

### 調和関数の近似について

一橋大学 経済学部 杉原正顕 (Masaaki Sugihara)

#### 1. はじめに (問題提起)

いま, ある Jordan 領域  $D$  で調和で, かつ, 領域  $D$  およびその境界  $\partial D$  も含めて連続な関数  $f$  が与えられているとする. さらに, 同じ性質をもつ  $N$  個の関数  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  を考え,  $f$  を  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  の線形結合  $\sum_{k=1}^N c_k \varphi_k$  で近似すること

を考える.  $f$  に関する情報としては, Dirichlet 問題を解くことなどを想定して, 境界  $\partial D$  における  $f$  の値が与えられているとする.  $f$  を  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  の線形結合で近似する方法としては, 補間, 最小二乗法, 最良近似等々が考えられるが, ここでは, 素朴な補間を考えることにする. つまり, 適当な境界  $\partial D$  上の  $N$  個の標本点  $P_1, P_2, \dots, P_N$  をとり, 標本点上での  $f$  の値と  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  の線形結合 (補間式) の値が一致するように補間式を作り,  $f$  を近似することを考える (ここで, 線形結合の係数を決定する線形方程式:

$$\sum_{k=1}^N c_k \varphi_k(P_j) = f(P_j) \quad j=1, 2, \dots, N$$

の係数行列  $(\varphi_k(P_j))_{j,k}$  は正則と仮定する (より正確には, 係数行列が正則になるように  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N, P_1, P_2, \dots, P_N$  がとられていると仮定する).

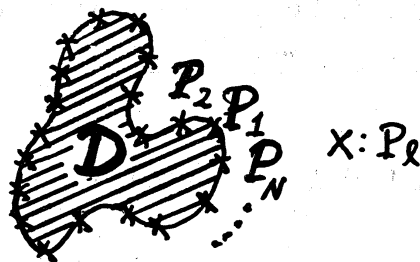


図 1 調和関数の補間 (x: 標本点)

このような調和関数の近似法の代表的なものとしては, 古くから知られている調和多項式による近似法や, 最近, Dirichlet 問題の解法として用いられようになった代用電荷法などがある.

上記のような近似（補間）を考えると、最も基本的な問題は、次の2つである。

いま、近似の対象となる調和関数の族を  $\mathcal{F}$  で表すことにする。

(1) 近似誤差（sup-ノルムで考える）：

$$\begin{aligned} \|\text{error}\|_{\infty} &= \max_{P \in D} \left| f(P) - \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k(P) \right| \\ &= \max_{P \in \partial D} \left| f(P) - \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k(P) \right| \end{aligned}$$

（最後の等式は、調和関数の最大値原理による）

はどれくらい小さくできるのか、つまり、近似誤差の下限

$$\inf_{\substack{P_1, P_2, \dots, P_N \\ \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N}} \left( \sup_{f \in \mathcal{F}} \|\text{error}\|_{\infty} \right)$$

の評価。

(2) 上記の誤差の下限の値に近い誤差評価を与えるような関数  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  および、標本点  $P_1, P_2, \dots, P_N$  のとり方はどのようなものであるのか。

以下、2. で、 $D$  が単位円板で、 $\mathcal{F}$  が単位円板上のある調和関数族である場合に、(1), (2) の問題を考え、これらの問題に対する解答（完全な解答ではないが）を与える。一般の場合には、(1), (2) の問題を解くことは、非常に難しい。そこで、3. では、より素朴な問題『補間に用いる関数  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  が与えられたとき、補間誤差を小さくするには標本点  $P_1, P_2, \dots, P_N$  をどのように取ればよいのか』を考える。とくに、複素領域で正則な関数の多項式補間において重要な役割を果たす Fekete 点の概念と同様の概念を調和関数の近似の場合についても導入して、この問題に対する1つの解答を与える。

## 2. 単位円板上のある調和関数族を補間する場合における問題(1), (2)

### 2.1 問題設定

考える領域  $D$  を単位円盤  $U$  とし、近似の対象となる調和関数族  $\mathcal{F}$  を次のような関数族とする。

$$\mathcal{F} = \left\{ f(r, \theta) : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f(r, \theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos(\theta) + b_k \sin(\theta)), \right. \\ \left. \text{where } |a_k|, |b_k| \leq A \left(\frac{1}{\rho}\right)^k \quad (A > 0, \rho > 1) \right\}$$

