数理解析研究所講究録
第669巻 1988年 16-43

Cut-elimination for SBL

名古屋大学理学部　新井敏康

(Toshiyasu Arai)

K. Schütte は、

[S] Eine beweistheoretische Abgrenzung des Teilsystems der Analysis mit Π^1_2-Separation und Bar-Induktion, Sitzungsberichte d. Bayer. Akad. d. Wiss. Math.-Nat. Kl. 1987, 11-41.

において、以下に述べる定理を証明している。

<u>定理</u>　原始帰納的整列順序 $\prec$ について、

Π^1_2-Sep + BI $\vdash$ TI($\prec$) $\Rightarrow$ the order type of $\prec$ は順序数 $\psi_0 I$ より小さい。

但し、ここに、Π^1_2-Sep + BI は、二階の算術の部分体系で、その主な公理は、次の (Π^1_2-Sep) と (BI) である：

$(\Pi^1_2\text{-Sep})\quad \forall x \neg(A_0(x) \wedge A_1(x)) \rightarrow \exists X \forall x [(A_0(x) \supset x \in X) \wedge$
$\wedge (A_1(x) \supset x \notin X)]$

A_0, A_1 はともに Π^1_2-formula,

$(BI)\quad \forall X F(X) \rightarrow F(V)$

F は arithmetical formula, V は任意の abstract.

また、(帰納的)順序数 $\psi_0 I$ は、W. Buchholz と K. Schütte によって、次の論文で定義されたものである:

[BS] Ein Ordinalsystem für die beweistheoretische Abgrenzung der Π^1_2-Separation und Bar-Induktion, ibid, 1983, 99-132.

[S] における証明は、Buchholz による $\Omega_{\mu+1}$-rule を使った infinitary proof へ、有限の証明図を埋め込んでから、cut を取り除くという方法(の拡張)によっている。

このノートでは、その [S] における証明を、有限の証明図に対する cut-elimination の(直接)証明に書きかえる。

証明は紙幅の都合上、省略する。

§1. A Version of Ordinal Diagrams.

この§では、のちに必要となる'順序数'の体系とそれに関する基本的な定義・命題を述べる。その構成と大小の定義は、[BS]における collapsing functions と竹内外史による ordinal diagram の両方を折衷して得られた。

6つの記号 $0, I, +, \omega, \Omega, d$ からなる記号列の集合を5つ $F, R, E, P, O(I)$ と、$O(I)$の上の二項関係 $<$, 写像 $S: O(I) \to R_0 \cup \{I\}$ $(R_0 := R \cup \{0\})$ と、各 $\alpha \in O(I)$, $\sigma \in R_0$ について、Fの有限部分集合 $K\alpha$, Eの有限部分集合 $K_\sigma \alpha$ を、同時に定義する。

I. 0. $F \subseteq R \subseteq E \subseteq P \subseteq O(I)$.

1. $0 \in O(I)$; $I \in E$.

2. $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in P$ & $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n$ $(n \geq 2)$ $\Rightarrow$

 $\Rightarrow$ $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \in O(I)$

 (但し、$\alpha \geq \beta :\Leftrightarrow \beta \leq \alpha :\Leftrightarrow \beta < \alpha$ or $\beta = \alpha$ で、

 $\beta = \alpha$ は、α, β が記号列として一致すること)

3. $\alpha \in O(I) \setminus E$ $\Rightarrow$ $\omega^\alpha \in P$

4. $0 \neq \alpha \in O(I) \setminus F$ & $\alpha < I$ $\Rightarrow$ $\Omega_\alpha \in R$

5. $I > \alpha \in O(I)$, $\sigma \in R_0$ & $\sigma \leq S\alpha$ $\Rightarrow$ $d_\sigma \alpha \in E$

6. $I \leq \alpha \in O(I) \quad \Rightarrow \quad d\alpha \in F$.

II. $S\alpha \in R_0 \cup \{I\}$ *for* $\alpha \in O(I)$

1. $S0 = 0$; $SI = I$.

2. $S(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) = S\alpha_1$.

3. $S\omega^\alpha = S\alpha$.

4. $S\Omega_\alpha = \Omega_\alpha$.

5. $Sd_\sigma\alpha = \sigma$.

6. $Sd\alpha = d\alpha$.

III. $K\alpha \subseteq F$ *for* $\alpha \in O(I)$

1. $K0 = KI = \phi$.

2. $K(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) = K\alpha_1 \cup \cdots \cup K\alpha_n$.

3. $K\omega^\alpha = K\alpha$.

4. $K\Omega_\alpha = K\alpha$.

5. $Kd_\sigma\alpha = K\sigma$.

6. $Kd\alpha = \{d\alpha\}$.

IV. $K_\sigma\alpha \subseteq E$ *for* $\sigma \in R_0$, $\alpha \in O(I)$.

1. $K_\sigma 0 = K_\sigma I = \phi$

2. $K_\sigma(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) = K_\sigma\alpha_1 \cup \cdots \cup K_\sigma\alpha_n$.

3. $K_\sigma \omega^\alpha = K_\sigma \alpha$.

4. $K_\sigma \Omega_\alpha = \begin{cases} K_\sigma \alpha & \text{if} \quad \sigma < \Omega_\alpha, \\ \phi & \text{if} \quad \Omega_\alpha \leq \sigma. \end{cases}$

5. $K_\sigma d_\tau \alpha = \begin{cases} \{d_\tau \alpha\} & \text{if} \quad \sigma = \tau, \\ K_\sigma \tau \cup K_\sigma \alpha & \text{if} \quad \sigma < \tau, \\ \phi & \text{if} \quad \tau < \sigma. \end{cases}$

6. $K_\sigma d\alpha = \begin{cases} K_\sigma \alpha & \text{if} \quad \sigma < d\alpha, \\ \phi & \text{if} \quad d\alpha \leq \sigma. \end{cases}$

V. $\alpha < \beta$ for $\alpha, \beta \in O(I)$.

1. $0 \neq \alpha \Rightarrow 0 < \alpha$.

2. $m, n \geq 1$, $2 < m+n$ のとき.

$\alpha_1 + \cdots + \alpha_m < \beta_1 + \cdots + \beta_n \iff$ 2.1 or 2.2

2.1 $m < n$ & $\alpha_i = \beta_i$ for $1 \leq i \leq m$

2.2 $\exists k$ s.t. $1 \leq k \leq \min\{m, n\}$, $\alpha_k < \beta_k$ &

$\alpha_i = \beta_i$ for $1 \leq i < k$.

