数理解析研究所講究録
第 679 巻 1989 年 202-209

Local Profile of mild solutions in 2D symmetric domains

東京工芸大　中根静男（Shizuo Nakane）

この講演は都立大の鈴木貴氏との共同研究に基づいている。

§1 序

Ω を $\mathbb{R}^N$ の有界領域で境界 $\partial\Omega$ は滑らかとし，次の境界値問題を考える：

$$(1)\quad \begin{cases} -\Delta u = f(u), & u>0 \quad \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

但し，$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は C^1 とする。我々が興味があるのは，特に，Ω が超平面 $T=\{x\cdot\gamma=0\}$ に関して対称な場合である。この場合には Gidas-Ni-Nirenberg による有名な結果が知られている。それは次の問に対する回答である：

(Q1)　(1) の解は T に関して対称か？

また、$T(\delta) = \{ x \in \mathbb{R}^N ;\ x \cdot \gamma = \delta \}$

$\delta^* = \sup \{ \delta ;\ T(\delta) \cap \Omega \neq \phi \}$ とおく。

定義 Ωが次を満たすとき、Tに関して GNN symm. という。

(i) Ω は Tに関して対称

(ii) $0 < {}^\forall \delta < \delta^*$ に対し、$\{ x \in \Omega ;\ x \cdot \gamma > \delta \}$ のTに関する鏡映はΩに含まれる。

(iii) ${}^\forall \delta < \delta^*$ に対し、$T(\delta)$ は$\partial\Omega$と直交しない。

このとき次が得られる。

定理 C (Gidas-Ni-Nirenberg [2])

ΩがGNN symm. ならば(1)の解はすべてTに関して対称。しかも、${}^\forall x \in \Omega$, $\gamma \cdot \nabla u < 0$。

例 $g(\zeta) = g_R(\zeta) = \dfrac{1-R^2}{2}\left(\dfrac{1}{\zeta - R} + \dfrac{1}{\zeta + R}\right)$, $R > 1$.

$\mathbb{C}_z \supset \Omega = \Omega_R = g(D)$, $D = \{ |\zeta| < 1 \}$

$z = x_1 + i x_2$ により、$\mathbb{R}^2$と$\mathbb{C}$を同一視すると、Ωはx_1-及びx_2-軸に関して対称。次が成り立つ。

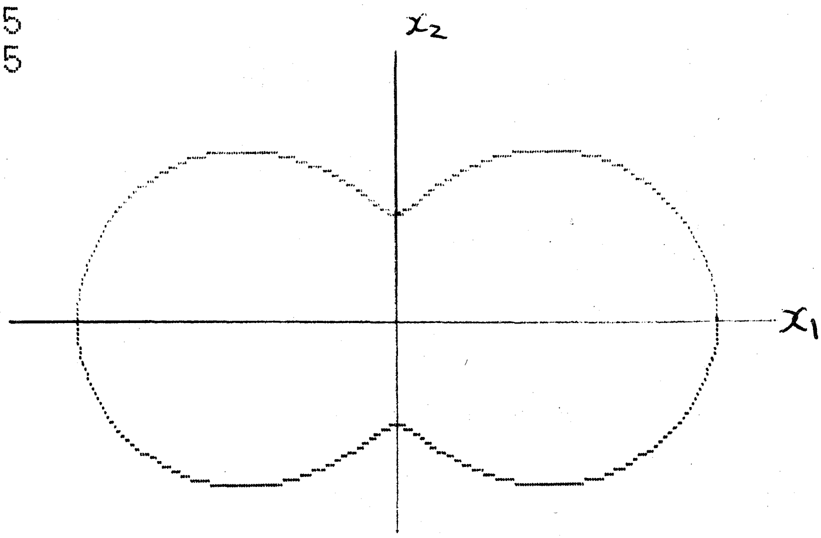
${}^\forall R > 1$ に対し、Ωはx_1-軸に関して GNN symm.

Ωがx_2軸に関して GNN symm. $\Longleftrightarrow$ $R > 1 + \sqrt{2}$

実際、$R < \sqrt{3}$ のとき、$f(u) = \lambda e^u$ $\lambda \ll 1$ に対し、Weston-Moseley 理論により、非対称な large solution の存在が示さ

れる。$r=R^2=2$のときのΩを図示すると下のようになる。

r= 2
xs= -1.5
xe= 1.5
ys= -1.5
ye= 1.5



しかし，GNN symm. でなくても（Q1）が肯定的に答えられるような対称領域は色々存在する：

例1. $f(u)$: $\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ ：単調非増加 とすると，(1)の解は unique。故に解はTに関し対称。

例2. $-\Delta u=\lambda f(u)$. $f(0)>0$, $f'(0)>0$, $f''(t)>0$ $(t>0)$ のとき，$\bar{\lambda}>0$が存在し，$0<{}^{\forall}\lambda<\bar{\lambda}$ に対し，unique に minimal solution が存在する。この minimal solution も対称になる。（Crandall-Rabinowitz [1] 参照.）