《注意1》 容易に分かるように、

$\phi$  は {半径  $\rho$  の円板の内部で調和な関数}

である。

## 2.2 問題(1): 補間誤差の下限の評価について

### (I) 補間誤差の下限の上からの評価

特殊な  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N, P_1, P_2, \dots, P_N$  について、補間誤差の上からの評価を与えれば、(一般には、必ずしも良い評価とは限らないが) 補間誤差の下限の上からの評価が得られる。ここでは、代用電荷法の場合と調和多項式を用いた補間法の場合の補間誤差の上からの評価を用いて、補間誤差の下限の評価を与える。

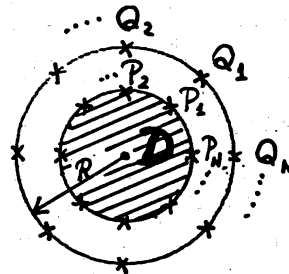
#### ①代用電荷法 (fundamental solution 法と呼ぶこともある) の場合

代用電荷法の詳細については、参考文献: 村島[3]を参照せよ。代用電荷法における近似関数  $\phi(S) = \log |S - Q|$  を定めるための電荷点  $Q$  や拘束点 (今の場合の標本点)  $P$  のとり方は、いろいろ考えられるが、ここでは、もっとも素朴に

$$Q_k = \left( R \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right), R \sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \right)$$

$$P_k = \left( \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right), \sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \right)$$

( $k=1, 2, \dots, N$ )



と取ることにする。

図2 拘束点 (標本点)  $P$  と電荷点  $Q$  の配置

このことは、1. に述べた問題設定に従えば、 $N$  個の近似関数として

$$\phi_k(S) = \log |S - Q_k|, \quad Q_k = \left( R \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right), R \sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \right) \quad (k=1, 2, \dots, N)$$

をとり、 $N$  個の標本点として

$$P_k = \left( \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right), \sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \right) \quad (k=1, 2, \dots, N)$$

をとることに対応する。

この場合の補間誤差は、桂田[1]に与えられており、結果は次のようである。

•  $1 < R < \sqrt{\rho}$  のとき

以下の2つの場合に比べて補間誤差が大きいので、誤差の評価結果は省略する

•  $R = \sqrt{\rho}$  のとき

$$\|\text{error}\|_{\infty} \leq \left( \frac{2(1+C(R))}{1-\frac{1}{\rho}} \left(\frac{1}{\rho}\right)^{1/2} + \frac{16}{N \log \rho} + 8N \right) \left(\frac{1}{\rho}\right)^{N/2}$$

•  $R > \sqrt{\rho}$  のとき

$$\|\text{error}\|_{\infty} \leq \left( \frac{2(1+C(R))}{1-\frac{1}{\rho}} \left(\frac{1}{\rho}\right)^{1/2} + \frac{16}{\frac{\rho}{R^2} - 1} \right) \left(\frac{1}{\rho}\right)^{N/2} + \frac{8}{N \log R} \left(\frac{1}{R}\right)^N$$

$$C(R) = \text{Max} \left( 1, \frac{\log(R^N + 1)}{|\log(R^N - 1)|} \right)$$

《注意2》 これらの評価式からすると、 $R$ を大きくすればするほど誤差が小さくなるはずであるが、実際に計算を行ってみるとそのようにはならない（次の数値例参照）。これは、近似（補間）式を求めるときに解く線形方程式の条件数（condition number）が $R$ が大きくなるとともに、非常に速く大きくなる（より正確には

$$\text{condition number} \sim \frac{N |\log R|}{2} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{N/2} \quad )$$

ためであることが知られている。（ただし、次の《注意3》も参照せよ）

上記の誤差評価を確認するために、（ $\rho=2$ の場合）に属する関数

$$f(r, \theta) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{2}\right)^k (\cos(k\theta) + \sin(k\theta)) = \frac{1 - \frac{r}{2} \cdot \cos(\theta) + \frac{r}{2} \cdot \sin(\theta)}{1 - 2 \cdot \frac{r}{2} \cdot \cos(\theta) + \left(\frac{r}{2}\right)^2}$$