3. $\omega^\alpha < \omega^\beta \iff \alpha < \beta$

4. $\alpha \in E$ について.

$\alpha < \omega^\beta \iff \alpha < \beta$

$\omega^\beta < \alpha \iff \beta < \alpha$

5. $\Omega_\alpha < \Omega_\beta \iff \alpha < \beta$

6. $d\alpha < \Omega_\beta \Leftrightarrow d\alpha < \beta$

$\Omega_\beta < d\alpha \Leftrightarrow \beta < d\alpha$

7. $\tau \in R_0$ について.

$\tau < d_\sigma \alpha \Leftrightarrow \tau \leq \sigma$

$d_\sigma \alpha < \tau \Leftrightarrow \sigma < \tau$

(つまり. $\sigma \in R_0$ について. $\sigma^+ \in R$ を.

1. $0^+ = \Omega_1$ $(1 := \omega^0)$ 2. $(\Omega_\alpha)^+ = \Omega_{\alpha+1}$

3. $(d\alpha)^+ = \Omega_{d\alpha+1}$.

として. $\sigma < d_\sigma \alpha < \sigma^+$.)

8. $I \neq \alpha \in \Xi \Rightarrow \alpha < I$.

9. $d\alpha < d\beta \Leftrightarrow$ 9.1 or 9.2

9.1 $K\alpha < d\beta$ & $\alpha < \beta$.

9.2 $d\alpha \leq K\beta$

但し. (有限)集合 $M, N \subseteq O(I)$ について.

$M < N :\Leftrightarrow \forall \alpha \in M \, \exists \beta \in N \, (\alpha < \beta)$

$M \leq N :\Leftrightarrow \exists \beta \in N \, \forall \alpha \in M \, (\alpha \leq \beta)$

また.

$M < \alpha :\Leftrightarrow M < \{\alpha\}$

$\alpha \leq N :\Leftrightarrow \{\alpha\} \leq N$.

10. $\sigma < \tau \Rightarrow d_\sigma \alpha < d_\tau \beta$.

11. $d_\sigma\alpha < d_\sigma\beta \iff$ 11.1 or 11.2

11.1 $K_\sigma\alpha < d_\sigma\beta$ & $d_\tau\alpha < d_\tau\beta$.

11.2 $d_\sigma\alpha \leq K_\sigma\beta$.

但し、11.1における τ と、$d_\tau\alpha, d_\tau\beta$ は次のように定義する:

$$\tau = \min\{\tau \in R : (\sigma < \tau \ \& \ K_\tau\alpha \cup K_\tau\beta \neq \phi) \text{ or } \tau = \max\{(S\alpha)^+, (S\beta)^+\}\}$$

(つまり、$\sigma < \tau \leq \max\{S\alpha, S\beta\}$ で $K_\tau\alpha \cup K_\tau\beta \neq \phi$ となる τ があれば、τ は min. such、さなくば、$\max\{(S\alpha)^+, (S\beta)^+\}$)

また、$S\alpha < \tau$ なる α, τ に対しては $d_\tau\alpha$ は α のこととする:

$d_\tau\alpha := \alpha$ if $S\alpha < \tau$.

同種の convention として、

$\omega^\alpha := \alpha$ for $\alpha \in E$; $\Omega_\alpha := \alpha$ for $\alpha \in F \cup \{0\}$

$d\alpha := \alpha$ for $\alpha < I$.

上の定義は well defined で、$(O(I), <)$ は全順序になる。

Proposition 1.

a) $K_\sigma \alpha < d_\sigma \alpha$ for $\sigma \leq S\alpha$

b) $K_\sigma \alpha = \phi$ $\quad S\alpha < \sigma$

c) $K_\sigma \alpha \leq \alpha$ $\quad S\alpha = \sigma$

d) $K\alpha \leq \alpha$ $\quad \alpha < I$

e) $K\alpha < d\alpha$ $\quad I \leq \alpha$

f) $\alpha < \omega^\alpha$ $\quad \alpha \notin E$

g) $\alpha < \Omega_\alpha$ $\quad \alpha \notin F$ & $0 < \alpha < I$.

以下. $\sigma, \tau, \pi \in R_0$ とする.

Definition $\alpha, \beta < I$ について.

$\alpha \ll_\tau \beta$ $:\Leftrightarrow$ 1. $\alpha < \beta$, &

2. $K_\sigma \alpha < d_\sigma \beta$ for $\forall \sigma \geq \tau$.

Lemma 2

$\alpha \ll_\tau \beta \Rightarrow d_\sigma \alpha < d_\sigma \beta$ for $\forall \sigma \geq \tau$.

つねに. $K_\sigma \alpha \leq d_\sigma \alpha$ は成立するから.

$\alpha < \beta \Rightarrow (\alpha \ll_\tau \beta \Leftrightarrow \forall \sigma \geq \tau (d_\sigma \alpha < d_\sigma \beta))$.

Lemma 3

$\alpha \ll_\tau \beta$, $\pi \geq \tau$ $\Rightarrow$ $d_\pi \alpha \ll_\tau d_\pi \beta$.

Lemma 4

$\alpha \ll_\tau \beta$, $\tau \leq \pi$, $\pi^+ \underline{\ll}_\tau \beta$ $\Rightarrow$ $d_\pi \alpha \ll_\tau \beta$.

但し. $\alpha \underline{\ll}_\tau \beta$ $:\Leftrightarrow$ $\alpha \ll_\tau \beta$ or $\alpha = \beta$.

Lemma 5

$S\alpha = \sigma$ $\Rightarrow$ $\alpha \ll_0 d_\sigma \alpha$.

Definition 一般の $\alpha, \beta \in O(I)$ について.

$\alpha \ll_\tau \beta$ $:\Leftrightarrow$ 1 & 2 & 3

1. $\alpha < \beta$ 2. $K\alpha < d\beta$ 3. $K_\sigma \alpha < d_\sigma d\beta$ for $\forall \sigma \geq \tau$.

$K\alpha \leq \alpha$ に注意すると. 前の定義の $\alpha \ll_\tau \beta$ と. この $\alpha \ll_\tau \beta$ は. $\alpha, \beta < I$ について 一致する.

Lemma 6.

$\alpha \ll_\tau \beta$ $\Rightarrow$ $d\alpha \ll_\tau d\beta$

Definition $\quad \alpha << \beta \;:\Leftrightarrow\; \alpha <<_0 \beta$.

