数理解析研究所講究録
第680巻 1989年 39-48

状態制約をもつ最適制御問題における2次の最適性条件

九大理　丸山幸宏（Yukihiro Maruyama）

序.　ここでは次のような最適制御問題を扱う。すなわち、運動方程式が、

$$\dot{x}(t)=\varphi(t,x(t),u(t)) \quad a.e.\ t \tag{1}$$

で表わされる系について与えられた時刻 0, T に対し、

$$x(0)=x^0,\quad x(T)=x^1 \tag{2}$$

が指定されている。さらに制御 u には、

$$u(t)\in C\subset \mathbb{R}^r \quad a.e.\ t \tag{3}$$

という制約があり、軌動 x には、

$$S(t,x(t))\leqq 0 \quad \forall t\in[0,T] \tag{4}$$

という不等式拘束条件が課せられているとする。このとき目的関数

$$\int_0^T \Phi(t,x(t),u(t))\,dt \tag{5}$$

を最小にする $(x,u)\in W^n_{1,1}\times L^r_\infty$ を決定せよ。

ただし$W_{1,1}^n$はn次元ベクトル値の絶対連続な関数空間としL_∞^rはr次元ベクトル値の本質的有界な関数空間とする。また、Φ, φ, Sは、それぞれ$\Phi: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}$，$\varphi: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}^n$，$S: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$なる写像とする。以後上記のような最適制御問題を問題(OCP)と呼ぶ。ここで問題(OCP)における拘束条件(4)は、状態制約と呼ばれ無限個の不等式制約であることに注意しておく。

さて、従来最適制御問題をBanach空間における非線形計画問題に帰着し、そこで得た最適性条件を最適制御問題に適用するという方法が数多くの著者により取られてきた。とくに2次の最適性条件に注目するとWarga([10])、Girbert and Bernstein([2])、Zeidan and Zezza([9])及びMaruyama([7])等が導いている。ただし文献[7],[9]及び[10]では(4)のような、不等式制約はない問題を扱い、文献[2]では(4)のかわりに、有限個の不等式制約をもつ問題を扱っている。ところが今回、無限個の不等式制約(状態制約)をもつ問題(OCP)に対して、従来とは異なる(不等式制約がないかまたは有限個の不等式制約のある問題では得られない)2次の最適性条件を得たので報告する。

§1. (OCP) ⇨ (NLP)

まず、問題(OCP)がBanach空間における非線形計画問題に帰着されることを示す。問題(OCP)で写像Φ, φ, SはC^2-級とし、集合Cは、内部が空でない($\mathrm{int}\, C \neq \phi$)閉凸集合とする。

$C([0,T])$: $[0,T]$上、連続な関数空間、

$C_+([0,T]) = \{ x \in C([0,T]) \mid x(t) \geqq 0 \quad \forall t \in [0,T] \}$

$V = W^n_{1,1} \times L^r_\infty, \quad W = C([0,T]), \quad K = C_+([0,T])$

$Z = L^n_1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad V \ni (x, u) = v$

$f(v) = \int_0^T \Phi(t, x(t), u(t))\,dt, \quad g(v) = -S(\cdot, x(\cdot))$

$h(v) = (\dot{x}(\cdot) - \varphi(\cdot, x(\cdot), u(\cdot)), x(0) - x^0, x(T) - x^1)$

$Q = \{ v \in V \mid u(t) \in C \quad a.e.\ t \in [0,T] \}$

とおくと、問題(OCP)は、次のような問題に帰着される。

$$\begin{cases} f(v) \longrightarrow \text{Minimize} \\ \text{subject to} \\ g(v) \in K \quad (\text{不等式制約}) & (6) \\ h(v) = 0 \quad (\text{等式制約}) & (7) \\ v \in Q \quad (\text{集合制約}) & (8) \end{cases}$$

ただし、V, W, Z：Banach 空間、$V \supset Q$：閉凸集合, $\mathrm{int}\, Q \neq \phi$。
$W \supset K$：閉凸錐, $\mathrm{int}\, K \neq \phi$, $f: V \to R$, $g: V \to W$,
$h: V \to Z$, f, g, h：2回 Fréchet 微分可能.
以後、上記の非線形計画問題を問題(NLP)と呼ぶ。

