数理解析研究所講究録
第679巻 1989年 58-68

半線形楕円型方程式の全域解について

広大理 草野 尚 (Takaŝi Kusano)

1. 偏微分方程式の解が空間 $\mathbb{R}^N$ 全体で定義されるとき，その解を全域解 (entire solution) と呼ぶことにします。例えば，$u_\alpha(x)=\left[\alpha\sqrt{N(N-2)}/(|x|^2+\alpha^2)\right]^{(N-2)/2}$ ($\alpha>0$ 定数) は方程式 $\Delta u+u^{(N+2)/(N-2)}=0$ の全域解です。楕円型方程式の全域解に関しては，"$\mathbb{R}^N$ 全域で $u(x)\leqq M(1+|x|^m)$ または $-u(x)\leqq M(1+|x|^m)$ ($M>0$ 定数; $m\geqq 0$ 整数) を満たす調和関数は高々 m 次の (x_1, …, x_N) の調和多項式である" (Liouville), "$\mathbb{R}^2$ で定義された滑らかな極小曲面は平面に限る" (Bernstein), "$\Delta u=e^u$ の全域解は存在しない" (Wittich, Walter) といった数々の興味ある結果が知られています。(参考文献 [15], [27, §49], [40], [43], [47])

2. 全域解の存在の問題を非線形楕円型方程式に対して論じたのは，恐らく草野[16]，安香-草野 [2] が最初でしょう。[16] では，方程式

(1) $$a_{ij}(x)u_{x_ix_j}+b_i(x)u_{x_i}+c(x)u=f(x,u)$$

が有界な全域解を持つ条件が与えられ，［2］では，有界領域のDirichlet問題に対して南雲［28］，安香［1］によって展開された所謂上級－下級関数の方法（supersolution-subsolution method）のアナロジーが方程式

(2) $\qquad a_{ij}(x,u,\nabla u)\,u_{x_i x_j} = f(x,u,\nabla u)$

の有界な全域解の構成にも有効であることが示されています。不等式 $a_{ij}(x,v,\nabla v)\,v_{x_i x_j} \leqq f(x,v,\nabla v)$, $x\in\mathbb{R}^N$, を満たす $v(x)$ を(2)の上級関数，$a_{ij}(x,w,\nabla w)\,w_{x_i x_j} \geqq f(x,w,\nabla w)$, $x\in\mathbb{R}^N$, を満たす $w(x)$ を(2)の下級関数と言うのですが，‘もしこれらが $w(x)\leqq v(x)$, $x\in\mathbb{R}^N$, となるように見出されるならば，(2)は $w(x)\leqq u(x)\leqq v(x)$, $x\in\mathbb{R}^N$, を満たす全域解 $u(x)$ を持つ’というのが［2］の主結果です。

3. ［2］と実質的に同じ上級－下級関数法が，十数年後に，Noussair と Swanson ［35, 36, 38］によって再発見されました。（彼等は外部境界値問題を扱っているのですが，全域解の問題はその特別な場合と考えられます。）その方法に拠って彼等は，方程式

(3) $\qquad \Delta u + K(x)\,u^{\gamma} = 0$

の外部領域で定義された正値解（これを正値外部解と呼びます）の存在を論じました。その結果を，(3)の正値外部解の非存在に関する既知の結果［37］と組み合せると，‘$N\geqq 3$, $\gamma>1$,

$K(x)>0$, $\limsup_{t\to\infty}[K^*(t)/K_*(t)]<\infty$ ($K^*(t)=\max_{|x|=t}K(x)$, $K_*(t)=\min_{|x|=t}K(x)$) とする。このとき，(3)が正値外部解を持たないための必要十分条件は $\int^\infty t^{N-1-\gamma(N-2)}K_*(t)dt=\infty$ である' という定理が得られます。特に，$N\geqq 3$, $\gamma>1$ のとき，方程式