を用いて数値実験を行った。実験結果（補間誤差）を図3に示す。

図3から、さきに与えた誤差評価が実際の補間誤差をよく近似していることがみてとれる（このことは、数値実験に用いた関数の特殊性のゆえであるが）。また、 $R$ を大きくして行っても近似はよくなり、 $N$ が大きくなるところでは、 $R$ を大きくすると返って誤差が大きくなるのがみてとれる。

《注意3》 さきに《注意2》で、 $R$ を大きくするとき近似がよくなる（わるくなる）のは、条件数が大きくなるためであると述べた。しかし、さきに与えた条件数の評価からすると、その値は非常に大きく、単純な丸め誤差に関する議論からすると、この数値例にあげたような小さな補間誤差は得られないことになる。この「どうして条件数が非常に大きいにもかかわらず小さな補間誤差が得られるか」については、北川によってその理由が解明されている。北川[2]を参照せよ。

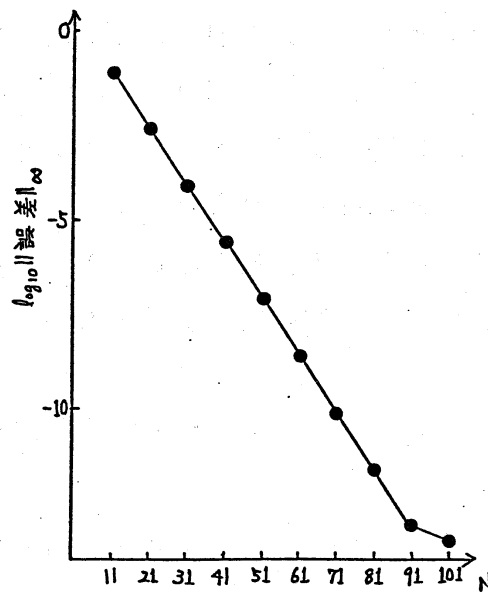
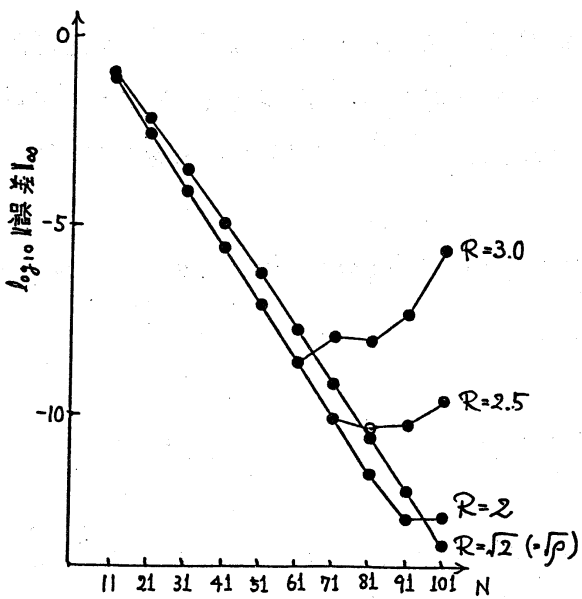


図3 代用電荷法を用いたときの誤差 (Facom 760 (倍精度) 使用)      図4 調和多項式を用いた近似法の誤差 (Facom 760 (倍精度) 使用)

② 調和多項式を用いた近似(補間)法の場合

議論を簡単にするために、標本点の数Nを奇数 ( $N=2M+1$ ) とする (Nが偶数の場合にも以下とほとんど同じ結果が成立する)。補間に用いる関数としては、調和多項式:

$$1, r \cos(\theta), r^2 \cos(2\theta), \dots, r^M \cos(M\theta)$$

$$r \sin(\theta), r^2 \sin(2\theta), \dots, r^M \sin(M\theta)$$

をとる。標本点の取り方は、いろいろと考えられるが、代用電荷法のとくと同様に素朴に円周のN等分点をとることにする:

$$P_k = \left( \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right), \sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \right) \quad (k=1, 2, \dots, N)$$

このとき、近似(補間)式は、次のように与えられることが分かる。

$$\hat{f}(r, \theta) = a_0 + \sum_{k=1}^M r^k ( a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta) )$$

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N f(P_l)$$

$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{l=1}^N f(P_l) \cos\left(\frac{2\pi k l}{N}\right), \quad b_k = \frac{2}{N} \sum_{l=1}^N f(P_l) \sin\left(\frac{2\pi k l}{N}\right) \quad (k=1, 2, \dots, M)$$

