数理解析研究所講究録
第680巻 1989年 19-28

多期間ポートフォリオ選択問題における分離定理

野村証券㈱　南村 芳寛 (Yoshihiro Namura)
京都大学 工学部　大西 匡光 (Masamitsu Ohnishi)
京都大学 工学部　茨木 俊秀 (Toshihide Ibaraki)

§1. はじめに

意思決定者が長期間にわたって(動的に)彼の保有する富を如何なる資産にいかに配分し投資すれば良いかを議論する動的ポートフォリオ選択問題は多くの研究者により研究されてきている. しかしそれらの研究の多くは意思決定者の効用関数の型を限定したものや解の存在性を議論したものである.

本報告では, 収益率が多変量対称安定分布に従う複数個の危険資産と1個の安全資産があり, 危険回避的な意思決定者が(離散的な)計画期間の終了時点での最終富の期待効用を最大化すべく各期間でポートフォリオ選択を行う多期間ポートフォリオ選択問題を一般的な効用関数のもとで議論する. 目標は(Tobin [3] の研究に始まり,)様々な1期間ポートフォリオ選択問題に対して示されている《分離定理》を本多期間問題に拡張すること, すなわち, 各期間での最適ポートフォリオにおける各危険資産への投資額間の相対的比率が効用関数, 期間およびそのときに保有する富に依存しないという事実を示すことである. これにより解くべき問題は1個にまとめられた危険資産と安全資産との2資産の多期間ポートフォリオ選択問題に帰着できることになる.

§2. 問題の記述と仮定

意思決定者が期間$n=0,1,\cdots,N-1$の期首において複数個の資産への投資額を逐次決定する多期間ポートフォリオ選択問題を考える. 対象となる資産としては各期間での収益率が確率的に定まるM個の危険資産と確実な収益率を持つ1個の安全資産(確実資産とも言う)が存在するものとする. 第n期間の期首における第i危険資産($i=1,2,\cdots,M$)の価格を確率変数 $P_i(n)$で表し, 次の形で定まるものと仮定する:

$P_i(0)$: 初期の期間0の期首における第i危険資産の価格,

$$P_i(n)=P_i(n-1)X_i(n-1)=P_i(0)\prod_{k=0}^{n-1}X_i(k) \quad \text{for } n=1,2,\cdots,N. \tag{2.1}$$

このとき $X_i(n)$は

1+[第n期間における第i危険資産の収益率]

を表す確率変数である．以後では

$$X_+(n):=(X_1(n),X_2(n),\cdots,X_M(n))^T \quad \text{for } n=0,1,\cdots,N-1 \tag{2.2}$$

なる表記を用いる．本報告ではN個のM次元確率ベクトル

$(X_+(n);n=0,1,\cdots,N-1)$

は互いに独立で，特性指数α（$\in(1,2]$）を持つ同一のM変量対称安定分布に従うと仮定し，その特性関数を

$\psi_{X_+}(t_+)$ for $t_+\in R^M$,

そしてその自然対数を

$$\ln\ \psi_{X_+}(t_+)=i\delta(t_+)-\gamma(t_+) \quad \text{for } t_+\in R^M \tag{2.3}$$

で表す，ここで　$i(:=\sqrt{-1})$は虚数単位である．$\delta(t_+)$は斉次な関数であり，各危険資産iに関する平均$\mu_i:=E[X_i(n)]$（nに関して一定）を成分とするベクトルを

$$\mu_+:=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_M)^T \tag{2.4}$$

で表すと

$$\delta(t_+)=\mu_+{}^T t_+ \quad \text{for } t_+\in R^M \tag{2.5}$$

となる．また$\gamma(t_+)$は半正定値かつα次の正斉次な関数である．さらに

$$f(t_+):=\gamma(t_+)^{(1/\alpha)} \quad \text{for } t_+\in R^M \tag{2.6}$$

と定義すると，$f(t_+)$は半正定値でかつ正斉次な関数である．（多変量安定分布の基本的性質については付録1を参照されたい．）本報告の後半の部分では$f(t_+)$は凸関数であることも仮定する．