我々の主な関心は次の問題である．

(Q2) (1)の対称解はTのΩ上で最大値をとるか？更に，どの曲線に沿ってその解は減少するか？

定理0は Ω がGNN symm. のとき、(Q2)に対し肯定的な回答を与えている。我々は $\mathbb{R}^2$ 内の non GNN symm. な領域 Ω を考える。

<u>定義.</u> (1)の解 u が次を満たすとき mild という。

(2) $\quad \lambda_2(u) > 0$

但し、$-\infty < \lambda_1(u) < \lambda_2(u) < \cdots$ は $-\Delta - f'(u)$ の $L^2(\Omega)$ での固有値を表わす。

先の例1, 2の対称解はすべて mild であることが示される。

<u>§2.</u> 主定理

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を有界単連結領域

$f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$

$T = x_1$ 軸

とする。Riemannの写像定理により、等角写像 $g : D = \{|\zeta| < 1\} \longrightarrow \Omega$ で $g(\bar{\zeta}) = \overline{g(\zeta)}$ を満たすものが存在する。ここで $\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{C}$ と同一視している。今、この g に対し、

(3) $\quad h_+(\zeta) = (1+\zeta^2)\dfrac{g''(\zeta)}{g'(\zeta)} + 2\zeta$

とおき、次を仮定する。

$$(\mathrm{H}) \qquad \mathrm{Im}\,\zeta > 0 \implies \mathrm{Im}\,h_+(\zeta) > 0$$

この仮定はΩの幾何学的性質を規定するものである。このとき、次の主定理を得る。

定理1　(H) を仮定すると、(1) の mild な対称解 u は $T \cap \Omega$ 上で最大値をとる。更に、$\zeta(t)$ を $g^{-1}(T)$ から出る、ベクトル場 $v(\zeta) = \sqrt{-1}\,(1+\zeta^2)$ の積分曲線、$z(t) = g(\zeta(t))$ とおくと、u は曲線 $z(t)$ に沿って減少する。

注意　実は、Ωに対し Riemann 写像 g は unique ではない。そして、(H) も g のとり方に依存する。実際、g のかわりに、$g_a(\zeta) = g \circ \varphi_a(\zeta)$，$\varphi_a(\zeta) = \dfrac{\zeta + a}{1 + a\zeta}$ $(-1 < {}^\forall a < 1)$ をとることもできる。このとき、(H) は、次のように書ける：

$$(\mathrm{H}.a) \qquad \mathrm{Im}\,\zeta > 0 \implies \mathrm{Im}\,h_a(\zeta) > 0$$

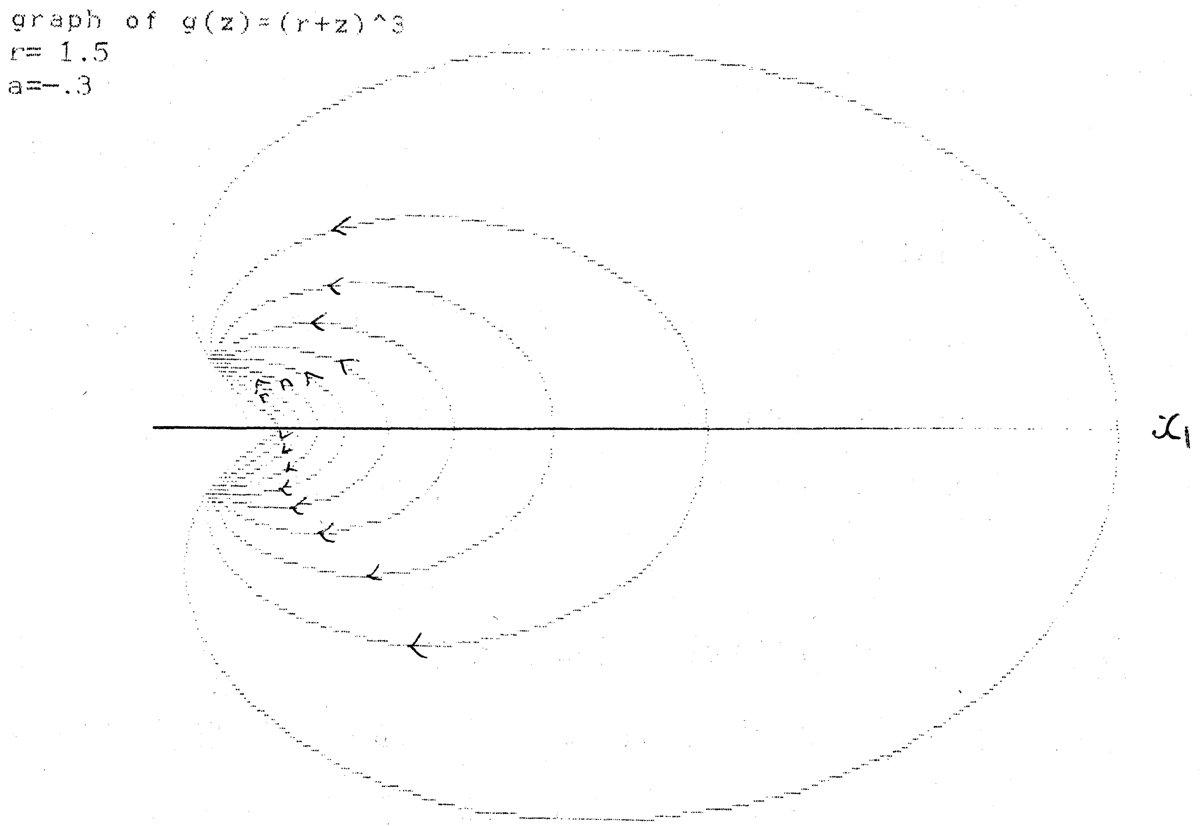
但し、$h_a(\zeta) \equiv \left(1 - \dfrac{4a}{a^2+1}\zeta + \zeta^2\right)\dfrac{g''(\zeta)}{g'(\zeta)} + 2\zeta$. $\quad (g = g_0)$

