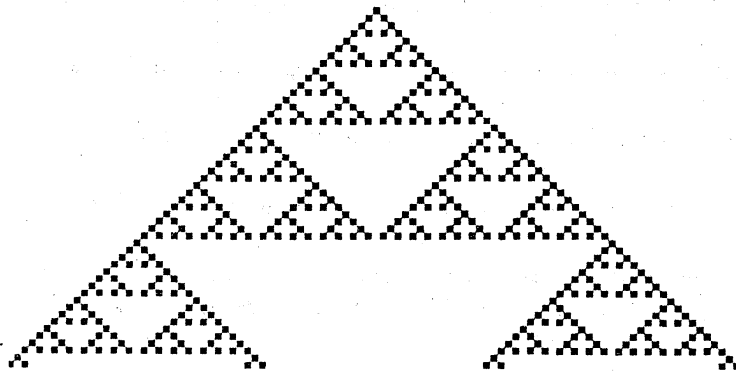
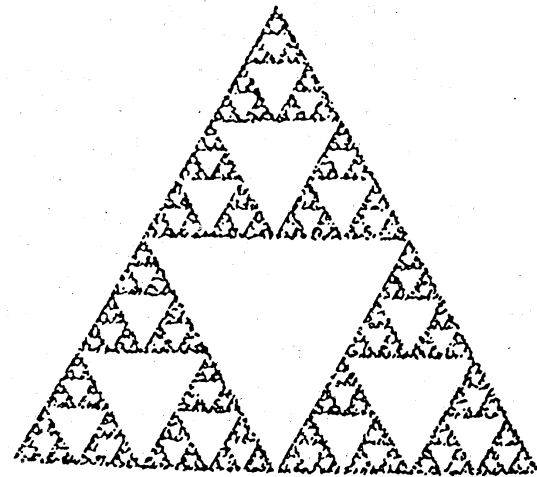


### 線型セルオートマトンのパターンについて

京都大学理学部 生物物理学科 高橋 智 ( Satoshi Takahashi )



1 0 1 mod 2 ( rule 90 )  
O. Martin et. al., Commun. Math. Phys. 93 (1984) 219.



Sierpinski gasket  
M. F. Barnsley and S. Demko, Proc. R. Soc. Lond. A 339 (1985) 243

#### 1 はじめに

上の図は左側がある線型セルオートマトンの時空間パターン、右側がシェルピンスキーガスケットと呼ばれるフラクタルパターンである。図をみてわかる様にこの2つのパターンは非常によく似通っている。線型セルオートマトンとフラクタルとの関係は状態数が素数の場合にS.J. Willsonによって指摘されたが、我々は彼の結果をすべての線型セルオートマトンに対して拡張した。ここでは特に状態数が素数の巾乗のときの線型セルオートマトンの時空間パターンの自己相似性について述べる。

## 2 定義と定理

線型セルオートマトンとは、 $d$ 次元空間の格子点上の状態が近傍の状態によって変化していくようなシステムである。 $i \in \mathbb{Z}^d$ を空間の座標、 $t \in \mathbb{N}$ を時間、 $\{0, \dots, M-1\}$ を状態の集合 ( $M$ は状態数)、 $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{Z}^d$ を近傍とし、 $a_i^t \in \{0, \dots, M-1\}$ で  $i$ にある点の時刻  $t$ の状態を表す。

$$a_i^t = c_1 \cdot a_{i+r_1}^{t-1} + \dots + c_m \cdot a_{i+r_m}^{t-1} \pmod{M}$$

$$(c_1, \dots, c_m \in \mathbb{N})$$

という規則で次の時刻の点の状態が決まるとき、このシステムを線型セルオートマトンと呼ぶ。

このシステムに対し次のような仮定を置く。

$$\text{初期状態が } a_i^0 = \begin{cases} 1 & (i = (0, \dots, 0)) \\ 0 & (i \neq (0, \dots, 0)) \end{cases}$$

で与えられる。

$p$ を素数、 $k \in \mathbb{N}$ としたとき、状態数が  $M = p^k$ で与えられる。

... (\*)

## 定理 1

(\*)を仮定する。

$$(1) p^{k-1} \mid t \Rightarrow a_i^t = a_i^{t-p^{k-1}}$$

$$(2) p^n \mid t, p^{n-k+1} \nmid i \Rightarrow a_i^t = 0$$

(ここで  $x \mid y$  は  $x$ が  $y$ を割り切ること、 $x \nmid y$  は  $x$ が  $y$ または  $y$ のある要素を割り切らないこと、 $x \cdot y$  は  $y$ または  $y$ の要素を  $x$ 倍したものをそれぞれ意味する。)