また

$\mu_0(n):=1+$［第n期間における安全資産の収益率］

は1より大きい（nに関する）定数であると仮定し，それをμ_0とおく．

意思決定者が第n期間（$n=0,1,\cdots,N-1$）の期首において富を$W(n)$単位保有していると想定しよう．このとき彼は第n期間における安全資産への投資額$y_0(n)$と各危険資産iへの投資額$y_i(n)$（$i=1,2,\cdots,M$）を決定する問題に直面することになる．ここで危険資産への投資額からなるM次元ベクトルを

$$y_+(n):=(y_1(n),y_2(n),\cdots,y_M(n))^T \quad \text{for } n=0,1,\cdots,N-1 \tag{2.7}$$

で表す．$W(n)=w$のときの各資産への投資額に関する制約を次のように設ける．

$$y_0(n)+1_+{}^T y_+(n)=w \tag{2.8}$$

$$y_+(n)\in L \tag{2.9}$$

ここで1_+はすべての成分が1のM次元列ベクトル，LはR^Mの空でない閉凸錐である．式(2.8)は意思決定者がその時に保有する富のすべてをいずれかの資産へ投資しなければならないことを意味している．また式(2.9)は危険資産への投資額に関する

制約であり，例えば 非負制約などを含めることができる．これらの制約に安全資産への投資額$y_0(n)$に関する非負制約が含まれていないのは安全資産に対しては貸付けのみではなく借入れも許されていることを意味する．

以上から予算方程式は

$$W(n+1)=y_0(n)\mu_0+y_+(n)^T X_+(n) \quad \text{for } n=0,1,\cdots,N-1 \tag{2.10}$$

と表される．以下では

$$X(n)^T:=(\mu_0, X_+(n)^T) \tag{2.11}$$

$$y(n)^T:=(y_0(n), y_+(n)^T) \tag{2.12}$$

と表し，$y(n)$（あるいは１次元確率変数$y(n)^T X(n)$）をポートフォリオと呼ぶ．さらに$W(n)=w$における許容なポートフォリオ$y(n)$の集合を

$$K(w):=\{y(n):\ y_0(n)+1_+^T y_+(n)=w,\ y_+(n)\in L\} \tag{2.13}$$

で表すことにする．

意思決定者の問題は期待効用

$$E_\pi[v(W(N))\mid W(0)=w] \tag{2.14}$$

を最大化するポートフォリオ選択政策πを求めることである．ここで $v(\cdot)$ $(:R\to R)$は計画期間終了時点Nでの最終富$W(N)$に対する意思決定者の効用を表す遺産関数と呼ばれる関数であり，

$$E_\pi[\cdot]$$

は政策πのもとでの確率法則に関する期待値を表す．

§３．最適ポートフォリオ選択政策の存在

３．１．派生効用関数と最適性方程式

第ｎ期間の期首において$W(n)=w$（$\in R$）であるときに得られる期待効用の上限値を$v(w;n)$で表す，すなわち，

$$v(w;N):=v(w), \tag{3.1}$$

$$v(w;n):=\sup_\pi E_\pi[v(W(N))\mid W(n)=w] \quad \text{for } n=N-1,n-2,\cdots,1,0, \tag{3.2}$$

ただし supは許容なポートフォリオ選択政策のすべてからなる集合上でとられる．$v(\cdot;n)$（$n=N-1,N-2,,1,0$）は派生効用関数（あるいは誘導効用関数）と呼ばれ，次の最適性方程式を満足する：

$$v(w;N)=v(w), \tag{3.3}$$

$$v(w;n)=\sup_{y(n)\in K(w)} E[v(y_0(n)\mu_0+y_+(n)^T X_+(n);n+1)] \quad \text{for } n=N-1,n-2,\cdots,1,0. \tag{3.4}$$

式(3.4)の右辺のsupを達成する$y(n)^*$が存在すれば，それは第ｎ期間の期首におい

てW(n)=wであるときの最適なポートフォリオを与える.