(4) $\Delta u+u^\gamma=0$

が正値外部解を持たないための条件は $1<\gamma\leqq\frac{N}{N-2}$ となります。全域解は外部解でもありますから，$1<\gamma\leqq\frac{N}{N-2}$ のとき (4) は正値全域解を持ち得ない訳ですが，'全域解の非存在はより広い範囲の γ, $1<\gamma<\frac{N+2}{N-2}$, に対しても保証される' という事実が Gidas-Spruck [11] の研究から明らかになりました。このことは，外部解の世界と全域解の世界が(当然のことではありますが)微妙に異なっているという認識へ我我を導きます。

4. 全域解の存在に関する最近の研究の中で貢献度の高いものは，論文[32] ((3)を扱ったもの)，[33] ($\Delta u+K(x)e^u=0$ を扱ったもの) を始めとする Ni の一連の仕事です。Ni の主な結果の一つは，'$N\geqq 3$, $\gamma>1$, $|x|$ が十分大きいとき $|K(x)|\leqq\frac{C}{|x|^l}$ ($C>0$, $l>2$ 定数) ならば，方程式 (3) は無限に多くの一様正な全域解をもつ' というものです。ここで '一様正' とは，その解が R^N 全体で上と下から正の定数でおさえられているという意味です。この定理の証明は上級-下級関数法

を用いて行うのですが，議論の要諦は，(3)に自然に付随する常微分方程式

(5) $\quad (t^{N-1}y')' + t^{N-1}H(t)y^{\gamma} = 0, \qquad y'(0) = 0$

の正値解 $y(t)$ を具体的に作り上げ，(5)の上級関数を球対称な関数 $v(x) = y(|x|)$ として求める（下級関数も同様）ということにあります。この結果は後に川野[12]によって大幅に改良されました。川野によれば，'$N \geqq 3$, $\gamma > 0$, $|x|$が十分大きいとき $|K(x)| \leqq K^*(|x|)$ で $K^*(t)$ が $\int^{\infty} tK^*(t)dt < \infty$ を満たすならば，(3)は無限に多くの一様正な全域解をもつ'のです。彼の議論の核心は，球対称な上級，下級関数を作るために用いる(5)の解 $y(t)$ の存在を，(5)と同値な積分方程式

$$y(t) = \eta - \frac{1}{N-2}\int_0^t \left[1 - \left(\frac{s}{t}\right)^{N-2}\right] sH(s)y^{\gamma}(s)ds \quad (\eta > 0 \text{ 定数})$$

を Schauder-Tychonoff の不動点定理を援用して解くことによって確認するという点にあります。川野による一様正な全域解は無限遠において正の極限値をもつことが内藤[29]によって示されました。（関連する文献[13]，[22]，[23]，[26]，[41]，[42]）

5. 方程式(3)において $N \geqq 3$, $K(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$，とします。この場合，冒頭に挙げた例が示しているように，(3)は無限遠点で0になる正値全域解を持つことがあります。（これを減衰

正値解と名付けます.)‘(3)の減衰正値全域解は $|x|\to\infty$ のとき $|x|^{2-N}$ より早く 0 に行くことはできない’という事実に注意しましょう。では,減衰正値全域解の存在,非存在を特徴づけることはできるのでしょうか。この問に対する解答が,劣線形(sublinear) $\gamma<1$ の場合に深貝[4, 5]によって与えられました。それは,‘$N\geqq 3$, $0<\gamma<1$, $0<K(x)\leqq K^*(|x|)$, $x\in\mathbb{R}^N$, で $K^*(t)$ が $\int_0^\infty tK^*(t)\,dt<\infty$ を満たすならば,(3)は少くとも一つの減衰正値全域解をもつ’ということを主張します。彼のアイデアは,(5)の減衰正値解 $y(t)$ を積分方程式

$$y(t)=\frac{1}{N-2}\int_0^t\left(\frac{s}{t}\right)^{N-2}sH(s)y^\gamma(s)\,ds+\frac{1}{N-2}\int_t^\infty sH(s)y^\gamma(s)\,ds$$