§2. 問題(NLP)における2次の最適性条件

最近、Kawasaki ([5]) は、(6)、(7) のような不等式制約及び等式制約をもつ非線形計画問題に対して従来にはない2次の最適性条件を与えた。ただし文献[5]で扱われている問題は、集合制約 ($v \in Q$) は課せられていない。そこでこの節では、Kawasaki とは異なる方法で、制約(6)、(7)のみならず、さらに(8)のような集合制約をもつ問題(NLP)に対してやはり従来とは異なる2次の最適性条件を与える。

<u>Definition 1</u> (Hoffmann and Kornstaedt([4])) $w_0 \in \mathrm{cl}\, K$, $w_1 \in W$

$$F(K; w_0, w_1) = \left\{ w \in W \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists_{\text{nbd}}\, U \text{ of } w,\ \exists T_0 > 0 \\ \quad \text{such that} \\ w_0 + t w_1 + t^2 U \subset K \quad \forall t \in (0, T_0] \end{array} \right\}$$

以後例えば写像 f の $v_0 \in V$ における Fréchet 微分係数を、$Df(v_0)$ と記し、2次の Fréchet 微分係数を $D^2 f(v_0)$ と記述する。

ここで $v_0 \in V$ を問題(NLP)の local minimum solution とし、写像 $h: V \to Z$ は次の仮定をみたすものとする。すなわち、

(i) $Dh(\cdot): V \to B(V, Z)$ continuous (ii) $Dh(v_0): V \to Z$ surjective

以後上記仮定を Assumption (H) と呼ぶ。また、

$$\begin{cases} Df(v_0)v_1 \leqq 0\,, \ Dg(v_0)v_1 \in \mathrm{cl\,cone}(K - g(v_0)), \\ Dh(v_0)v_1 = 0\,, \quad v_1 \in \mathrm{cone}\,(Q - v_0) \end{cases}$$

をみたす $v_1 \in V$ を Critical direction と呼ぶことにする。

そこで、W^*, Z^* はそれぞれ W, Z の共役空間とし、

$$\delta^*(w^* | S) = \sup\{\langle w^*, w\rangle \mid w \in S\},$$

$$K^p = \{w^* \in W^* \mid \langle w^*, w\rangle \leqq 0 \ \ {}^\forall w \in K\}$$

とすると、Assumption (H) の下で、次のような、問題 (NLP) の local minimum solution であるための必要条件が成立する。

Theorem 1 各 critical direction v_1 に対して、

$${}^\exists\lambda_0 \geqq 0\,, \ {}^\exists w^* \in K^p, \ {}^\exists z^* \in Z^*, \ (\lambda_0, w^*, z^*) \neq 0\,, \ \text{s.t.}$$

[相補性条件]

$$\langle w^*, g(v_0)\rangle = 0, \quad \langle w^*, Dg(v_0)v_1\rangle = 0 \tag{9}$$

[1次の必要条件]

$$\lambda_0 Df(v_0)v + \langle w^*, Dg(v_0)v\rangle + \langle z^*, Dh(v_0)v\rangle \geqq 0 \quad \text{for } {}^\forall v \in Q - v_0 \tag{10}$$

[2次の必要条件]

$$\lambda_0 D^2 f(v_0)(v_1, v_1) + \langle w^*, D^2 g(v_0)(v_1, v_1)\rangle + \langle z^*, D^2 h(v_0)(v_1, v_1)\rangle \geqq 2\delta^*(w^* | \mathrm{cl}\,F(K; g(v_0), Dg(v_0)v_1)) \tag{11}$$

定理1で従来の結果と異なる点は2次の必要条件において、$2\delta^*(w^*|\mathrm{cl}F)$という項が含まれていることである。このような2次の最適性条件は、Kawasaki([5])によって導かれているがここで用いた変分集合$F(K; w_0, w_1)$は、文献[5]で用いられている集合とは異なる。またこの変分集合を用いると、写像f, g, hが2回Fréchet微分可能であるという仮定は弱められる。すなわち写像f, g, hは、Furukawa and Yoshinaga([1])が導入した、2次のNeustadt微分をもてばよい。