次にリミットセットを定義する。  $\{t_n\}$  を  $t_n \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ) となる自然数列とする。  $Z^{d+1}$  の部分集合  $S(t_n)$  を  $S(t_n) = \{(t, i) \mid t < t_n, a_i \neq 0\}$  で定義する。  
 $S(t_n)/t_n \subseteq R^{d+1}$  で  $S(t_n)$  を縮小比  $1/t_n$  で縮小した集合を表す。 $\{t_{n_j}\}$  を  $\{t_n\}$  の部分列としたとき、  
 $\limsup S(t_n)/t_n = \{q \mid q_{n_j} \in S(t_{n_j})/t_{n_j}, q_{n_j} \rightarrow q\}$   
と  
 $\liminf S(t_n)/t_n = \{q \mid q_n \in S(t_n)/t_n, q_n \rightarrow q\}$   
とが一致するとき  $\lim S(t_n)/t_n$  で表しリミットセットと呼ぶ。

## 定理 2

(\*) の仮定の下で  $t_n = p^n$  と定めると  $\lim S(t_n)/t_n$  が存在する。

線型セルオートマトンのリミットセットは一般にハウスドルフ次元が非整数のフラクタルとなる。ハウスドルフ次元は以下の様に定義される。  $E$  を  $R^{d+1}$  の部分集合とする。可算個の集合族  $\{U_j\}$  が  $E$  の  $\delta$ -被覆であるとは、  $E \subseteq \cup U_j$ 、  $|U_j| \leq \delta$  であることをいう。ここで  $|U|$  は  $U$  の直径すなわち  $\max_{x, y \in U} d(x, y)$  のことである。 $H^s_\delta(E)$  を  $H^s_\delta(E) = \inf \sum_j |U_j|^s$  とする。ここで下限 ( $\inf$ ) は  $E$  のすべての  $\delta$ -被覆についてとる。 $E$  の  $s$  次元ハウスドルフ測度  $H^s(E)$  は  $H^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H^s_\delta(E)$  で定められる。 $E$  のハウスドルフ次元を  $D_H(E)$  とすると、

$$\begin{aligned} D_H(E) &= \inf \{s \mid H^s(E) = 0\} \\ &= \sup \{s \mid H^s(E) = \infty\} \end{aligned}$$

である。

### 定理 3

線型セルオートマトンのリミットセットは次の様な性質を持つ有限な集合族  $\{X_j\}$  中の有限個を併せたものとして表現できる。各  $X_j$  は  $X_0$  を  $1/p$  に縮小したもの  $n_{j,0}$  個から構成される。行列  $A$  を  $A = (n_{j,0})$  で定め、 $A$  の最大固有値を  $\lambda$  とするときリミットセットのハウスドルフ次元は  $\log_p \lambda$  である。

### 3 例

具体的な例でリミットセットの自己相似性を見てみよう。

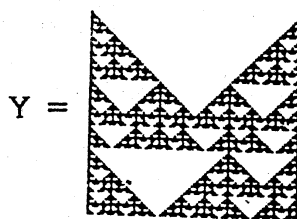
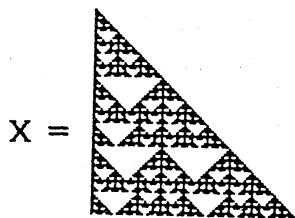
$$a_{i,j} = a_{i-1,j} + a_{i-1,j-1} + 2 \cdot a_{i-1,j+1} \pmod{3}$$

という規則によって次の状態が定まるセルオートマトンを考える。

このセルオートマトンのリミットセットは下図の様になる。



ここで



とおく。

リミットセットは2つのXを併せたものである。Xは大きさ  $1/3$  のX 3個と大きさ  $1/3$  のY 3個からできている。また、Yは大きさ  $1/3$  のX 4個と大きさ  $1/3$  のY 4個からできている。このことから定理3の行列Aは、

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

となり、リミットセットのハウスドルフ次元が  $\log_3 7$  であることがわかる。

#### 参考文献

- [1] K. J. Falconer, The Geometry of Fractal Sets, Cambridge tracts in mathematics 85 (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985).
- [2] 木上 淳, 私信.
- [3] S. Takahashi, Limiting behaviour of linear cellular automata, Proc. Japan Acad. 63 A (1987) 182-185.
- [4] S. Takahashi, Patterns of linear cellular automata, in preparation.
- [5] S. J. Willson, Cellular automata can generate fractals, Discrete Applied Mathematics 8 (1984) 91-99.
- [6] S. J. Willson, The equality of fractional dimensions for certain cellular automata, physica 24 D (1987) 179-189.
- [7] S. J. Willson, Computing fractal dimensions for additive cellular automata, Physica 24 D (1987) 190-206.