の解として Schauder-Tychonoff の不動点定理を経由して求め,これを使って球対称な減衰上級,下級関数をこしらえようというものです。深貝はさらに‘強められた条件 $\int^\infty t^{N-1-\gamma(N-2)}K^*(t)\,dt<\infty$ の下では,(3)の減衰正値解は唯一つで,その解は無限遠点の近傍では $|x|^{2-N}$ の定数倍と同じ振舞いをする’という注目すべき結果を証明しています。(関係のある文献[24],[25].)

6. 残されたのは優線形(superlinear) $\gamma>1$ の場合です。この場合に減衰正値全域解の存在を示すのは難かしい問題です。上級-下級関数法は殆んど使い物になりません。深貝-草野

一吉田 [6] によって得られた次の結果があるからです。‘$N \geqq 3$, $\gamma > 1$, $0 < K(x) \leqq K^*(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^N$, $\int^\infty t^{N-1-\gamma(N-2)} K^*(t)\,dt < \infty$ とする。(3) の上級関数 $v(x)$, 下級関数 $w(x)$ で, $v(x) = O(|x|^{2-N})$ as $|x| \to \infty$, $0 < w(x) \leqq v(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$, を満たすものが存在すれば, $v(x) \equiv w(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$, で $v(x) = w(x)$ は (3) の全域解になる。’ それゆえ, 優線形方程式 (3) の減衰正値全域解の存在を確立するためには, より高度な解析的手段を開発する必要があります。この方向の試みとしては草野－Noussair－Swanson [21], Noussair－Swanson [39] などがありますが, 決定的な段階からはまだ程遠いものです。このような状況の中では, 方程式 (3) を特殊化し

$$(6) \qquad \Delta u + K(|x|) u^\gamma = 0 ,$$

考察を球対称な正値全域解に限定することも十分に意味のあることです。この種の研究の例として Ding－Ni [3], 川野－薩摩－四ッ谷 [14], 草野－内藤 [17, 18] を挙げておきます。[3] には, ‘$N \geqq 3$ のとき, $K(t) \equiv K_0 > 0$ (定数) ならば, 方程式 $\Delta u + K(t) u^{(N+2)/(N-2)} = 0$ のすべての正値全域対称解は無限遠点で $c|x|^{2-N}$ と同じ漸近挙動をもつが, $K(t) = K_0 + k(t)$ ($k(t) \geqq 0$ は 0 の近傍で真に正でコンパクトな台をもつ減少関数) ならば, そのすべての正値全域対称解は無限遠点において $c|x|^{\frac{2-N}{2}}$ と同じ漸近挙動をもつ’ という我々の予想をこえた興味深い

事実が述べられています。[18]にはこれと本質的に同じ結果が次の形で与えられています。‘$N \geqq 3$, $\gamma > 1$ とし $K_{N,\gamma}(t) = t^{[N+2-\gamma(N-2)]/2} K(t)$ とおく。$K'_{N,\gamma}(t) \leqq 0$, $\not\equiv 0$, $t > 0$ かつ $\lim_{t\to\infty} K_{N,\gamma}(t) > 0$ ならば，方程式(6)のすべての正値全域対称解は無限遠点において $C|x|^{\frac{2-N}{2}}$ と同じ漸近挙動をもつ。’ こうして見ると，優線形方程式(3)の減衰正値全域解は一筋縄では行かない難物のように思えますが，意外に早くその構造の全容が解明されるかも知れません。我国の若い研究者に期待する所大なるものがあります。

7. 以下断片的に注意を述べて本稿の締めくくりとします。

(a) すべての正値全域解が球対称になるような方程式のクラス $\{\Delta u + f(u) = 0\}$ が存在します。(Gidas-Ni-Nirenberg [10])