以下では混乱のない限り，y(n)，X(n)などにに添えられた添え字(n)を省略する従って上記の最適方程式(3.3)および(3.4)は次のように書く.

$$v(w;N) = v(w) \tag{3.3'}$$

$$v(w;n) = \sup_{y\in K(w)} E[v(y_0\mu_0+y_+^T X_+;n+1)] \quad \text{for } n=N-1,n-2,\cdots,1,0. \tag{3.4'}$$

３．２．派生効用関数の性質と最適ポートフォリオ選択政策の存在

以下の議論では遺産関数v(·)（:R→R）に対して次の５つの性質を仮定する：

(A1)　凹，

(A2)　狭義単調増加，

(A3)　微分可能，

(A4)

$$\lim_{w\to+\infty} \frac{d}{dw} v(w) = 0, \tag{3.5}$$

(A5)　ある a（＞0），b（∈[0,+∞)），c（＜α）に対し

$$|v(w)| \leqq a+b|w|^c \quad \text{for all } w\in R. \tag{3.6}$$

(A1)および(A2)の性質は我々が危険回避型の意思決定者を想定していることを意味する．本節の残りの部分では派生効用関数v(·;n)（n=N-1,N-2,…,1,0）が，遺産関数v(·)と同様に，(A1)～(A5)の性質を持つことを示す．

[補題 3.1]

確率変数Xが特性指数α（∈(1,2]）および有限の平均とα-dispersionを持つ1変量対称安定分布に従うとする．このとき　ある a（＞0），b（∈[0,+∞)），c（＜α）が存在して，関数u(·)（:R→R）が

$$|u(w)| \leqq a+b|w|^c \quad \text{for all } w\in R$$

を満たすならば

$$|E[u(X)]| < +\infty. \ \blacksquare \tag{3.7}$$

[定理 3.1]

n=N,N-1,…,1,0.に対して

(1)　v(w;n)はwの凹関数，

(2)　v(w;n)はwの単調非減少関数

(3)　ある a(n)（＞0），b(n)（∈[0,+∞)），c(n)（＜α）が存在して

$$|v(w;n)| \leqq a(n)+b(n)|w|^{c(n)} \quad \text{for all } w\in R. \ \blacksquare \tag{3.8}$$

[補題 3.2]

確率変数Xが特性指数α（$\in(1,2]$）および有限の平均とα-dispersionを持つ1変量対称安定分布に従うとする．このとき　ある a（>0），b（$\in[0,+\infty)$），c（$<\alpha$）に対し微分可能な単調非減少，凹関数$u(\cdot)$（$:R\to R$）が

$$|u(w)| \leqq a+b|w|^{c} \quad \text{for all } w\in R$$

を満たすならば，任意の正数eに対し

$$\left|\frac{d}{dz} E[u(ez+X)]\right| < +\infty \quad \text{for all } z\in R \tag{3.9}$$

となり，さらに

$$\frac{d}{dz} E[u(ez+X)] = E\left[\frac{d}{dz} u(ez+X)\right] \quad \text{for all } z\in R \tag{3.10}$$

が成立する．■

[補題 3.3]

関数$u(\cdot)$（$:R\to R$）が性質(A1)～(A5)を満たすならば，任意のw（$\in R$）に対し

$$\sup_{y\in K(w)} E[u(y_0\mu_0+y_+^{T}X_+)] \tag{3.11}$$

のsupを達成するy（$\in K(w)$）が存在する．■

[定理3.2]

n=N,N-1,…,1,0に対して

(1)　$v(w;n)$はwの微分可能な関数，

(2)

$$\lim_{w\to+\infty} \frac{d}{dw} v(w;n) = 0, \tag{3.12}$$

(3)　任意のw（$\in R$）に対して最適性方程式(3.4)'の右辺のsupを達成する y（$\in K(w)$）が存在する．■

定理3.2より最適性方程式(3.4)'の右辺のsupはmaxで置き換えることができる，すなわち，

$$v(w;N) = v(w) \tag{3.3''}$$

$$v(w;n) = \max_{y\in K(w)} E[v(y_0\mu_0+y_+^{T}X_+;n+1)] \quad \text{for } n=N-1,n-2,\cdots,1,0 \tag{3.4''}$$

[定理 3.3]

$v(w;n)$（n=N,N-1,…,1,0）はwの狭義単調増加関数．■

以上の定理により派生効用関数$v(\cdot;n)$ ($n=N-1,\cdots,1,0$) が遺産関数$v(\cdot)$と同様の性質(A1)～(A5)を持つことを示すことができた.