§3. 変分集合の特徴づけ

$w_0, w_1 \in C([0,T])$

$$\hat{T} = \left\{ t\in[0,T] \;\middle|\; \begin{array}{l} \{t_n\} \subset [0,T] \quad \text{s.t. } w_0(t_n) > 0, \\ t_n \to t, \ \dfrac{-w_1(t_n)}{w_0(t_n)} \to +\infty \text{ as } n \to +\infty \quad (*) \end{array} \right\}$$

$$E(t) = \begin{cases} \sup\left\{\limsup \dfrac{w_1(t_n)^2}{4w_0(t_n)}; \{t_n\} \text{ satisfies } (*)\right\}, & \text{if } t \in \hat{T}, \\ 0, & \text{if } w_0(t) = w_1(t) = 0 \text{ and } t \notin \hat{T}, \\ -\infty, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

関数$E(t)$は、Kawasaki([6])により定義されたが、この関数を用いて、2次の変分集合は次のように特徴づけされる。

Proposition 1 $w_0 \in C_+([0,T])$, $w_1 \in \mathrm{cl\,cone}(C_+([0,T]) - w_0)$とする。このとき、

$$F(C_+; w_0, w_1) = \{ w \in C([0,T]) \mid w(t) > E(t) \text{ for } \forall t \in [0,T] \},$$

$$\mathrm{cl}F(C_+; w_0, w_1) = \{ w \in C([0,T]) \mid w(t) \geqq E(t) \text{ for } \forall t \in [0,T] \}.$$

上記命題を用いて、2次の変分集合の支持関数 $\delta^*(w^*|\mathrm{cl}F)$ を計算する。まず Riestz の表現定理より、w^* を $(C_+([0,T]))^p$ の要素とすると、

$$\langle w^*, w \rangle = -\int_0^T w(t)\, d\varphi(t) \tag{12}$$

と表される。ただし、φ は、非減少関数である。そこで Ψ を関数 φ から導かれた測度とし、Ψ^* を測度 Ψ の完備化とする。このとき、(12) および Proposition 1 より、次の結果を得る。

<u>Lemma 1</u> $g(v_0) \in C_+$, $Dg(v_0)v_1 \in \mathrm{cl\,cone}(C_+ - g(v_0))$, $w^* \in (C_+([0,T]))^p$ とすると、

$$\boxed{\delta^*(w^*|\mathrm{cl}F(C_+; g(v_0), Dg(v_0)v_1)) = -\int_0^T E(t)\, d\Psi^*(t)}$$

§4. 問題(OCP)における2次の最適性条件

この節で、主要定理を述べる。直積空間 $W^n_{1,1} \times L^r_\infty (= V)$ の要素 $v = (x, u)$ のノルムを、$\|v\| = \max\{\|x\|_1, \|\dot{x}\|_1, \|u\|_\infty\}$ とする。ただし、$\|x\|_1 = \int_0^T |x(t)|dt$, $\|u\|_\infty = \mathrm{ess\,sup}|u(t)|$ とする。

$$M = \{ v \in W^n_{1,1} \times L^r_\infty \mid g(v) \in C_+,\ h(v) = 0,\ v \in Q \}.$$

<u>Definition 2.</u> $\exists \varepsilon > 0$ s.t. $f(v_0) \leqq f(v)$ for $\forall v \in M$ satisfying $\|v - v_0\| < \varepsilon$. このとき、$v_0 \in M$ を問題 <u>(OCP) の local minimum solution</u> であるという。

以後 $V_0=(x_0,u_0)$ を問題(OCP)の local minimum solution とし、x_0, u_0 を含む関数を、例えば、$\varphi(t,x_0(t),u_0(t))=\varphi[t]$ と略記する。

線形系 $\dot{x}=\varphi_x[t]x+\varphi_u[t]u$ は次の仮定をみたすとする。

$$\left\{ x(T)\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \dot{x}=\varphi_x[t]x+\varphi_u[t]u \\ x(0)=0 \\ u\in L^r_\infty \end{array} \right\} = \mathbb{R}^n$$

