数理解析研究所講究録
第676巻1988年1-4

球の充塡問題について

京都大学数理解析研究所／一松　信

1．球の充塡問題とは、n次元空間中に同じ大きさの超球をできるだけ密に詰込む方法や、その個数を求める問題である。　これは未解決の難問である。

n=1,2 のときは自明だが、n=3 は 300年前にNewtonとGregory とが大論争した「13球の問題」である。　これはその 200年後にようやく解決された。　n≧4 の場合で解決されているのは僅かに n=8 (E8格子) と24(Leech格子) だけである。

私がこれに興味を持ったのは、正則格子による多重積分のためだったが、最近固有ベクトルの反復計算での初期ベクトルに利用できないかと考えている。　但しこれは単なる幾何の問題でなく、整数論・二次形式・テータ関数・符号理論など、数学の諸分野と深く関連し、個々の次元数nによる個性が強い。　一般論だけでは済まない点が興味を引くのだが、逆に実用上不便な点でもある。

2．本来の充塡問題は、空間の広い領域に同じ大きさの超球をできるだけ多く詰込む問題である。　その双対として被覆問題もある。　しかしここでは接触数 (contact number;kissing number) 問題に限定する。

それは一球の周りに接しうる同じ大きさの超球の最大個数を求める問題である。

24次元までで現在わかっている最大個数は、順次下の通りである。　この内下線は真の最大と証明されたもの、* は格子状でない並べ方によるものである。

$\underline{2}$ $\underline{6}$ $\underline{12}$ 24 40 72 126 $\underline{240}$ 306* 500* 582 840* 1130* 1582 2564

4320 5346 7398 10668 17400 27720 49896 93150 $\underline{196560}$

それより上では 32,48次元でかなり大きい値がわかっている。　しかしn=32は1980年以後 2度も記録が更新されており、まだ究極の最大数には程遠いらしい。

E8格子までは19世紀に知られていた。　それ以上では第１層が空になり、(9～11次元で)格子状の充塡では十分に詰込めない。

12次元のCoxeter-Todd格子、16（一般に 2の累乗）次元の Barnes-Wall格子も昔から専門家には知られていたらしいが、公表されたのは近年である。

3．前項の説明に若干補足をする。

まずConwayらの本から取った、現在まで既知の最も密な例を挙げる。　最良なことが証明されているのは、表の内枠で囲った部分だけに過ぎない。

DIMENSION	1	2	3	4	5	6	7	8	12	16	24
DENSEST PACKING	$\boxed{Z}$	$\boxed{A_2}$	A_3	D_4	D_5	E_6	E_7	E_8	K_{12}	Λ_{16}	Λ_{24}
HIGHEST KISSING NUMBER	$\boxed{Z}$ $\boxed{2}$	$\boxed{A_2}$ $\boxed{6}$	$\boxed{A_3}$ $\boxed{12}$	D_4 24	D_5 40	E_6 72	E_7 126	$\boxed{E_8}$ $\boxed{240}$	K_{12} 756	Λ_{16} 4320	$\boxed{\Lambda_{24}}$ $\boxed{196560}$
THINNEST COVERING	$\boxed{Z}$	$\boxed{A_2}$	A_3^*	A_4^*	A_5^*	A_6^*	A_7^*	A_8^*	A_{12}^*	A_{16}^*	Λ_{24}
BEST QUANTIZER	$\boxed{Z}$	$\boxed{A_2}$	A_3^*	D_4	D_5^*	E_6^*	E_7^*	E_8	K_{12}	Λ_{16}	Λ_{24}

第１層が空といったのは、整数のノルムが１の点がなくなり、ノルムが２の点が最も内側にくる（従って実質的に第１層）というつもりだった。　24次元を越えると第２層も空になるというのも、同じくノルムが３の点が最も内側になるという意味である。

格子の名前の内、A_n, D_n, E_n はいずれも単純 Lie環のルート系として得られる場合に、E.Cartanによる Lie環の分類の対応する記号を転用したものである。

4．ここで一寸した「散歩」をしてみる。

４次元のD4 格子は、４次元の体心立方格子である。　すなわち成分がすべて整数か，またはすべてが　整数＋½　である点全体からなる。　これは Hurwitz の 4元整数であるし、また正24胞体による充塡形でもある。　一点を固定したとき、そこからのノルム（距離の２乗）がｎである点の個数は、ｎの奇数の約数全体の和の24倍に等しい。　したがってＮが十分大きいとき、ノルムがＮ以下の格子点の総数はほぼ

$$24\times\ [\sigma_0(N)+\sigma_0(N/2)+\sigma_0(N/3)+...]=(24/4)N^2[1^2+1/2^2+1/3^2+...]$$