(b) 方程式(3)の係数 $K(x)$ ((6)の係数 $K(|x|)$) が不定符号の場合，川野[12]の条件が満たされないときでも(3)(または(6))に一様正な全域解が存在することがあります。これは内藤-宇佐美[31]による結果で，例えば，‘$\gamma > 0$, $\neq 1$ とする。$k(t) = \int_t^\infty K(s)\,ds$, $t \geqq 0$, が存在し，$\int_0^\infty |k(t)|\,dt < \infty$, $\int_0^\infty t[k(t)]^2\,dt < \infty$ ならば，(6)は一様正な全域解を持つ’ ことが証明されます。

(c) 方程式(3)(または(6))と

(3)' $\Delta u + K(x)|u|^\gamma \operatorname{sgn} u = 0$ (または(6)' $\Delta u + K(|x|)|u|^\gamma \operatorname{sgn} u = 0$)

の関係は研究に値します。仮に(3)に正値全域解がないとしても，(3)′には符号を変える全域解があり得る筈で，従って例えば，(3)の正値全域解の非存在と(3)′のすべての全域解の振動が同値であるかという問題が考えられます。あるいはもっと単純に，(3)′のすべての全域解が振動するための条件は何かと問うこともできましょう。この方向の研究はまだ殆んどないようです。Ni-Nussbam [34] は‘$1<\gamma<\frac{N+2}{N-2}$ ならば $\Delta u+|u|^{\gamma}\operatorname{sgn}u=0$ の全域対称解はすべて振動する’ことを証明しています。これを含む結果‘$K'_{N,\gamma}(t)\geqq 0,\ \not\equiv 0,\ t>0$ ならば，(6)′の全域対称解はすべて振動する’が論文[18]の中で得られました。

(d) 最近，内藤[30]によって線形楕円型方程式の全域解に関する興味深い事実が明らかにされました。それを紹介します。‘方程式 $\Delta u+\lambda K(|x|)u=0$ において $N\geqq 3,\ \lambda>0,\ K(t)>0$ かつ $\int_0^\infty t^{N-1}K(t)\,dt<\infty$ とする．このとき，$0<\lambda_0\leqq\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots$ なる列 $\{\lambda_n\}$ が存在し，この方程式の全域対称解はすべて，$\lambda\in(0,\lambda_0)$ ならば一様正，$\lambda\in[\lambda_0,\lambda_1]$ ならば $c|x|^{2-N}$ のように減衰，$\lambda\in(\lambda_n,\lambda_{n+1}]$ $(n=1,2,\cdots)$ ならば丁度 n 個の零点を持つ。’

(e) 高階楕円型方程式 $\Delta^m u=f(x,u)$ の全域解の問題を最初に論じたのは Walter [44, 45] でした([46]も参照)。

Walterによれば，$m \geqq 2$のとき$\Delta^m u = e^u$は，$\mathbb{R}^2$においては全域解を持ちませんが，$\mathbb{R}^N$（$N \geqq 3$）においては全域解を持ちます。方程式$\Delta^m u = K(x) u^\gamma$の正値全域解も当然研究の対象になり得ます。この問題の研究に先鞭をつけたのは草野-内藤-Swanson [19, 20]です。そこでは，$\Delta^m u = K(|x|) u^\gamma$の形の方程式に対していろいろなタイプの漸近挙動をもつ正値全域対称解（減衰するもの，一様正なもの，$c|x|^{2i}$（$i = 1, 2, \cdots, m-1$）と同じ振舞いをするもの）が存在するための条件が得られています。

(f) 上級－下級関数法が有効に適用される方程式の範囲を(3)から(1)または(2)へと実質的に広げる作業も重要です。その成功例として古庄[7, 8]，古庄-草野[9]を挙げておきます。

［参考文献］

[1] K. Akô, On the Dirichlet problem for quasilinear elliptic differential equations of the second order, J. Math. Soc. Japan 13 (1961), 45-62.