Lemma 7 $\quad \alpha < I \leq \eta \;\&\; \alpha << \eta \;\Rightarrow\; \Omega_\alpha << \eta$.

Lemma 8 $\quad K\sigma\alpha < d_\sigma d_\sigma$

Lemma 9 $\quad$ a) $\alpha << \alpha \# \beta \quad$ for $\beta \neq 0$

b) $\alpha << \omega^\alpha \quad$ for $\alpha \in \Xi$.

ここに、$\alpha \# \beta$ は α と β の natural sum を表わす。

Lemma 10 $\quad$ a) $\alpha <<_\tau \gamma$, $\beta <<_\tau \gamma$ & $\alpha \# \beta < \gamma \Rightarrow \alpha \# \beta <<_\tau \gamma$

b) $\alpha <<_\tau \gamma$ & $\omega^\alpha < \gamma \Rightarrow \omega^\alpha <<_\tau \gamma$.

Lemma 11 $\quad$ a) $\alpha <<_\tau \beta$ & $\gamma \underline{<<}_\tau \delta \Rightarrow \alpha \# \gamma <<_\tau \beta \# \delta$

b) $\alpha <<_\tau \beta \Rightarrow \omega^\alpha <<_\tau \omega^\beta$.

Lemma 12 $\quad$ a) $0 \leq \beta < I \Rightarrow \beta \underline{<<} \Omega_\beta$

b) $\alpha <<_\tau \beta < I \Rightarrow \Omega_\alpha <<_\tau \Omega_\beta$

Lemma 13 $\quad \alpha < \beta < I \Rightarrow \alpha <<_{S\beta} \beta$.

Definition H (Herleitungsterme)

1つの variable u について、H と、各 $t \in H$ について $D(t)$ を定義する：

1. $u \in H \;;\; D(u) = O(I)$.

2. $t \in H$ & $s \in H \cup O(I) \Rightarrow t \# s \in H$;

$$D(t \# s) = \begin{cases} D(t) \cap D(s) & \text{if } s \in H \\ D(t) & \text{if } s \in O(I) \end{cases}$$

3. $t \in \mathcal{H} \Rightarrow \omega^t \in \mathcal{H}$; $D(\omega^t) = D(t)$.

4. $t \in \mathcal{H}$ & $\sigma \in R_0 \Rightarrow d_\sigma t \in \mathcal{H}$;

$$D(d_\sigma t) = \{\alpha \in D(t) ;\ s\alpha \leq \sigma \ \&\ t[\alpha] < I\}.$$

但し、 $t \in \mathcal{H}$ について、 $t[\alpha]$ は、 $t[\alpha/u]$ のこと。 つまり、 t の中の u の occurrences すべてに α を代入したもの。 $t[\alpha] \in O(I)$ となる。

5. $t \in \mathcal{H} \Rightarrow \Omega t \in \mathcal{H}$; $D(\Omega t) = \{\alpha \in D(t) ;\ t[\alpha] < I\}$

6. $t \in \mathcal{H} \Rightarrow d t \in \mathcal{H}$; $D(d t) = \{\alpha \in D(t) ;\ \alpha < I\}$.

<u>Definition</u> $\alpha \ll_I \beta \ :\Leftrightarrow\ \alpha < \beta$.

<u>Lemma 14</u> $t \in \mathcal{H}$.

$\alpha, \beta \in D(t)$ & $\alpha < \beta \Rightarrow t[\alpha] \ll_{s\beta} t[\beta]$.

<u>Lemma 15</u> $t \in \mathcal{H}$.

a) $\alpha < \beta \in D(t) \Rightarrow \alpha \in D(t)$.

b) $\alpha \in D(t) \Rightarrow \alpha \underline{\ll} t[\alpha]$.

<u>Lemma 16</u> $t \in \mathcal{H}$, $\alpha < \beta \in D(t)$.

a) $K t[\alpha] \leq K t[\beta] \cup K\alpha$.

b) $K_\sigma t[\alpha] \leq K_\sigma t[\beta] \cup K_\sigma \alpha$ for $\forall \sigma \in R_0$.

<u>Lemma 17</u> $t \in \mathcal{H}$, $\alpha < \beta \in D(t)$.

$\alpha \ll \gamma$ & $t[\beta] \underline{\ll} \gamma \Rightarrow t[\alpha] \ll \gamma$.

<u>Lemma 18</u> $t \in H$, $\alpha < \beta \in D(t)$

a) $t[\alpha] \ll t[\beta] \# \alpha$.

b) $\alpha \ll t[\beta] \Rightarrow t[\alpha] \ll t[\beta]$.

<u>Lemma 19</u> $\sigma^+ \in D(t)$, $t[\sigma^+] < I$ なら.

$\alpha \ll t[\sigma^+] \Rightarrow t[d_\sigma \alpha] \ll t[\sigma^+]$.

§2. A Second Order Logic Calculus SBL.

L を 二階の言語で、Lには述語定数はないものとし、Lの free (2nd order) variables を U, V, … で、bound var. を X, Y, … で記す。(すべて unary) 二階の論理計算 SBL を Tait 流に書くと次のようになる：

Axiom : $\neg A, A$ (A は prime formula)

($\wedge$), ($\vee$), ($\forall x$), ($\exists x$) (first order の $\forall$, $\exists$ の導入), (cut) はふつうどうり。

(weak) $\dfrac{\Gamma}{\Delta}$, $\Gamma \subseteq \Delta$.

$$\frac{\Gamma, F(U)}{\Gamma, \forall X F} \qquad \frac{\Gamma, F(U)}{\Gamma, \exists X F}$$

U は eigenvariable

(BI) $$\frac{\Gamma,\ F(A)}{\Gamma,\ \exists X F}$$ $\exists X F$ は isolated, A は任意の formula (unary abstract)

(Π^1_2-Sep) $$\frac{\Gamma,\ A \subseteq B}{\Gamma,\ \exists X (A \subseteq X \subseteq B)}$$ $A \in \Pi^1_2$, $B \in \Sigma^1_2$

Definition of Π^1_2, Σ^1_2.

