数理解析研究所講究録
第 679 巻 1989 年 232-239

On the projectively minimal hypersurfaces

熊本大理 佐々木武 (T. Sasaki)

1. 射影極小曲面とは

$\mathbb{R}^3$ 内の曲面 S が極小とはよく知られているように, S についての汎函数

$$\int_S dA$$

が S で critical, ということだった。面積要素 dA の定義から当然のことであるが, この積分は euclid 運動によって変らない。では, $\mathbb{R}^3$ のかわりに射影空間 $\mathbb{P}^3$, euclid 運動群のかわりに射影変換群を考えるとき, 事柄はどうなるであろうか。ここで注意すべきことが, 群の次元が大変大きくなることである。ところが, この群についても, 不変な2次微分形式 ＝ 射影面積要素 dP がつくれることが 昔から知られていた。([Bla]) だから汎函数

$$\int_S dp$$

を考えることが可能となり，euclid の場合と同様に critical な曲面として射影極小曲面を定義することができる。これは一体どういうものかというのが，実は射影微分幾何とよばれる分野のテーマの1つであった。([Tho], [Bol])

ここでは，射影極小曲面を定める微分方程式をこれまでとは少し違った形で求め，いくつかの例を与えること，大域的な結果として楕円面の特徴付けを与えることにする。

2. 射影面積要素の定義

一般に P^{n+1} 内の超曲面 M^n を考えよう。M はその上の点の運動の結果として得られると考えると都合がよい。局所的には $R^{n+2}-\{0\}\ (\longrightarrow P^{n+1})$ に lift して考える。$e_0 : M^n \longrightarrow R^{n+2}$ をうめ込みとしよう。各点 $e_0(p)$ での接ベクトルを $e_1(p), \cdots, e_n(p)$ とする。$e_{n+1}(p)$ を $e_0, e_1, \cdots, e_n$ とは独立なベクトルとする。これらの組 $e = {}^t(e_0, e_1, \cdots, e_n, e_{n+1})$ を点 p での射影枠 (proj. frame) という。e_0 のとり方が scalar

函数倍を除いてしか定まらないように e の取り方は不定であるが，その不定性は群

$$\left\{ g = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & n & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ e & a & 0 \\ \mu & c & \nu \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \}\,1 \\ \}\,n \\ \}\,1 \end{array} \qquad \det g = 1 \right\}$$

にはいることはみやすい。すなわち別の frame は ge として得られる。以下 g によらない量を定義することが目的である。

$e = (e_\alpha)$ は次の運動方程式をみたす。

$$de_\alpha = \omega_\alpha{}^\beta e_\beta 。$$

（慣用によって上下対になった indices については総和をとるものとする。index の範囲は $0 \leq \alpha, \beta \cdots \leq n+1$, $1 \leq i, j, \cdots \leq n$ と区別する） $\omega = (\omega_\alpha{}^\beta)$ は $sl(n+2)$ に値をとる1次微分式で Maurer-Cartan form とよばれる。それは完全積分条件

$$d\omega = \omega \wedge \omega$$

をみたす。frame (e_α) を別の frame $(\tilde{e}_\alpha)$ にとりかえると

$$(\tilde{e}_\alpha) = g(e_\alpha), \quad d\tilde{e} = \tilde{\omega}\tilde{e}$$

$$\tilde{\omega} = dg \cdot g^{-1} + g\omega g^{-1}$$

と変化する。ここで，

$$\omega_0^{n+1} = 0 \quad 及び$$
$$\{\omega_0^1, \dots, \omega_0^n\} \quad は\ 1次独立$$

に注意しよう。最初の式より

$$0 = d\omega_0^{n+1} = \omega_0^i \wedge \omega_i^{n+1}$$

である。便宜的に $\omega^i = \omega_0^i$ とかくとそれらの1次独立性により

$$\omega_i^{n+1} = h_{ij}\omega^j, \quad h_{ij} = h_{ji}$$

とかけ，さらに"テンソル" h_{ij} の共変微分と

$$h_{ijk}\omega^k = dh_{ij} - h_{ik}\omega_j^k - h_{kj}\omega_i^k + (n+2)(\omega_0^0 + \omega_{n+1}^{n+1})h_{ij}$$

によって定める。（h_{ijk} は対称） そして

$$F = \|h_{ijk}\| = (h_{ijk}h_{pqr}h^{ip}h^{jq}h^{kr})^{1/2}$$

とおく。ただし $(h^{ij}) = (h_{ij})^{-1}$。すると

(1). 2次形式 $h_{ij}\omega^i\omega^j$ 及び 3次形式 $h_{ijk}\omega^i\omega^j\omega^k$ は scalar倍を除いて e のとり方によらない。