§4. 分離定理

Ziemba [4,5]は１変量対称安定分布に従う確率変数間の（２次の）確率的優越性に関する次のような結果を導いた.

[定理 4.1]

$F_1(\cdot)$, $F_2(\cdot)$をそれぞれ１変量対称安定分布$P(\mu_1,s_1,0,\alpha)$, $P(\mu_2,s_2,0,\alpha)$の累積分布関数とする. ただし$|\mu_i|<+\infty$, $0<s_i<+\infty$ ($i=1,2$), $1<\alpha\leqq 2$で

$$\mu_1 \geqq \mu_2 \tag{4.1}$$

かつあるx ($\in R$) に対し

$$F_1(x) > F_2(x) \tag{4.2}$$

であるとする. このとき次式の両辺の期待値が存在するような任意の単調非減少, 凹関数$u(\cdot)$ ($:R\rightarrow R$) に対し

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(w)dF_1(w) \geqq \int_{-\infty}^{+\infty} u(w)dF_2(w) \tag{4.3}$$

となるための必要十分条件は

$$s_1^{(1/\alpha)} \leqq s_2^{(1/\alpha)}. \ \blacksquare \tag{4.4}$$

前節の結果により派生効用関数 $v(\cdot;n)$ ($n=N-1,\cdots,1,0$) は単調非減少, 凹関数となるから, 考慮の対象とするポートフォリオとしては他のポートフォリオに（２次の意味で）確率的に優越されないものだけに限定すれば良い. さらに任意のポートフォリオ y^TXは１変量対称安定分布に従うので, 定理 4.1によれば, そのようなポートフォリオは平均が等しいものの内では α-dispersionの最も小さいもの, 逆にα-dispersionの等しいものの内では最も平均の大きいものとなり, 有効ポートフォリオと呼ばれる. また各ポートフォリオの平均と α-dispersion を２次元の平面（平均・ α-dispersion平面）上に打点したとき有効ポートフォリオに対応する点の全体が構成する図形（一般には曲線）を有効フロンティアと呼ぶ.

ポートフォリオのy^TX の平均は

$$y_0\mu_0+y_+^T\mu_+, \tag{4.5}$$

α-dispersion は

$$f(y_+)$$

となるから, 平均βを持つ有効ポートフォリオは数理計画問題:

$$\min \quad f(y_+) \tag{4.6}$$

$$\text{s.t.} \quad y_0 + 1_+^T y_+ = w$$

$$y_+ \in L \tag{4.7}$$

$$y_0 \mu_0 + y_+^T \mu_+ \geqq \beta$$

を解くことで得られる.

以下の議論のためさらに次の仮定を設ける:

(A.6) $f(y_+)$はy_+の凸関数.

[定理 4.2]

単調非減少，凹関数$u(\cdot)$ ($:R \rightarrow R$) と$w \in R$に依存した数理計画問題:

$$\min \quad E[u(y_0 \mu_0 + y_+^T X_+)] \tag{4.8}$$

$$\text{s.t.} \quad y_0 + 1_+^T y_+ = w \tag{4.9}$$

$$y_+ \in L \tag{4.10}$$

が最適解$y^{*T} = (y_0, y_+^{*T})$ ($y_+^* \neq 0$) をもつならば危険資産への投資額y_i^* ($i=1,2,\cdots,M$) 間の相対的比率は関数$u(\cdot)$とwに依存しない. ■

[定理 4.3] 《分離定理》

最適性方程式(3.14)の右辺のmaxを達成する最適なポートフォリオにおいて危険資産への投資額間の相対的比率は，遺産関数$v(\cdot)$，期間n，およびその時に保有する富wに依存しない. ■

§5. 2資産ポートフォリオ選択問題への帰着

前節で得た分離定理より，我々の多期間ポートフォリオ選択問題に対する最適政策は以下のように2段階の最適化の手続きを踏むことで原理上解くことができる.

第1段階: 何らかの有効ポートフォリオを求めそれにおける危険資産間の投資額の相対的比率を求める.

第2段階: 第1段階で得られた相対的比率を持つ危険資産のみからなる有効ポートフォリオを1つの危険資産のように見なし，これと安全資産との2資産のみを含む多期間ポートフォリオ選択問題を解き，その最適政策を求める.