[2] K. Akô and T. Kusano, On bounded solutions of second order elliptic differential equations, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I, 11 (1964), 29-37.

[3] W.-Y. Ding and W.-M. Ni, On the elliptic equation $\Delta u + Ku^{(n+2)/(n-2)} = 0$ and related topics, Duke Math. J. 51 (1985), 487-506.

[4] N. Fukagai, On decaying entire solutions of second order sublinear elliptic equations, Hiroshima Math. J. 14 (1984), 551-562.

[5] N. Fukagai, Existence and uniqueness of entire solutions of second order sublinear elliptic equations, Funkcial. Ekvac. 29 (1986), 151-165.

[6] N. Fukagai, T. Kusano and K. Yoshida, Some remards on the supersolution-subsolution method for superlinear elliptic equations, J. Math. Anal. Appl. 123 (1987), 131-141.

[7] Y. Furusho, Positive solutions of linear and quasilinear elliptic equations in unbounded domains, Hiroshima Math. J. 15 (1985), 173-220.

[8] Y. Furusho, Existence of global positive solutions of quasilinear elliptic equations in unbounded domains, Funkcial. Ekvac. (to appear)

[9] Y. Furusho and T. Kusano, On the existence of positive decaying entire solutions for a class of sublinear elliptic equations, Canad. J. Math. 49 (1988) (to appear)

[10] B. Gidas, W.-M. Ni and L. Nirenberg, Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$, Advances in Math. Supplementary Studies 7 A (1984), 369-402.

[11] B. Gidas and J. Spruck, Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations, Comm. Pure Appl. Math. 34 (1981), 525-598.

[12] N. Kawano, On bounded entire solutions of semilinear elliptic equations, Hiroshima Math. J. 14 (1984), 125-158.

[13] N. Kawano, T. Kusano and M. Naito, On the elliptic equation $\Delta u=\phi(x)u^\gamma$ in $\mathbb{R}^2$, Proc. Amer. Math. Soc. 93 (1985), 73-78.

[14] N. Kawano, J. Satsuma and S. Yotsutani, On the positive solutions of an Emden-type elliptic equation, Funkcial. Ekvac. 31 (1988), 121-145.

[15] J. B. Keller, On solutions of $\Delta u=f(u)$, Comm. Pure Appl. Math. 10 (1957), 503-510.

[16] T. Kusano, On bounded solutions of elliptic partial differential equations of the second order, Funkcial. Ekvac. 7 (1965), 1-13.

[17] T. Kusano and M. Naito, Positive entire solutions of superlinear elliptic equations, Hiroshima Math. J. 16 (1986), 361-366.

[18] T. Kusano and M. Naito, Oscillation theory of entire solutions of second order superlinear elliptic equations, Funkcial. Ekvac. 30 (1987), 269-282.

[19] T. Kusano, M. Naito and C. A. Swanson, Radial entire solutions to even order semilinear elliptic equations in the plane, Proc. Royal Soc. Edinburgh 105 A (1987), 275-287.

[20] T. Kusano, M. Naito and C. A. Swanson, Entire solutions of a class of even order quasilinear elliptic equations, Math. Z. 195 (1987), 151-163.

[21] T. Kusano, E. S. Noussair and C. A. Swanson, Existence of decaying entire solutions of a class of semilinear elliptic equations, Proc. Amer. Math. Soc. 104 (1988). (to appear)

[22] T. Kusano and S. Oharu, Bounded entire solutions of second order semilinear elliptic equations with application to a parabolic initial value problem, Indiana Univ. Math. J. 34 (1985), 85-95.

[23] T. Kusano and S. Oharu, On entire solutions of second order semilinear elliptic equations, J. Math. Anal. Appl. 113 (1986), 123-135.