1. prime formulae $\subseteq \Pi^1_2 \cap \Sigma^1_2$
2. $A \overset{\wedge}{\underset{\vee}{}} B \in \Pi^1_2\ [\Sigma^1_2] \iff A, B \in \Pi^1_2\ [\Sigma^1_2]$.
3. $\overset{\forall}{\underset{\exists}{}} x A \in \Pi^1_2\ [\Sigma^1_2] \iff A \in \Pi^1_2\ [\Sigma^1_2]$.
4. $\forall X A \in \Pi^1_2 \iff A \in \Pi^1_2$

   $\exists X A \in \Sigma^1_2 \iff A \in \Sigma^1_2$

   $\forall X A \in \Sigma^1_2 \iff A \in \Pi^1_2 \cap \Sigma^1_2$ かつ、一番外の $\forall X$ が他の $\exists Y, \forall Y$ に affect しないとき.

   $\exists X A \in \Pi^1_2 \iff A \in \Pi^1_2 \cap \Sigma^1_2$ かつ 一番外の $\exists X$ が他の $\forall Y, \exists Y$ に affect しないとき.

よって、

$A \in \Pi^1_2 \cap \Sigma^1_2 \iff A$ は isolated.

Definition $\forall X\ [\exists X]$ の formula A における ある occurrence が ausgezeichnet とは、それで始まる subformula $\forall X F\ [\exists X F]$ が $\Pi^1_2\ [\Sigma^1_2]$ で かつ、その $\forall X\ [\exists X]$ が他の $\forall Y, \exists Y$ に affect しないこと.

§3. Stratified System SBL′.

Lに対し、stratified（独：geschichtet）language L′をつくる。

L′には、2^{nd} order var. として、次のものがある：

free unstratified $\quad U, V, \cdots$;

stratified $\quad U^\alpha, V^\alpha, \cdots$; $\quad \alpha < I \quad (\alpha \in \mathcal{O}(I))$

bound unstratified $\quad X, Y, \cdots$;

stratified $\quad X^\eta, Y^\eta, \cdots$; $\quad \eta \leq I$ なる limit η.

U^α, X^η の α, η を index という。

(SB)L′の formula は、Lでの formula A から次のようにして得られるもののみ：

1. A の中のいくつかの free var. U に U^α を代入。ここに、U の occurrences すべてに同一の index α を用いる。
2. A の中のすべての nicht ausgezeichnet な $\forall X, \exists X$ に同一の $\eta \leq I$ による $\forall X^\eta, \exists X^\eta$ を代入。

<u>Definition</u> 1. L′の formula A′が Π'_2 [Σ'_2] :⟺

A′の中のすべての index を取り去ったLの formula A が Π^1_2 [Σ^1_2].

2. L′の formula A が <u>klein</u> :⟺ Aに $\forall X^I$ が occur しない。

3. L′の formula A が <u>stratified</u> :⟺ Aの中のすべての free var. が stratified, i.e., index がついている、かつ、$\forall X^I, \exists X^I$ は occur しない。

stratified A について．$A \in \Pi^1_2$ なら $st_\Pi(A)$ を，$A \in \Sigma^1_2$ なら $st_\Sigma(A)$ を定義する：　$\Lambda = \Pi, \Sigma$ として．

1. $st_\Lambda(U^\alpha(t)) := st_\Lambda(\neg U^\alpha(t)) := \Omega_\alpha$.

2. $st_\Lambda(A \overset{\wedge}{\vee} B) := \max\{st_\Lambda(A), st_\Lambda(B)\}$.

3. $st_\Lambda(\overset{\forall}{\exists} x A) := st_\Lambda(A)$.

4. $st_\Pi(\forall X A) := st_\Pi(A)$; $st_\Sigma(\exists X A) := st_\Sigma(A)$;

   $st_\Pi(\exists X A) := st_\Sigma(A)^+$; $st_\Sigma(\forall X A) := st_\Pi(A)^+$

5. $st_\Pi(\forall X^\eta A) := \max\{\Omega_\eta, st_\Pi(A)\}$;

   $st_\Sigma(\exists X^\eta A) := \max\{\Omega_\eta, st_\Sigma(A)\}$.

SBL′ の公理と推論図．

Axiom :　$\neg A, A$　　ここに，A に $\forall X^I, \exists X^I$ は occur しない，i.e., $Gr(A)=0$.

$(\wedge), (\vee), (\forall x), (\exists x), (cut), (weak)$ は SBL と同じ．

<u>Definition</u>　formula A の I-Grad $Gr(A)$ と Grad $gr(A)$.

1. $Gr(A)=0$　if　A に $\forall X^I, \exists X^I$ が occur しない．

以下，$\forall^I$ か $\exists^I$ が occur する formula について．

2. $Gr(A \overset{\wedge}{\vee} B) = \max\{Gr(A), Gr(B)\}+1$.

3. $Gr(\overset{\forall}{\exists} x A) = Gr(A)+1$.

4. $Gr(\overset{\forall}{\exists} X A) = 1$

5. $Gr(\overset{\forall}{\exists} X^I A) = \max\{1, Gr(A)\}+1$.

1. $gr(A) = 0$ if A は mine か $\forall X F$, $\exists X F$ の形。

2. $gr(A \overset{\wedge}{\vee} B) = \max\{gr(A), gr(B)\} + 1$ 3. $gr(\overset{\forall}{\exists} x A) = gr(A) + 1$.

4. $gr(\overset{\forall}{\exists} X^{\eta} A) = gr(A) + 1$.

SBL′ の推論図の続き.

kritisch : $\dfrac{\Gamma,\ F(U^{\chi})}{\Gamma,\ \exists X^{\eta} F}$

ここに. 1) χ は空 (つまり U^{χ} は unstratified U), か.

2) χ はある $\alpha \in O(I)$ で, $\alpha < \eta$.

ausgezeichnet : $\dfrac{\Gamma,\ F(U^{\chi})}{\Gamma,\ \exists X F}$ $\dfrac{\Gamma,\ A \subseteq B}{\Gamma,\ \exists X (A \subseteq X \subseteq B)}$

ここに. F と $A \subseteq B$ には. ともに $\exists Y^{I}$ が occur, つまり.

$Gr(F) \neq 0$, $Gr(A \subseteq B) \neq 0$. (χ は空は. ある $\alpha \in O(I)$).

stark : $\dfrac{\Gamma,\ F(U)}{\Gamma,\ \forall X F}$ $\dfrac{\Gamma,\ F(U)}{\Gamma,\ \forall X^{\eta} F}$

Typ I Typ η

$Gr(F) \neq 0$

schwach : $(\forall X)$ $\dfrac{\Gamma,\ F(U^{\chi})}{\Gamma,\ \forall X F}$ ここに. 0) $Gr(F) = 0$, かつ.