5．1．第１段階における最適性の条件

以下では具体的に閉凸錐 Lとして非負制約に対応するものを考える，すなわち，

$L:=\{y_+ : y_+ \geqq 0\}$

とする．定理 4.2の前提が成立するとき$\gamma(y_+)$はy_+の凸関数となるから数理計画問題(4.6)および(4.7)の目的関数 $f(y_+)$を$\gamma(y_+)$とした次の凸計画問題を解くことで有効ポートフォリオを求めることができる：

$$\min \quad \gamma(y_+) \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & y_0+1_+^T y_+=w \\ & y_+ \geqq 0 \\ & y_0\mu_0+y_+^T\mu_+ \geqq \beta \end{aligned} \tag{5.2}$$

［定理 5.1］

$\gamma(y_+)$はy_+に関して微分可能であるとする．このとき凸計画問題 (5.1)および(5.2)に対し$y^{*T}=(y_0, y_+^{*T})$ が最適解となるためと必要十分条件はあるλ_k ($\geqq 0$, $k=1,2,\cdots,M$)，ν ($\geqq 0$) に対し，以下が成立することである：

$$\left.\frac{\partial\gamma(y_+)}{\partial y_k}\right|_{y_+=y_+^*} - \lambda_k=\nu(\mu_i-\mu_0) \quad k=1,2,\cdots,M, \tag{5.3}$$

$$y_k^* \geqq 0 \quad \text{for } k=1,2,\cdots,M, \tag{5.4}$$

$$\lambda_k y_k^*=0 \quad \text{for } k=1,2,\cdots,M, \tag{5.5}$$

$$y_0^*\mu_0+y_+^{*T}\mu_+ \geqq \beta, \tag{5.6}$$

$$\nu(y_0^*\mu_0+y_+^{*T}\mu_+-\beta)=0, \tag{5.7}$$

$$y_0^*+1_+^T y_+^*=w. \ \blacksquare \tag{5.8}$$

5．2．２資産動的ポートフォリオ選択問題

第１段階で得られた相対的比率と同一の相対的比率で構成される危険資産のみからなる有効ポートフォリオを確率変数Xで表す．

第ｎ期間の期首において$W(n)=w$とし，危険資産への総投資額を変数y_1 ($=w-y_0$) とすると最適性方程式(3.3)"および(3.4)"は次の様に書き直すことができる：

$$v(w;N) = v(w), \tag{5.9}$$

$$v(w;n) = \max_{y_1 \geqq 0} \ E[v((w-y_1)\mu_0+y_1X;n+1)] \quad \text{for } n=N-1,n-2,\cdots,1,0. \tag{5.10}$$

定理 3.2より派生効用関数$v(\cdot;n)$ ($n=0,1,\cdots,N$) は微分可能であり，その導関数を$v'(\cdot;n)$ ($n=0,1,\cdots,N$) とおくと

$$E[v'((w-y_1)\mu_0+y_1X;n+1)(X-\mu_0)]=0$$

の解y_1^*が第ｎ期間の期首において保有する富がwであるときの危険資産への最適

な総投資額であり，$w-y_1{}^*$が安全資産への最適投資額である．

§6．おわりに

5．2節で帰着された1個の危険資産と安全資産との2資産のみを含む多期間ポートフォリオ選択問題において，最適なポートフォリオ，すなわち，それぞれの資産への最適な投資額が効用関数（危険回避の態度），期間および保有する富にどのように依存するか，あるいは計画期間の長さNが十分大きい場合の最適ポートフォリオ選択政策の漸近的振舞いはどうか，などは今後の課題である．

［参考文献］

[1] Gnedenko, B. V. and Kolmogorov, A. N. (1954), Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables, Addison-Wesley, Cambridge.

[2] Press, S. J. (1972), Applied Multivariate Analysis, Holt Rinehart and Winston, New York.

[3] Tobin, J. (1958), "Liquidity Preference as Behavior Towards Risk", Review of Economic Studies, Vol. 25, pp. 65-86.

[4] Ziemba, W. T. (1974), "Choosing Investments when the Returns Have Stable Distribution", in Mathematical Programming in Theory and Practice (Hammer, P. L. and Zoutendijk, G. Eds.), North-Holland. Amsterdam, pp. 443-482.