である。　但し$\sigma_0(N)$ は Nまでの奇数の和を表し、それはほぼ$(N/2)^2$ に等しい。

他方このときの各格子点の勢力域(Voronoï集合；その点が最も近い格子点であるような空間の点の全体）は正24胞体であり、その体積は½である。　ゆえにこ

の½倍がほぼ半径$\sqrt{N}$の超球の体積　$\pi^2 N^2/2$ に等しい。　厳密には上と下とから不等式で評価し、N^2で割って $N\to\infty$とするのだが、そうすればこれから

$$1^2+1/2^2+1/3^2+\ldots=\pi^2/6$$

をうる。

同様に８次元のE８格子は、成分がすべて整数かまたは整数＋½　の点で、成分の代数和が偶数である点全体からなる。　これは変換してCayley整数全体で表すこともできる。　前の形では、ノルムはすべて偶数2nであり、それが2nである点の個数は nの約数の３乗の和$\sigma_3(n)$の 240倍に等しい。　そして勢力域の体積は１である。　このことから、前と同様に

$$240\times\ [\Sigma_3(N)+\Sigma_3(N/2)+\Sigma_3(N/3)+\ldots]=(240/4)N^4\ [1^4+1/2^4+1/3^4+\ldots]$$

に１を掛けた値が、ほぼ半径$\sqrt{2N}$　の超球の体積　$\pi^4 N^4\cdot 16/4!$に等しい。　但し$\Sigma_3(N)$ はＮまでの整数の３乗の和を示す。　N^4で割って $N\to\infty$とすれば、次の級数の和をうる。　$1^4+1/2^4+1/3^4+\cdots=\pi^4/90$.

同様の操作が次に述べる24次元の Leech格子にも適用できる。　この場合には、次節に述べる通り正しくは Ramanujan関数の補正が入るのだが、それは主要項に対して充分に小さく $N\to\infty$のとき０に近づくので、ノルムがｎの点の個数は、ほぼｎの約数全体の11乗の和の 65520/691倍である。　そして基本的な勢力域の体積は、1/2↑12である。　ゆえに同様の関係式を作り N^{12} で割って $N\to\infty$とすれば、

$$1^{12}+1/2^{12}+1/3^{12}+\ldots=691\times(2\uparrow 12)\pi^{12}/12!\times 65520=691\pi^{12}/638512875$$

をうる。　$(691/2730=B_{12})$

もちろんこれらの公式を求めるためだけには、格子点の個数や基本勢力域の体積など、様々な量を計算しなければならないので、これは牛刀のそしりをまぬかれない。

さらにノルムがｎの格子点の個数が、ｎの簡単な整数論的関数で表されるのは、いまの所上の例だけである。　したがってこのような方法で、例えば$\zeta(3)$ を表すうまい公式が求められるものなのかどうか（質問があったが)、私にはわからない。

最後に Leech格子の作り方を述べる。

5. 24次元の Leech格子(J.Leech;1964)は、現在まで知られているそれ以下の次元の最密格子をすべて含む。 これ以上の次元では第2層が空になり、25,26次元の格子ははなはだ複雑である。

Leech 格子の作り方。 まず次のようにして、二進Goray コード(有限個の例外的な完備コードの一つ)を作る。 24ビット、距離8. $a^{(n)}=(a_0, \ldots, a_{23})$

a_0は偶パリティ。 $a_{12},\ldots,a_{23}$は $n=0\sim4095$を二進数で表したビットパターン。
$n\geq2048$に対しては、4095-nに対するコードの全ビット反転。$a^{(0)}$は全部0。
$a^{(1)}$ の $a_1,\ldots,a_{11}$は順次 1 0 1 1 1 0 0 0 1 0 1 (これは11に対する 1～11の平方剰余指数). 以下$n=2^q$ $(1\leq q\leq10)$に対する $a_1,\ldots,a_{11}$ は、順次これを左に巡回シフトしたもの。 $1\leq n\leq2047$に対する $a^{(n)}$ は nを二進表示して 1のあるビットに対応する2^qに当る基本コード全部の二進和をとる。

Leech格子: 1°.すべての座標が 整数+ ¼ であり、成分の代数和が奇数である点、及び Gorayコードの各々に対して 1のあるビットの符号を反転した点全体。
2°. Gorayコードの各々に対し, 0のある位置は整数、 1のある位置は½の奇数倍とし、成分全体の和が偶数になる点全体。

原点からのノルム(距離の二乗)は2以上の正の整数であり、ノルムがnの点の個数は65520(多くは196560) の倍数である。 正確にいうと、n の約数の11乗の和を$\sigma_{11}(n)$、Ramanujan関数を$\tau(n)$ とすると、

$$[\sigma_{11}(n)-\tau(n)]\cdot65520/691$$

である。 691は第12 Bernoulli数の分子! 上式は常に整数。

6. 数値解析から離れるが、このあたりから我々が知らなかった「数学の秘境」が開けてくるらしい。

[参] • J.H.Conway-N.J.A.Sloane 編: Sphere Packing,Lattices and Groups, Springer-Verlag(Grundlehren Nr.290),1988.

• 森口・宇田川・一松:岩波数学公式II,(級数の和) 初版1958; 新版1986.