1) F が stratified で $st_{\pi}(\forall X F) = \Omega_{\mu}$ なら χ は μ, かつ

2) $\forall X F \notin \Sigma^1_2$ なら $\forall X F$ は stratified.

(BI) $\dfrac{\Gamma,\ F(A)}{\Gamma,\ \exists xF}$ 　$\exists xF \notin \Pi^1_2$ なら $\exists xF$は stratified.

Stufe σ の substitution ($\sigma \in R_0$) :　$\sigma = \Omega_\mu$ として.

$\dfrac{\Gamma}{\Gamma\left(\overset{\mu}{\underset{A}{\cup}}\right)}$ 　ここに, ${}^\forall B \in \Gamma$ ($St_\pi(B) \le \sigma$).

$\forall^I$- Reduktion von Typ η ($\eta < I$) :

$\dfrac{\Gamma}{\Gamma'}$ 　ここに, Γ'は, Γの中のいくつかの formulae の $\forall^I$ を $\forall^\eta$ でおきかえたもので, かつ, 次をみたす
${}^\forall A \in \Gamma$ (A か $\neg A$ は klein).

$\exists^I$- Reduktion von Typ η ($\eta < I$) :

$\dfrac{\Gamma}{\Gamma'}$ 　ここに Γ'は, Γの中のいくつかの formulae の $\exists^I$ を $\exists^\eta$ でおきかえたもので, かつ, 次をみたす:
${}^\forall A \in \Gamma$ (Aは klein)

SBL′ の証明図は, 上の公理・推論図からなる木で, 以下に述べる条件をみたし, さらに, あとで定義する'順序数'のはりつけが可能なもののみをいう:

1. 終式は first order formulae よりなり, しかも, その中の free var. の index はすべて 0 (がくっついている) で;

2. 証明図の最後に, 空な substitution von Stufe 0 があり;

3. substitution は end-piece 内にしかなく；

4. $\exists^{\mathrm{I}}$-Red の下に、unstratified な free var. はなく；

5. 次に定義する Sequenz の Höhe について、Δ が $\exists^{\mathrm{I}}$-Red, $\forall^{2}$-Red の下式なら、 $h(\Delta) \leq \omega$ でなければならない。

<u>Definition</u> SBL′ の'証明図'の Sequenz Γ の Höhe $< \omega^2$：

1. $h(\Gamma) = 0$ ，Γ は 終式 か substitution の上式

2. $h(\Gamma) = \omega$ ，Γ は $\exists^{\mathrm{I}}$-Red, $\forall^{2}$-Red の上式。

3. $h(\Gamma) = \max\{h(\Delta), \omega\cdot Gr(D) + gr(D)\}$，

$\dfrac{\Gamma \quad (\Gamma')}{\Delta}$ は、 3.1. (cut) で D は cut formula；

または 3.2 (BI) $\dfrac{F(A), \Gamma_0}{\exists X F, \Gamma_0}$ で

D は F(A)．

4. $h(\Gamma) = h(\Delta)$ ， $\dfrac{\Gamma \quad (\Gamma')}{\Delta}$ は 1, 2, 3 以外。

ordinal diagram $\in O(I)$ に free var. $U, V, \cdots; U^*, V^*, \cdots$ の occurrences を許した記号列を、SBL′ の'証明図' P の各 Schlußstrich J と各 Sequenz Γ にはりつける。

1. $o(\mathrm{Axiom}) = IS + 1$，

ここに、IS は、その Axiom より下にある eigenvariables $\upsilon, V, \cdots, \upsilon^*, V^*, \cdots$ 全部を # で結んだもの。

$$J \quad \frac{\Gamma \quad (\Gamma')}{\Delta}$$ J が、

2. (weak), substitution : $o(J) = o(\Gamma)$.

3. $(\vee)$, $(\forall x)$, $(\exists x)$, schwach $(\forall X)$, kritisch : $o(J)=o(\Gamma)\#1$.

4. $(\wedge)$: $o(J) = o(\Gamma) \# o(\Gamma')$

5. (cut) : 5.1 $h(\Gamma) \geqq \omega$ かつ Gr (cut formula) $\neq 0$ のとき、

$$o(J) = I \# o(\Gamma) \# o(\Gamma').$$

5.2 o.w. $o(J) = o(\Gamma) \# o(\Gamma')$.

6. $\forall^I$-Red von Typ η : $o(J) = o(\Gamma) \# \eta$.

7. $\exists^I$-Red von Typ η : $o(J) = o(\Gamma) \# \eta$.

但し、$\gamma = o(\Gamma)$ について、$d\gamma \leq \eta$ となっているときのみ、$\exists^I$-Red が適用できる。

8. ausgezeichnet : $o(J) = o(\Gamma) \# I$.

9. stark von Typ η : $\gamma = o(\Gamma)$ として、

$o(J) = \gamma[\eta/\upsilon]$

υ は J の eigenvar. で、$\gamma[\eta/\upsilon]$ は γ の中のすべての υ の occ. に η を代入したもの。

10. (BI) : $o(J) = o(\Gamma) \# st_\Sigma(\exists X F)^+ \# I \cdot k$.

(BI) $\Gamma = \dfrac{\Gamma_0,\ F(A)}{\Gamma_0,\ \exists X F}$ として.

ここに、$\exists X F$ が stratified でないときには、

$st_\Sigma(\exists X F)^+ := I$ とおく。また、$k = 0, 1$ は、

$$k = \begin{cases} 1 & , h(\Gamma) \geqq \omega \text{ かつ } Gr(F(A)) \neq 0. \\ 0 & , o.w. \end{cases}$$

11. substitution von Stufe σ : $o(\Delta) = d_\sigma \gamma$

但し、$\gamma = o(J) = o(\Gamma)$.

12. 11. 以外のとき、$\gamma = o(J)$ として、

12.1 $h(\Gamma) = \omega \cdot m + k$, $h(\Delta) < \omega$, $m \neq 0$ のとき。

$o(\Delta) = d(\omega_{m-1}(\gamma))$.

12.2 $h(\Gamma) = \omega \cdot m + k$, $h(\Delta) = \omega \cdot n + l$, $n \neq 0$ のとき。

$o(\Delta) = \omega_{m-n}(\gamma)$

12.3 $h(\Gamma) = k$, $h(\Delta) = l$ のとき。

$o(\Delta) = \omega_{k-l}(\gamma)$

($\omega_0(\gamma) := \gamma$; $\omega_{n+1}(\gamma) = \omega^{\omega_n(\gamma)}$)

として.