[5] Ziemba, W. T. (1978), "Portfolio Applications: Computational Aspects", in Stochastic Dominance (Whitmore, G. A. and Findlay, M. C. Eds), Lexington Books, Toront, pp. 199-260.

付録1．安定分布の基本的性質

$(Y_k;k=1,2,\cdots)$ を独立で，同一の分布に従う確率変数列とする．適当な実数列 $(a_n;n=1,2,\cdots)$ と正数列 $(b_n;n=1,2,\cdots)$ により確率変数列

$$X_n := \frac{\sum_{k=1}^{n} Y_k}{b_n} - a_n \quad \text{for } n=1,2,\cdots \tag{a.1}$$

が法則収束するなら，その極限分布は無限分解可能な分布（任意の自然数mに対し（mに依存した）適当な確率分布のm重畳み込みに分解できる確率分布）になる．この極限分布の特性関数を$\phi(\cdot)$（$:R\to C$）としたときその対数は次の何れかの型をとることが知られている：

(1)　$\ln \phi(t)=it\mu$　（一点μで確率1を持つ），　(a.2)

(2) $\ln \phi(t)=it\mu - s|t|\{1+i\beta \frac{t}{|t|}\frac{2}{\pi}\ln |t|\}$,
$s>0, \beta\in[-1,1]$,

(3) $\ln \phi(t)=it\mu - s|t|^{\alpha}\{1+i\beta \frac{t}{|t|}\tan\frac{\pi}{2}\alpha\}$ (a.3)
$s>0, \beta\in[-1,1], \alpha\in(0,1)\cup(1,2]$.

(2)において $\beta=0$ の場合が Cauchy分布，(3)において $\alpha=2$ の場合が正規分布である．以上の型の確率分布をまとめて１変量安定分布と言い，μ，s，β，αの４個のパラメータを用い$P(\mu,s,\beta,\alpha)$と書く．各パラメータは次のような特性に関連する：

μ ： 中心傾向，
s $(\geqq 0)$ ： 散らばり，
β $(\in[-1,1])$ ： 非対称性，
α $(\in(0,2])$ ： 特性指数．

$\beta=0$のとき，すなわち

$$\ln \phi(t)=it\mu - s|t|^{\alpha} \quad (a.4)$$

のとき分布はμに関して対称となり，このとき１変量対称安定分布と呼ばれる．特性指数αより（真に）小さい次数のモーメントは存在し，$\alpha\in(1,2]$のときμは分布の平均を与える．また$s^{(1/\alpha)}$はα-dispersionと呼ばれる．

次にＭ次元確率ベクトル$X_+=(X_1,X_2,\cdots,X_M)^T$が特性指数$\alpha$ $(\in(0,2])$のＭ変量対称安定分布に従うとは$X_1,X_2,\cdots,X_M$の任意の線形結合

$$t_1X_1+t_2X_2+\cdots+t_MX_M=t_+^TX_+$$

が特性指数αの１変量対称安定分布に従うときを言う．X_+の特性関数を

$$\psi_{X_+}(t_+):=E[\exp(it_+^TX_+)] \quad \text{for } t_+\in R^M \quad (a.5)$$

とすれば，その定義より

$$\ln \psi_{X_+}(t_+)=i\delta(t_+)-\gamma(t_+) \quad (a.6)$$

と書ける，ここで$\delta(t_+)$は斉次な関数で$X_+=(X_1,X_2,\cdots,X_M)^T$の中心傾向を表すベクトル$\mu_+=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_M)^T$を用いて

$$\delta(t_+)=\mu_+^T\mu_+ \quad (a.7)$$

と書ける．また$\gamma(t_+)$は半正定値かつα次の正斉次な関数である．さらに

$$f(t_+):=\gamma(t_+)^{(1/\alpha)} \quad (a.8)$$

で定義すると$f(t_+)$は半正定値でかつ正斉次な関数である．関数$\delta(t_+)$，$\gamma(t_+)$，$f(t_+)$はそれぞれ１次元確率変数$t_+^TX_+$の中心傾向，散らばり，α-dispersionに対応する．安定分布のより詳細については Gnedenko and Kolmogorov [1], Press [2]を参照されたい．