《注意4》 調和多項式の選点直交性のため、近似式をこのように陽に与えるこ

とができる。この近似式の係数 $a_k, b_k$ の計算式をみれば分かるように、代用電荷法の場合と違い、 $f(P_1)$ から、これらの係数が精度よく計算できることに注意。また、蛇足ではあるが、これらの近似式の係数は、FFTを用いて高速に計算できることにも注意せよ。

この近似式の表式を用いると、この近似式を用いた場合の近似誤差が、容易に評価でき、結果は次のようになる。

$$\|error\|_{\infty} \leq 4 \cdot A \cdot \frac{\left(\frac{1}{\rho}\right)^{(N+1)/2}}{1 - \frac{1}{\rho}}$$

この誤差評価の確認のため、代用電荷法の場合に数値実験に用いたのと同じ調和関数を用いて数値実験を行った。結果を図4に示す。この図から、上記の誤差評価が実際の補間誤差をよく近似していることがみてとれる。また、さきにも注意したように、代用電荷法のように丸め誤差の影響を大きく受けることはないことがみてとれる。

#### 【補間誤差の下限の上からの評価のまとめ】

①, ②における結果から、補間誤差の下限が上から、つぎのように評価されることがわかった。

$$\inf_{\substack{P_1, P_2, \dots, P_N \\ \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N}} \left( \sup_{f \in \mathcal{F}} \|error\|_{\infty} \right) \leq c(A, \rho) \cdot \left(\frac{1}{\rho}\right)^{N/2}$$

ここで、 $d(A, \rho)$  は、 $A, \rho$  から定まる（つまり、標本点数 $N$ には関係しない）ある定数。

#### (II) 補間誤差の下限の下からの評価

ここで、次の補間誤差の下限の下からの評価が成立することを示す。

$$d(A, \rho) \cdot \left(\frac{1}{\rho}\right)^{N/2} \leq \inf_{\substack{P_1, P_2, \dots, P_N \\ \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N}} \left( \sup_{f \in \mathcal{F}} \|error\|_{\infty} \right)$$

ここで、 $c(A, \rho)$  は、 $A, \rho$  から定まる（つまり、標本点数 $N$ には関係しない）ある定数。

上記の評価式の成立を証明するには、

『補間に用いる調和関数  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  を (任意に) 固定する. このとき, 任意に標本点  $P_1, P_2, \dots, P_N$  をとったとき (ただし, 補間式の係数を定める線形方程式の係数行列は正則になるよにとるとする), この標本点に対応して, ある関数  $f \in \mathcal{F}$  が存在して, 誤差評価

$$d(A, \rho) \cdot \left(\frac{1}{\rho}\right)^{N/2} \leq \|error\|_{\infty}$$

が成立する.』

ことを示せばよい.

以下, 『...』で言う関数  $f$  を具体的に構成して, 『...』を示す.

議論の簡単化のために標本点数  $N$  は偶数 ( $N=2M$ ) であるとする.

(step 1)  $f \in \mathcal{F}$  で  $f(P_l)=0$  ( $l=1, 2, \dots, N$ ) なる関数を構成する.

まず, 次のような形の関数

$$f(r, \theta) = a_0 + \sum_{k=1}^M \left(\frac{r}{\rho}\right)^k (a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)) \quad (\equiv 0)$$

で, 条件

$$f(P_l) = 0 \quad (l=1, 2, \dots, N)$$

を満足する関数を作る. このような関数を作ることが可能であることは, 関数に含まれているパラメータ (線形に入っている) の個数 ( $2M+1$ ) が, 条件の個数 ( $2M$ ) より大きいことより明かである.

つぎに, 上記で作った関数の係数

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_M, b_1, b_2, \dots, b_M$$

の中で絶対値最大のものを  $a_L$  (or  $b_L$ ) とする. (以下,  $a_L$  の場合を考える -  $b_L$  の場合でも以下の議論と同様のことを行うことができる). そして, 次の関数:

$$F = \frac{A}{a_L} f = A \frac{a_0}{a_L} + \sum_{k=1}^M A \left(\frac{r}{\rho}\right)^k \left( \frac{a_k}{a_L} \cos(k\theta) + \frac{b_k}{a_L} \sin(k\theta) \right)$$

を考える. この関数は, 容易に分かるように  $\mathcal{F}$  に含まれており, その作り方から, 条件

$$F(P_l) = 0 \quad (l=1, 2, \dots, N)$$

を満たす.