13. $o(P) = o(P$ の終式$)$

とする。

<u>Main Lemma</u> SBL′ の証明図 P が (cut) を含めば、SBL′ の証明図 P_0、P_1 がつくれて、

1) P の終式は、P_0、P_1 の終式から cut free に証明でき、

2) $o(P_0)$, $o(P_1) \ll o(P)$,

3) 証明図が P_0、P_1 に分れるのは、explicit な ($\wedge$) を下げるときのみ。

<u>Theorem</u> (PRWO(($O(I)$, <)) のもとで)

SBL で cut-elimination が成立する。

以下、Main Lemma の証明の方針を述べる。

§4. Main Lemma の証明(の概略)

M1. end-piece 内の explicit logical inference を下げる。

M2. end-piece 内の implicit axiom の消去。

M3. suitable cut の cut formula が $\exists XF$ の形で、$G_r(\exists XF) \neq 0$ のとき。

(イ) P が次の形のとき。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Delta_0, \neg F(U)}}{\Delta_0, \forall X \neg F} \quad \dfrac{\dfrac{\vdots}{G, \Gamma_0}}{\exists X F, \Gamma_0}}{\ }$$

$$\begin{cases} G = (A \subseteq B) \\ F = (A \subseteq X \subseteq B) \end{cases}$$

または、

$$G = F(U_1^{\alpha_0})$$

$$\begin{array}{c} \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \alpha \ \dfrac{\Delta, \forall X \neg F \qquad \exists X F, \Gamma}{\Delta, \Gamma} \ \beta \\ \vdots \\ \Pi \quad \lambda \\ \vdots \\ \Phi \quad d\sigma \\ \vdots \end{array}$$

Φ は Δ, Γ の下で初めて Höhe $< \omega$ となるところ。Π は Δ, Γ と Φ の間にある $\exists^2$-Red のうち一番上にあるものの上式。

（そのような $\exists^2$-Red がないときは、次の (2) になる）。

P_0：

$$\dfrac{\begin{array}{c} \vdots \\ \dfrac{\Delta, \forall X \neg F \ \alpha}{\Delta, \Gamma, \forall X \neg F} \\ \vdots \\ \dfrac{\Pi, \forall X \neg F \quad \lambda_0}{\Pi, \forall X \neg F' \quad \lambda_0 \# \eta} \\ \vdots \\ \Phi, \forall X \neg F' \quad d\sigma_0 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \vdots \\ \dfrac{\exists X F, \Gamma \ \beta}{\exists X F, \Delta, \Gamma} \\ \vdots \\ \dfrac{\exists X F, \Pi \quad \lambda_1}{\exists X F', \Pi \quad \lambda_1 \# \eta} \\ \vdots \\ \exists X F', \Phi \quad d\sigma_1 \end{array}}{\begin{array}{c}\Phi \\ \vdots\end{array}}$$

$\forall^2$-Red von Typ η

$\exists^2$-Red von Typ $\eta := d\lambda_1$

$\lambda_0 \# I, \lambda_1 \# I \ll \lambda$ より $\lambda_0 \# \eta, \lambda_1 \# \eta \ll \lambda$.

$d(\lambda_0 \# \eta), d(\lambda_1 \# \eta) < d(\lambda)$ ，よって $\Pi, \forall X \neg F'$; $\exists X F', \Pi$ にもとと同じ Typ の $\exists^2$-Red をほどこせる。$\sigma_0, \sigma_1 \ll \sigma$ ，$I \leq \sigma$ より $d\sigma \in E$ から、$\omega_n(d\sigma_0 \# d\sigma_1) \ll d\sigma$ for $\forall n < \omega$.

(ロ) (イ) の Ⅱ がないとき.

$$P_0: \quad \cfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Delta, \forall X\neg F\end{matrix}}{\Delta, \Gamma, \forall X\neg F}\ \alpha \qquad \cfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \exists XF, \Gamma\end{matrix}}{\exists XF, \Delta, \Gamma}\ \beta$$

$$\forall^{I}\text{Red von } T_{7p}\,\eta \quad \cfrac{\cfrac{\Phi, \forall X\neg F}{\Phi, \forall X\neg F'}\ \delta_0 \quad d(\delta_0 \# \eta) \qquad \cfrac{\exists XF, \Phi}{\exists XF', \Phi}\ \delta_1 \quad d(\delta_1 \# \eta)}{\Phi} \quad \exists^{I}\text{Red von } T_{7p}\,\eta := d\delta_1$$

$$\vdots$$

以下, M4–6で, ausgezeichnet, または kritisch で X の Hauptformel の $Gr \neq 0$ のもので, $\exists^{I}$-Red を permute し, M7–8で stark von T_{7p} I と $\forall^{I}$-Red を permute する.

M4. P が次の形のとき ($Gr(\exists XF') = 0$)

$$P: \quad \cfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A \subseteq B, \Gamma_0\end{matrix}}{\exists XF, \Gamma_0}\ \gamma \quad \gamma \# I$$

$$\vdots$$

$$\exists^{I}\text{Red von } T_{7p}\,\eta. \quad \cfrac{\exists XF, \Gamma}{\exists XF', \Gamma'}\ \delta \qquad d\delta \leq \eta.$$

$$\vdots$$

$$P_0: \quad \cfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A \subseteq B, \Gamma_0\end{matrix}}{\exists XF, A \subseteq B, \Gamma_0}\ \gamma$$

$$\vdots$$

$$\cfrac{A' \subseteq A' \quad \cfrac{\exists XF, A \subseteq B, \Gamma}{\exists XF', A' \subseteq B', \Gamma'}\ \delta_0}{\cfrac{\exists XF', F'(A'), \Gamma'}{\exists XF', \Gamma'}\ (\mathrm{B\,I})}\ 4$$

$$\vdots$$

$F = (A \subseteq X \subseteq B)$

まず, $\delta_0 \# I \ll \delta$.

$\sigma = \Omega_\mu = s \star_I (\exists XF')$ とおく.

(イ) $\ell(\exists x F', \Gamma') = \omega$ のとき。

$o(\exists x F', \Gamma'; P) = \sigma \# \eta$

$o(\exists x F', \Gamma'; P_0) = 4 \# \sigma_0 \# \eta \# \sigma^+$.