例　$g(\zeta) = (R + \zeta)^k$ $\quad (R > 1)$ とする。次が言える：

$$g : \text{univalent} \iff R > \frac{1}{\sin\frac{\pi}{k+1}}.$$

Ω : convex $\Longleftrightarrow$ $R \geqq k+1$. $\Longleftrightarrow$ Ω. GNN symm.

しかし，$\forall R>1$ に対し，a を -1 に十分近くとれば，(H,a) が成り立つ．Ω 及び，$z(t)$ を図示すると次のようになる．



矢印のついた曲線にそってuは減少する．

<u>定理1の証明の方針</u>

$\varphi_z(\zeta) \equiv \dfrac{\zeta+z}{1+\bar{z}\zeta}$ ， $g_z \equiv g\circ\varphi_z : D \longrightarrow \Omega$

とおく．(1)の解 u に対し，$v_z(\zeta) \equiv u\circ g_z(\zeta)$ は，次の境界値問題の解になる：

$$\begin{cases} -\Delta v_z = \rho_z^2(\zeta) f(v_z) & \text{in } D \\ v_z = 0 & \text{on } \partial D \end{cases}$$

但し，$\rho_z(\zeta) \equiv |g_z'(\zeta)|$。さて $\omega = \sqrt{-1}$，$W = \frac{\partial}{\partial r} v_{r\omega}|_{r=0}$ とおくと，W は次を満たす。

$$\begin{cases} (-\Delta - \rho_0^2 f'(v_0)) W = -\operatorname{Im} h(\zeta) \cdot \rho_0^2 f(v_0) < 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{in } D_+ = \{\operatorname{Im}\zeta > 0\} \\ W|_{\partial D_+} = 0 \end{cases}$$

u の mildness より，$-\Delta - \rho_0^2 f'(v_0)$ は D_+ で positive。
故に，maximum principle より，$W < 0$ in D_+。

$\therefore \frac{d}{dt} u(z(t)) < 0$。これより定理が従う。

§3 mild な対称解の level set

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ は更に x_1-及び x_2-軸に関し対称とする。すると，Riemann 写像 $g : D \longrightarrow \Omega$ として，

$$g(-\zeta) = -g(\zeta), \quad g(\bar{\zeta}) = \overline{g(\zeta)}$$

を満たすものがとれる。$h_\pm(\zeta) \equiv (\zeta^2 \pm 1)\frac{g''(\zeta)}{g'(\zeta)} + 2\zeta$ として，次を仮定する；

$$(H') \quad \begin{cases} \operatorname{Im}\zeta > 0 \Rightarrow \operatorname{Im} h_+(\zeta) > 0 \\ \operatorname{Re}\zeta > 0 \Rightarrow \operatorname{Re} h_-(\zeta) > 0 \end{cases}$$

このとき、次の定理を得る。

<u>定理2</u> Ω は原点に関して starshaped とする。このとき、(H') の下で、(1) の mild な対称解 u に対し、その level set $\Omega_c = \{x \in \Omega : u(x) > c\}$ は原点に関して star shaped。

詳細は Chen - Nakane - Suzuki [3] を参照されたい。

文献

[1] Crandall, M.G - Rabinowitz, P : Some continuation and variational methods for positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems, Arch. Rat. Mech. Anal., 58 (1975). 207-218.

[2] Gidas, B., Ni, W.-M., Nirenberg, L. ; Symmetry and related properties via the maximum principle, Comm. Math. Phys., 68 (1979) 209-403.

[3] Chen, Y.-G., Nakane, S., Suzuki, T. : Elliptic equations on 2D symmetric domains : Local profile of mild solutions. preprint.

および、[3] の References を参照されたい