triangleq \sum\{g^k\mid s^k\in X, t^k\in Y\}$, 特に$g(X)\triangleq g(X;V-X)$,

$r(X;Y)\triangleq c(X;Y)-g(X;Y)$, 特に$r(X)\triangleq r(X;V-X)$。

$X\neq\phi$かつ$X\neq V$なるある節点集合Xに対して，枝集合

$C=\{a(x,y)\mid x\in X, y\in V-X$ 又は $x\in V-X, y\in X\}$は<u>カット</u>と呼ばれる。

カットCが他のカットを真に含まないとき<u>初等的</u>と言う。

ここで，多品種流問題のカット条件とは任意の$X\subseteq V$に対し

$$r(X) \geq 0, \tag{3}$$

が成立することである。一般に，多品種流問題においてはカット条件の成立だけでは問題の実行可能性を保証することはできない。文献[6]により次の定理が示されている。

【定理1】CB及びCSネットワークにおいては,カット条件の成立が問題の実行可能性の必要十分条件である。□

以下では，CB又はCSネットワークにおいて，さらに次の仮定を置く。

【仮定1】$S\cup T\subseteq V_B$。□

このとき，ある$x,y\in V_B$を固定して考えると$X\cap V_B=VB[x,y)$を満たす任意のXに対し，

$$r(X) = c(X)-g(X) = c(X)-g(VB[x,y))$$

であるので，結局$c(X)$を最小にするXのみを考えればよい。この$c(X)$の最小値を$c^0[x,y)$と記す。

【補題1】 CB又はCSネットワークが実行可能であるための必要十分条件は，全ての$x,y\in V_B,x\neq y$に対し，

$$c^0[x,y)-g(VB[x,y))\geq 0 \tag{4}$$

が成立すること。 □

3．双対グラフの利用

平面無向ネットワーク上の単一品種流問題の最小カットが対応する双対ネットワーク上で最短路問題を解くことにより得られることが，[2]により示され，その平面無向ネットワーク上の多品種流問題への拡張が知られている[3,8]。同様の手法を平面有向ネットワーク上の多品種流問題のクラスCB,CSへ適用するために，以下の双対ネットワークを導入する。

【定義3】仮定1を満たすCB又はCSネットワーク$N=(G,P,g,c)$に対し，有向双対グラフG^*,H^*および有向ネットワークN^*を次のように定義する。双対グラフの各節点v_i^*はGの窓W_iに対応して置かれる(特に外領域に節点v_B^*を対応させる)。また，Gの各有向枝a_kに対し，a_kを含むGの2つの窓W_i,W_jに対応する節点v_i^*,v_j^*間に有向枝a_k^+を対応させる。このとき，a_k^+の向きは，a_kを時計回りに(90度)回転させた向きに一致させる(図1)。このようにして得られた節点集合をV^*，枝集合をA^+とする。更に，全ての$a_k^+\in A^+$に対し，逆向きの有向枝の集合をA^-とする。得られたV^*,A^+,A^-に対する双対グラフ$(V^*,A^+\cup A^-)$をG^*と記す。また，G^*

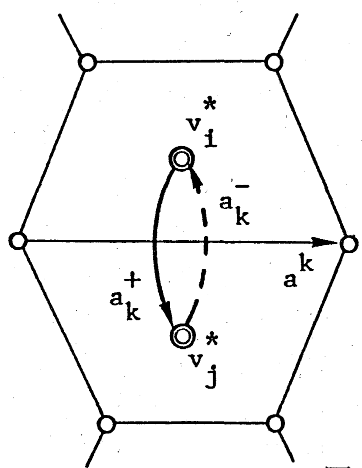

図1

からv_B^*およびv_B^*に接続している枝を除去したグラフをH^*と記す。次に，枝長を与える$d:A^+ \cup A^- \to R^+$を導入し，その結果定まる有向双対ネットワークを$N^*=(H^*,d)$と記す。ただし，dは，$a_i^+ \in A^+$に対し$d(a_i^+)=c(a_i)$，$a_i^- \in A^-$に対し$d(a_i^-)=0$と定められる。□

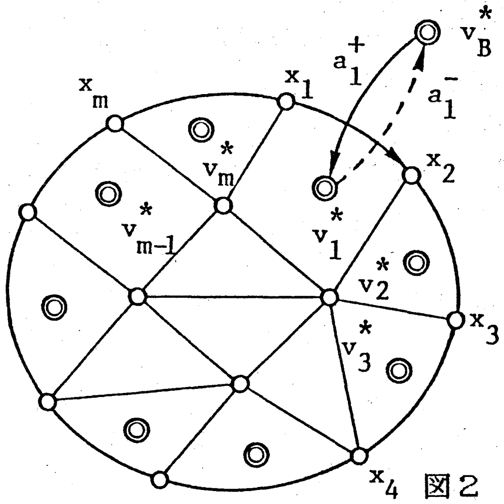

図2

G^*における初等的な有向閉路を考え，対応するGの枝集合を求めると，それはGの初等カットであり，dの定め方より有向閉路の長さと対応する初等カットの容量は等しい。条件(4)の成立を調べるのに必要なカットはGの外周上の枝を含むので，G^*の初等閉路のうち，v_B^*(Gの外領域に対応する節点)を通るものに限定することができる。図2に示すように，Gの外周を時計回りに見て出現する節点の順序に$x_1,x_2,...,x_m$ $(m=|V_B|)$，またx_iとx_{i+1}を接続しているGの有向枝をa_iと記す$(m+1=1$とする)。更に，G^*において枝$a_i^+ \in A^+$を通して節点v_B^*に隣接している節点を$v_1^*,v_2^*,...,v_m^*$と記し，この集合をV^*_Bとする。