(step 2) (step 1)で作った関数  $F$  に対して, 近似誤差の下からの評価を行う.

次の一連の評価が成り立つ：

$$\begin{aligned}
 \|\text{error}\|_{\infty} &= \text{Max}_{S \in U} \left| F(S) - \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k(S) \quad (= \text{補間式}) \right| \\
 &= \text{Max}_{S \in U} | F(S) | \quad ( F(P_l) = 0, \quad l=1, 2, \dots, N \quad \text{より} \quad c_k = 0 \text{であるから}) \\
 &= \text{Max}_{\theta} | F(1, \theta) | \\
 &\geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(1, \theta)| |\cos(L\theta)| d\theta \\
 &\geq \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(1, \theta) \cdot \cos(L\theta) d\theta \right| \\
 &\geq A \cdot \left( \frac{1}{\rho} \right)^L \cdot \frac{1}{2} \quad (\sin, \cos \text{の直交性による}) \\
 &\geq \frac{A}{2} \cdot \left( \frac{1}{\rho} \right)^M \quad (= N/2)
 \end{aligned}$$

以上で、『...』に言う関数  $f$  (いまの場合  $F$ ) を構成することができた。

### (Ⅲ) 補間誤差の下限の評価のまとめ

(Ⅰ), (Ⅱ)の結果から, つぎの評価式が成立することが分かった。

$$d(A, \rho) \cdot \left( \frac{1}{\rho} \right)^{N/2} \leq \inf_{\substack{P_1, P_2, \dots, P_N \\ \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N}} \left( \sup_{f \in \mathcal{F}} \|\text{error}\|_{\infty} \right) \leq c(A, \rho) \cdot \left( \frac{1}{\rho} \right)^{N/2}$$

### 2.3 問題(2)：補間誤差の下限に近い誤差評価を与えるような補間関数および標本点について

2.2における議論から, ①で扱った代用電荷法や, ②で扱った調和多項式による近似法を用いればよい(補間誤差の下限に近い誤差評価を与える)ことがわかる。なお, この結果は, ここで考えた補間問題の場合には, 代用電荷法が, ほぼ最適な近似(補間)法を与えていることも示している。

### 3. Fekete点を用いた補間について

ここでは, 正則な関数の多項式補間において重要な役割を果たすFekete点の概念(Gaier[4]を参照せよ)と同様の概念を調和関数の近似の場合について導入して, 問題『補間に用いる調和関数  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  が与えられたとき, 補間誤差を小さくするには標本点  $P_1, P_2, \dots, P_N$  をどのように取ればよいか』に対して



1つの解答を与える。

まず、Fekete点なる概念を定義する。

### 定義

領域Dの境界上のN個の点  $P_1, P_2, \dots, P_N$  で

$$\Delta(P_1, P_2, \dots, P_N) \equiv \det \begin{vmatrix} \varphi_1(P_1) & \varphi_2(P_1) & \cdots & \varphi_N(P_1) \\ \varphi_1(P_2) & \varphi_2(P_2) & \cdots & \varphi_N(P_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1(P_N) & \varphi_2(P_N) & \cdots & \varphi_N(P_N) \end{vmatrix}$$

の絶対値を最大にするようなN個の点を（領域D及び調和関数  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  に関する）Fekete点という。

関数  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  を用いる補間において、標本点をFekete点ととると、つぎのことが成立する。

### 命題

関数  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  と標本点  $P_1, P_2, \dots, P_N$  を用いる補間を考える。任意に与えられた関数  $f$  に対する補間式は

$$\hat{f}(S) = \sum_{k=1}^N f(P_k) L_k(S), \quad L_k(S) = \frac{\overset{k \text{ 番目}}{\Delta(P_1, \dots, S, \dots, P_N)}}{\Delta(P_1, \dots, P_k, \dots, P_N)}$$