$\sigma_0 \# I \ll \sigma$ より $4 \# \sigma_0 \# \eta \# \sigma^+ < \sigma \# \eta$.

$4, \sigma_0, \eta \ll \sigma \# \eta$ は明らか。

μ は η か、F に occur する ある v^α と ある $k < \omega$ について $\alpha + k$ のいずれか。$\eta \ll \sigma \# \eta$ と、$\alpha \ll \lambda \ll \sigma$ ($A \subseteq B$、Γ_0 の上に Axiom が 1つはある) より $\mu \ll \sigma \# \eta$.

$I \le \sigma$ と Lemma 7 より $\sigma^+ = \Omega_{\mu+1} \ll \sigma \# \eta$.

(ロ) $\ell(\exists x F', \Gamma') < \omega$ のとき。

$o(\exists x F', \Gamma'; P) = d(\sigma \# \eta)$

$o(\exists x F', \Gamma'; P_0) = \omega_m(4 \# d(\sigma_0 \# \eta) \# \sigma^+)$

(イ) と同様。$d(\sigma \# \eta) \in E$ に注意。

M5. P が次の形のとき ($Gr(\exists x F') = 0$)

$$P: \quad \begin{array}{c} \vdots \\ F(v^\alpha), \Gamma_0 \\ \hline \exists x F, \Gamma_0 \\ \vdots \\ \exists x F, \Gamma \\ \hline \exists x F', \Gamma' \\ \vdots \end{array} \; (\exists^I\text{-Red at the lower inference})$$

$$P_0: \quad \begin{array}{c} \vdots \\ F(v^\alpha), \Gamma_0 \\ \hline \exists x F, F(v^\alpha), \Gamma_0 \\ \vdots \\ \exists x F, F(v^\alpha), \Gamma_0 \\ \hline \exists x F', F'(v^\alpha), \Gamma' \\ \hline \exists x F', \Gamma' \\ \vdots \end{array}$$

M4と同様。

M6. P が次の形のとき。

P:
$$\begin{array}{ll}
 & \vdots \\
 & \dfrac{F(U^+),\ \Gamma_0}{\exists X^I F,\ \Gamma_0}\ \begin{array}{l}\gamma\\ \gamma\#1\end{array} \\
 & \vdots \\
\begin{array}{l}\exists^2\text{-Red}\\ \text{von Typ }\eta,\\ d\sigma\le\eta\end{array} & \dfrac{\exists X^I F,\ \Gamma}{\exists X^\eta F',\ \Gamma'}\ \sigma \\
 & \vdots
\end{array}$$

P_0:
$$\begin{array}{c}
\vdots\\
\dfrac{F(U^+),\ \Gamma_0}{\exists X^I F, F(U^+), \Gamma_0}\ \gamma\\
\vdots\\
\dfrac{\dfrac{\exists X^I F, F(U^+), \Gamma}{\exists X^\eta F', F'(U^+), \Gamma'}\ \sigma_0}{\exists X^\eta F', \Gamma'}\\
\vdots
\end{array}$$

$\gamma \ll \sigma$ より $\gamma < d\sigma \le \eta$.　$\gamma < \eta$.

M7. stark von Typ I と $\forall^2$-Red を permute。その1.

P:
$$\begin{array}{ll}
 & \vdots \\
 & \dfrac{\Gamma_0,\ F(U)}{\Gamma_0,\ \forall X F}\ \begin{array}{l}\gamma[U]\\ \gamma[I]\end{array} \\
 & \vdots \\
\begin{array}{l}\forall^2\text{-Red}\\ \text{von Typ }\eta\end{array} & \dfrac{\Gamma,\ \forall X F}{\Gamma',\ \forall X F'}\ \sigma[I] \\
 & \vdots
\end{array}$$

P_0:
$$\begin{array}{c}
\vdots\\
\dfrac{\Gamma_0, F(U^\mu)}{\Gamma_0, F(U^\mu), \forall X F}\ \begin{array}{l}\gamma' \underline{\ll} \gamma[U^\mu]\\ = \gamma[\mu]\end{array}\\
\vdots\\
\text{schwach}\ \dfrac{\dfrac{\Gamma, F(U^\mu), \forall X F}{\Gamma', F'(U^\mu), \forall X F'}\ \sigma' \underline{\ll} \sigma[\mu]}{\Gamma',\ \forall X F'}\\
\vdots
\end{array}$$

$Gr(\forall X F) \neq 0$.

ここに、μ は、$\sigma = \Omega_\mu = st_\pi(\forall X F')$.

$o(\Gamma', \forall X F'; P_0) \ll o(\Gamma', \forall X F'; P)$ には、

$\sigma[\mu] \# \eta \# 1 \ll \sigma[I] \# \eta$ を示せば十分。

$\sigma[\mu] \# \eta \# 1 < \sigma[I] \# \eta$. μ は η が F に occur するある U^+ とある $k<\omega$ について $\gamma + k$。 $\eta \ll \sigma[I] \# \eta$ と $\gamma \ll \gamma[I]$ より $\mu \ll \sigma[I] \# \eta$. $I \in D(\sigma[\cdot])$ より Lemma 17 から $\sigma[\mu] \ll \sigma[I] \# \eta$.

M 8. その2

P:

$$
\begin{array}{ll}
\vdots & \\
\dfrac{\Gamma_0,\ F(U)}{\Gamma_0,\ \forall X^I F} & \begin{array}{l}\gamma[U]\\ \gamma[I]\end{array} \\
\vdots & \\
\dfrac{\Gamma,\ \forall X^I F}{\Gamma',\ \forall X^\eta F'} & \delta[I] \\
\vdots &
\end{array}
$$

$\forall^2$-Red. vom Typ η

P_0:

$$
\begin{array}{ll}
\vdots & \\
\dfrac{\Gamma_0,\ F(U)}{\Gamma_0,\ F(U),\ \forall X^I F} & \gamma[U] \\
\vdots & \\
\dfrac{\Gamma,\ F(U),\ \forall X^I F}{\Gamma',\ F'(U),\ \forall X^\eta F'} & \delta[U] \\
\dfrac{}{\Gamma',\ \forall X^\eta F'} & \text{stark von Typ } \eta. \\
\vdots &
\end{array}
$$

M7 と同様にして, $\delta[\eta] \# \eta \ll \delta[I] \# \eta$.

M9. $\eta \le I$ について P が次の形のとき.