ことがわかり，"$h_{ij}\omega^i\omega^j$ が退化しない"という性質は射影的性質である。以下これを仮定しよう。（これは曲面の通常の意味での第2基本形式が退化しないことに同等） このとき

(2). $F^2 h_{ij}\omega^i\omega^j$ は曲面上の不変2次形式である。

ことが示される。従って

$$dp = F^n (\det h_{ij})^{1/2} \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^n$$

は e のとり方によらない体積要素となる。これから射影極小性が定義されるのは 直 の通り。ただし，一般には $F \neq 0$ とは限らず，$F = 0$ となるところで，dp は退化してしまう。恒等的に $F = 0$ となるのは曲面が２次曲面になるときであることを注意しておこう。

B. 微分方程式

次に M_t を（局所的）曲面 M の変形としよう。t はパラメーター。$M_0 = M$。方程式

$$\frac{d}{dt} \int_{M_t} dp \,\Big|_{t=0} = 0$$

を M の幾何的な量を使ってかきなおしたい。その為，（かつ便宜的に）$\omega_0^\alpha = 0$ となる frame をとることにし（いつも可能）

$$h_{ij}\, \omega^j_{n+1} =: l_{ij}\, \omega^j$$

とおく。l_{ij} は対称であり "affine 平均曲率" とよばれている。長い計算の結果わかることは，

(3). $n=2$ のとき，M が射影極小とは微分方程式

(#) $$\Delta l = \| l_{ij} - l h_{ij} \|^2$$

が成りたつことである。ただし $l = \frac{1}{2}\mathrm{trace}_h l_{ij}$，
Δ は $h_{ij}\omega^i\omega^j$ についてのラプラシアンである。

$n \geqq 3$ では方程式の形はもっと複雑になる。その性質を述べるため，$(h_{ij})>0$，i.e. M が局所的に強い意味で凸，とし affine 座標 $(x^1, \cdots, x^{n+1})$ によって $\{x^{n+1} = f(x^1, \cdots, x^n)\}$ とかかれているとする。このとき

$$h_{ij} = \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \qquad (\lambda \text{ は scalar})$$

であり，l_{ij} は f の4次までの微分を使って表わせる。従って方程式(#)は f について6階の楕円型非線型方程式となる。主要部は triply harmonic である。$n \geqq 3$ では6階楕円性は変らないが，主要部は少し複雑になる。

4. 射影極小超曲面の例

(#)式の右辺に現れる作用素 $l_{ij} - l h_{ij}$ には幾

何的な意味が知られている。すなわち 方程式

$$l_{ij} = l\, h_{ij}$$

をみたす曲面は affine 球面とよばれる曲面に等しい。euclid の場合に，l_{ij} を shape operator，h_{ij} を metric tensor と思うと上式は euclid 球面を定めていることからきている。一方，affine 球面についてはよく知られている（[Ca1]，[Pog]，[Sas]）。そのことから

（4）．$n=2$ なら affine 球面は射影極小である。

及び

（5）．$\mathbb{P}^3$ 内の射影極小な強い意味で凸な閉曲面は楕円面に限る。

が示される。$n \geqq 3$ では方程式の性質が少し変ると述べたように，affine 球面だからといって射影極小とは限らない。「affine 球面かつ affine 変換群について等質であり，計量 $h_{ij}\omega^i\omega^j$ が einstein であれば射影極小である」ことが証明できる。この典型例が $\{x^1 \cdots x^{n+1} = 1\}$ で与えられる曲面である。

次の問題をあげておきたい。

問．$n \geq 3$ のとき (5) を示せ。

この問には affine 版がある。[Ca2] を参照して頂きたい。幾何にあらわれる非線形の面白い問題と思う。

そのほかの（余り多くはない）例，及び省略した計算については [Sas2] をごらん頂きたい。

[Bla] W. Blaschke, Vorlesungen uber Differentialgeometrie II, Springer 1923

[Bol] G.Bol, Projektive Differentialgeometrie 1-3, Vandenhoeck & Ruprecht 1950-1967.

[Cal1] E. Calabi, Complete affine hyperspheres, Symp.Math.10(1972),19-38.

[Cal2] E. Calabi, Hypersurfaces with maximal affinely invariant area, Amer. J.Math. 104(1982), 91-126.

[Pog] A.V. Pogorelov, On the improper convex affine hyperspheres, Geom. Ded. 1(1972), 33-46.

[Sas1] T. Sasaki, Hyperbolic affine hyperspheres, Nagoya Math.J. 77(1980), 107-123.

[Sas2] T. Sasaki, On a projectively minimal hypersurface in the unimodular affine space, Geom. Ded. 23(1987), 237-251.

[Tho] G. Thomsen, Sulle superficie minime proiettive, Ann. di Math. (IV) 5 (1928), 169-184.