で与えられる（このことは、よく知られた事実である—容易に証明もできる）が、標本点をFekete点ととると

$$\max_{S \in \partial D} |L_k(S)| \leq 1 \quad (k=1, 2, \dots, N)$$

である。

この命題の成立は、Fekete点の定義から明らかであろう。しかし、このことから、つぎの重要な結果が得られる。

### 定理

関数  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  を用い、標本点としてFekete点を用いる補間を考える。与えられた調和関数  $f$  に対する補間式  $\sum_{k=1}^N c_k \varphi_k$  の補間誤差はつぎのように評価される：

$$\max_{S \in \partial D} |f(S) - \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k(S)| \leq (N+1) \inf_{g \in \mathcal{G}} \left( \max_{S \in \partial D} |f(S) - g(S)| \right)$$

(ここで,  $\mathcal{G}$  は  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  の線形結合全体の集合)

つまり, 補間誤差は, 最良近似誤差の  $(N+1)$  倍で上からおさえられる.

(証明)

$$\inf_{g \in \mathcal{G}} \left( \max_{S \in \partial D} |f(S) - g(S)| \right) = \mu$$

とする. いま, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して,

$$\max_{S \in \partial D} |f(S) - g(S)| = \mu + \varepsilon$$

なる  $g(S)$  を  $g_\varepsilon(S)$  とおく. このとき, つぎの一連の評価が成立する

$$\begin{aligned} |f(s) - \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k(S)| &= |f(S) - \sum_{k=1}^N f(P_k) L_k(S)| \\ &= |f(S) - g_\varepsilon(S) + \sum_{k=1}^N g_\varepsilon(P_k) L_k(S) - \sum_{k=1}^N f(P_k) L_k(S)| \\ &\leq |f(S) - g_\varepsilon(S)| + \sum_{k=1}^N |g_\varepsilon(P_k) - f(P_k)| |L_k(S)| \\ &\leq (N+1) \max_{S \in \partial D} |f(S) - g_\varepsilon(S)| \\ &= (N+1)(\mu + \varepsilon) \end{aligned}$$

ここで,  $\varepsilon$  は任意であることより, 求める不等式を得る. (定理の証明終わり)

この定理により, 標本点を Fekete 点ととることによって, 補間誤差を非常に小さくできることが分かる. 従って, 問題『補間に用いる調和関数  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  が与えられたとき, 補間誤差を小さくするには標本点  $P_1, P_2, \dots, P_N$  をどのように取ればよいか』に対して, 『標本点を Fekete 点にとればよい』が 1 つの解答を与える.

《注意 5》 Fekete 点を, 具体的にどのように計算すればよいのかについては, 複素関数論における Fekete 点についてもよく研究はされていない. 今後の課題としたい.

#### 【代用電荷法への定理の応用】

上記の定理を代用電荷法に応用するとつぎのような結果が得られる.

補間の対象となる関数族を 2.1 で与えた  $\mathcal{F}$  とし, 補間を考える領域  $D$  を単位

円板  $U$  に含まれる領域とする。そして、補間に用いる関数は、2の①で用いたのと同じ

$$\varphi_k(S) = \log |S - Q_k|, \quad Q_k = \left( R \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right), R \sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \right), \quad (k=1, 2, \dots, N)$$

とする。

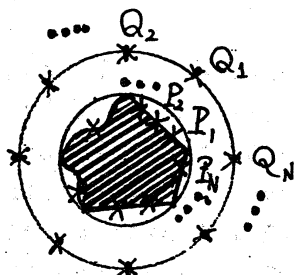


図5 拘束点(標本点)  $P$  と電荷点  $Q$  の配置

いま、標本点を Fekete 点にとれば、補間誤差について次の不等式が成立する：

$$\max_{f \in \mathcal{F}} \|\text{error}\|_{\infty} \leq c \cdot (N+1) \cdot \left(\frac{1}{\rho}\right)^{N/2}$$

この結果の成立は、調和関数  $f$  の  $D$  における最良近似誤差は、つねに、( $D$  を含む) 単位円板  $U$  における最良近似誤差より小さいことよりわかる。

#### 参考文献

- [1] 桂田祐史：代用電荷法に関する一考察，東京大学大学院（数学）修士論文，1986.
- [2] T. Kitagawa: On the numerical stability of the method of fundamental solution applied to Dirichlet problem, Japan J. Appl. Math., Vol.5(1988) pp.123-133.
- [3] 村島定行：代用電荷法とその応用，森北出版，1983.
- [4] D. Gaier: Lectures on Complex Approximation, Birkhauser, 1987.