[24] T. Kusano and C. A. Swanson, Entire positive solutions of singular semilinear elliptic equations, Japan. J. Math. 11 (1985), 145-155.

[25] T. Kusano and C. A. Swanson, Decaying entire positive solutions of quasilinear elliptic equations, Monatsh. Math. 101 (1986), 39-51.

[26] T. Kusano and H. Usami, Positive solutions of a class of second order semilienar elliptic equations in the plane, Math. Ann. 268 (1984), 255-264.

[27] C. Miranda, Partial Differential Equations of Elliptic Type, Second Revised Edition, Springer, Berlin·Heidelberg·New York, 1970.

[28] M. Nagumo, On principally linear elliptic differential equations of second order, Osaka Math. J. 6 (1954), 207-229.

[29] M. Naito, A note on bounded positive entire solutions of semilinear elliptic equations, Hiroshima Math. J. 14 (1984), 211-214.

[30] M. Naito, Radial entire solutions of the linear equation $\Delta u + \lambda p(|x|)u = 0$, Hiroshima Math. J. 19 (1989) (to appear)
[31] M. Naito and H. Usami, Bounded positive entire solutions of multi-dimensional Emden-Fowler type equations with oscillating coefficients, in preparation.
[32] W.-M. Ni, On the elliptic equation $\Delta u + K(x)u^{(n+2)/(n-2)} = 0$, its generalizations, and applications in geometry, Indiana Univ. Math. J. 31 (1982), 493-529.
[33] W.-M. Ni, On the elliptic equation $\Delta u + K(x)e^{2u} = 0$ and conformal metrics with prescribed Gaussian curvatures, Invent. Math. 66 (1982), 343-352.
[34] W.-M. Ni and R. D. Nussabaum, Uniqueness and nonuniqueness for positive radial solutions of $\Delta u + f(u, r) = 0$, Comm. Pure Appl. Math. 38 (1985), 67-108.
[35] E. S. Noussair, On the existence of solutions of nonlinear elliptic boundary value problems, J. Differential Equations 34 (1979), 482-495.
[36] E. S. Noussair, On semilinear elliptic boundary problems in unbounded domains, J. Differential Equations 41 (1981), 334-348.
[37] E. S. Noussair and C. A. Swanson, Oscillation theory for semilinear Schrödinger equations and inequalities, Proc. Royal Soc. Edinburgh 75 A (1975/76). 67-81.
[38] E. S. Noussair and C. A. Swanson, Positive solutions of quasilinear elliptic equations in exterior domains, J. Math. Anal. Appl. 75 (1980) 121-133.
[39] E. S. Noussair and C. A. Swanson, Positive $L^q(\mathbb{R}^N)$-solutions of subcritical Emden-Fowler problems, Arch. Rational Mech. Anal. 101 (1988), 85-93.
[40] R. Osserman, On the inequality $\Delta u \geqq f(u)$, Pacific J. Math. 7 (1957), 1641-1647.
[41] C. A. Swanson, Positive solutions of $-\Delta u = f(x, u)$, Nonlinear Analysis, 9 (1985), 1319-1323.
[42] H. Usami, On bounded positive entire solutions of semilinear elliptic equations, Funkcial. Ekvac. 29 (1986), 189-195.
[43] W. Walter, Über ganze Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u = f(u)$, Jber. Deutsch. Math. Verein. 57 (1955), 94-102.
[44] W. Walter, Ganze Lösungen der Differentialgleichung $\Delta^p u = f(u)$, Math. Z. 67 (1957), 32-37.
[45] W. Walter, Zur Existenz ganzer Lösungen der Differenzialgleichung $\Delta^p u = e^u$, Arch. Math. 9 (1958), 308-312.
[46] W. Walter and H. Rhee, Proc. Royal Soc. Edinburgh 82 A (1979), 189-192.
[47] H. Wittich, Ganzer Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$, Math. Z. 49 (1943/44), 579-582.