P:

$$
\begin{array}{lcc}
 & \vdots & \vdots \\
\begin{array}{l}\gamma[U_1]\\ \gamma[\eta]\end{array} & \dfrac{\Delta_0,\ \neg F(U_1)}{\Delta_0,\ \forall X^\eta \neg F} & \dfrac{F(U^\alpha),\ \Gamma_0}{\exists X^\eta F,\ \Gamma_0}\ \begin{array}{l}\beta \quad ,\ \alpha<\eta \\ \beta\#1\end{array} \\
 & \mathfrak{J}\ \vdots & \vdots \\
 & \multicolumn{2}{c}{\dfrac{\Delta,\ \forall X^\eta \neg F \qquad \exists X^\eta F,\ \Gamma}{\Delta,\ \Gamma}\quad \delta = \delta[\eta]} \\
 & \multicolumn{2}{c}{\vdots} \\
 & \multicolumn{2}{c}{\dfrac{}{\Pi}\ \lambda} \\
 & \multicolumn{2}{c}{\vdots}
\end{array}
$$

Π は, Δ, Γ の下で初めて Höhe $< h(\Delta,\ \forall X^\eta \neg F)$ となるところ。$\mathfrak{J}$ は $\Delta_0, \forall X^\eta \neg F$ から $\Delta, \forall X^\eta \neg F$ へ至る fibre の部分。

P_0 :

$$
\dfrac{\dfrac{\Delta_0,\ \neg F(U^\alpha) \qquad \gamma' \ll \gamma[\alpha]}{\Delta_0,\ \neg F(U^\alpha),\ \forall X^\eta \neg F}}{} \qquad\qquad \dfrac{F(U^\alpha),\ \Gamma_0 \quad \beta}{\exists X^\eta F,\ F(U^\alpha),\ \Gamma_0}
$$

$$
\sigma_1 \quad \dfrac{\Delta,\neg F(U^\alpha),\ \forall X^\eta \neg F \qquad \exists X^\eta F,\ \Gamma}{\Delta,\ \Gamma,\ \neg F(U^\alpha)} \qquad \dfrac{\Delta,\ \forall X^\eta \neg F \qquad \exists X^\eta F,\ F(U^\alpha),\ \Gamma}{F(U^\alpha),\ \Delta,\ \Gamma} \quad \sigma_2
$$

$$
\dfrac{\lambda_1 \quad \dfrac{\vdots}{\Pi,\ \neg F(U^\alpha)} \qquad\qquad \dfrac{\vdots}{F(U^\alpha),\ \Pi} \quad \lambda_2}{\Pi \qquad\qquad \lambda'}
$$

$\vdots$

。$\eta < I$ のときに、P_0 が SBL' の証明図になっていることについて。

i) σ の substitution について.

$\alpha < \eta$: limit. より. $st_\pi(\neg F(U^\alpha)) \le st_\pi(\forall X^\eta \neg F)$.

ii) σ の $\exists^2$-Red J について.

$J \quad \dfrac{\Phi}{\Phi'} \quad \begin{array}{l}\theta = \theta[\eta] \\ \theta \# \nu,\ d(\theta \# \nu).\end{array} \qquad , d\theta \le \nu$ として.

対応する P_0 での $\exists^2$-Red を

$\dfrac{\neg F(U^\alpha),\ \Phi}{\neg F(U^\alpha),\ \Phi'} \quad \theta'$ とおると. $\theta' \ll \theta[\alpha]$ で.

J と $\Delta_0, \forall X^\eta \neg F$ の間に sub. von Stufe σ があったとしても、$\eta \le \Omega_\eta \le st_\pi(\forall X^\eta \neg F) \le \sigma$ より.

$S\eta \le \eta$, $\eta \in D(\theta[\cdot])$. $\alpha < \eta < I$ より

$d\theta[\alpha] < d\theta[\eta] = d\theta \le \nu$ ∴ $d\theta' < \nu$. よって同じ Typ の $\exists^2$-Red をほどこせる. $\sigma_1 \ll \sigma$ には. $\eta \in D(\sigma[\cdot])$ と Lemma 18 によればよい。

M10. P が次の形のとき.

$$
P:\quad \dfrac{\beta\quad \Delta_0,\ \neg F(U^{\mu})}{\beta\#1\quad \Delta_0,\ \forall x \neg F}
\qquad
\dfrac{F(A),\ \Gamma_0\quad \alpha}{\exists x F,\ \Gamma_0}
$$

$$
\vdots
$$

$$
\dfrac{\Delta,\ \forall x \neg F \qquad \exists x F,\ \Gamma}{\Delta,\ \Gamma}
$$

$$
\vdots
$$

$$
I > \iota \quad \underline{\Pi}
$$

$$
\vdots
$$

Π は Δ, Γ の下で Stufe $\leq \sigma$ な $\exists$sub. のうち一番上にあるものの上式。 $\sigma = \Omega_\mu = st_\pi(\forall x \neg F)$.

$$st_\pi(\neg F(U^{\mu})) = st_\pi(\forall x \neg F)$$

$$\exists x F \in \Pi_2 \Rightarrow st_\pi(\exists x F) \geq \sigma^+$$

P_0:

$$
\dfrac{\Delta_0,\ \neg F(U^{\mu})}{\Delta_0,\ \neg F(U^{\mu}),\ \forall x \neg F}
$$

$$
\vdots
$$

$$
\dfrac{\Delta,\ \neg F(U^{\mu}),\ \forall x \neg F \qquad \exists x F,\ \Gamma}{\Delta,\ \Gamma,\ \neg F(U^{\mu})}
$$

$$
\vdots
$$

Stufe σ の substitution

$$
\dfrac{\dfrac{\theta\quad \Pi,\ \neg F(U^{\mu})}{d\sigma\theta\quad \Pi,\ \neg F(A)} \qquad F(A),\ \Gamma_0\quad \alpha}{\dfrac{\Gamma_0,\ \Pi}{\exists x F,\ \Gamma_0,\ \Pi}}
$$

$$
\vdots
$$

$$
\dfrac{\Delta,\ \forall x \neg F \qquad \exists x F,\ \Gamma,\ \Pi}{\Delta,\ \Gamma,\ \Pi}
$$

$$
\vdots
$$

$$
\iota' \quad \underline{\Pi}
$$

$$
\vdots
$$

M11. suitable cut の cut formula が $A \wedge B$ の形のとき。

M12. suitable cut の cut formula が $\forall x A$ の形のとき。

This completes the proof of Main Lemma.