【補題2】[7] N^*において，v_j^*からv_i^*への有向パスの中でdについて最短のものの長さを$d^o(v_j^*,v_i^*)$とすると，

$$c^o[x_{i+1},x_{j+1})=d^o(v_j^*,v_i^*)+d(a(v_B^*,v_j^*))+d(a(v_i^*,v_B^*))$$

が成立する$(m+1=1$とする)。(証明略,N^*の定義から明らか。) □

補題2より，$c^o[x,y)$を計算するには，N^*上で各v_i^*から他の全てのv_j^*への最短路木$ST(v_i^*)$を$i=1,2,...,m$について構成すればよい。1つの最短路木を得るための計算時間を$T(|V|)$，そのために必要な前処理の計算時間を$S(|V|)$とすると，全ての最短路木$ST(v_i^*)$, $i=1,2,...,|V_B|$を得るためには$O(S(|V|)+|V_B|T(|V|))$時間で済む。

4. g(VB[x,y))の計算

全ての$g(VB[x,y))$を求めるには，まず，$x_1 \in V_B$に対し$g(VB[x_1,x_i))$, $i=2,3,...,m$を計算しておく。このときの手間は，全ての品種$k=1,2,..,K$に対する0-1変数$\delta(k)$および$x \in V_B$に対するデータ$K_s(x) \triangleq \{k|s^k=x\}$, $K_t(x) \triangleq \{k|t^k=x\}$などを用意すれば$O(K+|V_B|)$で済むことが示せる[7]。

x_1に対する$g(VB[x_1,x_j))$, $j=2,3,...,m$,が求まると，これを用いてx_2に対する$g(VB[x_2,x_j))$, $j=3,4,...,m,1$が$O(|K_s(x_1)|+|K_t(x_1)|+|V_B|)$時間で求まることが示せる[7]。従って，以下同様に$x_3,x_4,...,x_m$に対しこの操作を行えば，全ての$g(VB[x,y))$を$O(K+|V_B|^2)$時間で求める事ができる。

5. まとめ

以上の手続きをまとめると，以下の定理を得る。

【定理2】仮定1を満たすCB及びCSネットワークNの実行可能性は$O(S(|V|)+|V_B|T(|V|))$時間で判定できる。ただし，$|V|$は節点数，$|V_B|$は外周上の節点数，$T(|V|)$は1つの最短路木を得る計算時間であり，$S(|V|)$はそのための前処理の計算時間である。□

N^*は非負の枝長を持つ平面グラフであるのでFredericksonの算法[1]の結果から，$S(|V|)=O(1), T(|V|)=O(|V|\sqrt{\log|V|})$あるいは$S(|V|)=O(|V|\log|V|), T(|V|)=O(|V|\log^*|V|)$などを用いることができ，これから得られる判定時間は，従来の$O(K|V|+|V_B||V|)$[3]と比較するとKが大きな場合有利である。

謝辞　日頃御指導賜わる京都大学長谷川利治教授に感謝致します。また，最短路アルゴリズムについて御討論頂いた東北大学西関隆夫助教授に深謝致します。なお，本研究は一部文部省科学研究費によるものである。

文献

[1] Frederickson,G,N.: "Shortest path problems in planar graphs", Proc.24th IEEE Symp. on Foundations of Computer Science, Tucson, pp.242-247(1983).
[2] Hassin,R.: "Maximum flow in (s,t) planar networks", Inform. Proc. Lett., Vol.13, pp.107 (1981).
[3] Matsumoto,K., Nishizeki.T and Saito,N.: "An efficient algorithm for finding multicommodity flows in planar networks", SIAM J.Comput. 14, 2, pp.289-302 (1985).
[4] 永持,茨木,長谷川: "ある種の平面有向ネットワーク上の多品種流問題について",信学論A,J70-A,2,pp.228-238(1987).
[5] 永持,茨木,長谷川: "平面有向ネットワークのクラスCUに対する多品種流問題",信学論A,J70-A,9,pp.1328-1339(1987).
[6] 永持,茨木: "ある種の平面有向ネットワーク上の多品種流に対する最大流-最小カットの定理",信学論A,J71-A,1,pp.71-82(1988).
[7] 永持,茨木: "ある種の平面有向ネットワークの多品種流に対する実行可能性の判定法",信学論A,J71-A,3(1988).
[8] Suzuki,H., Nishizeki,T. and Saito,N.: "Multicommodity flows in planar undirected graphs and shortest paths", Proc. 17-th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, pp.195-204 (1985).
[9] Tardos,E.: "Strongly polynomial algorithm to solve combinatorial linear programs",Operations Research Vol.34,No.2,March-April pp.250-256 (1986).