この条件をみたす線形系は Completely controllable であると呼ばれている(Girsanov [3] 参照)。この条件の下で、写像 h に関する仮定(Assumption(H))はみたされることに注意する。
また、問題(OCP)における critical direction は次のようになる。

[critical direction (x_1,u_1)]

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \{\Phi_x[t]x_1(t)+\Phi_u[t]u_1(t)\}dt \leqq 0, \\ \max\limits_{t\in I(x_0)} S_x(t,x_0(t))x_1(t) \leqq 0, \\ \dot{x}_1(t)=\varphi_x[t]x_1(t)+\varphi_u[t]u_1(t),\ x_1(0)=x_1(T)=0, \\ u_1\in\{u-u_0 \mid u\in L^r_\infty,\ u(t)\in C\ a.e.\ t\in[0,T]\}. \end{array} \right.$$

ただし、 $I(x_0)=\{t\in[0,T] \mid S(t,x_0(t))=0\}$ とする。

関数 H は、次式で定義される Hamiltonian とする。

$$H(t,x,y,\lambda_0,\lambda)=\lambda_0\Phi(t,x,y)-\lambda(t)^*\varphi(t,x,y).$$

このとき、線形系 $\dot{x}=\varphi_x[t]x+\varphi_u[t]u$ が、Completely controllable であるという条件の下で、次のような最適性条件が成立する。

<u>**Theorem 2.**</u>（主定理）各 critical direction (x_1, u_1) に対して、

$\exists \lambda_0 \geqq 0$, $\exists \psi \in BV[0,T]$, $\exists \lambda \in L^n_\infty([0,T])$, $(\lambda_0, \psi, \lambda) \neq 0$, s.t.

［相補性条件］

$$\Psi(I(x_0)^c) = 0, \quad \Psi(I(x_0, x_1)^c) = 0,$$

ただし、$I(x_0, x_1) = \{t \in [0,T] \mid S(t, x_0(t)) = S_x(t, x_0(t)) x_1(t) = 0\}$.

［1次の必要条件］

$$-\lambda(t)^* = -C + \int_t^T H_x[s]\,ds + \int_t^T S_x[s]\,d\psi(s), \qquad (13)$$

$$H_u[t](u - u_0(t)) \geqq 0 \quad \text{for } \forall u \in C, \text{ a.e. } t \in [0,T], \qquad (14)$$

［2次の必要条件］

$$\int_0^T (x_1(t), u_1(t))^* \begin{pmatrix} H_{xx}[t], & H_{xu}[t] \\ H_{ux}[t], & H_{uu}[t] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ u_1(t) \end{pmatrix} + \int_0^T x_1(t)^* S_{xx}[t] x_1(t)\,d\psi(t) + \underline{2\int_0^T E(t)\,d\Psi^*(t)} \geqq 0 \qquad (15)$$

1次の必要条件(13)は、adjoint equation であり、(14)は、local minimum principle と呼ばれている（文献［3］参照）。ところが、(15)のような、項 $2\int_0^T E\,d\Psi^*$ を含む2次の必要条件は、従来の最適制御問題における最適性条件には見られない。この新たな項は、状態制約（無限個の不等式制約）によって生じたものである。一方、定理1における2次の必要条件を有限個の不等式制約をもつ問題（例えば、Girbert and Bernstein（［2］）が扱った問題）に適用した場合、$\int_0^T E\,d\Psi^* = 0$ となり、従来の結果（文献［2］の2次の必要条件）と一致する。しかし、状態制約をもつ問題(OCP)を扱う場合、項 $\int_0^T E\,d\Psi^*$ の値は、必ずしもゼロにはならないことを注意しておく。

References

[1] N. Furukawa and Y. Yoshinaga, "Higher order variational sets, variational derivatives and higher order necessary conditions in abstract mathematical programming", Bulletin of Informatics and Cybernetics 23 (1988) 9-40.

[2] E.G. Girbert and D.S. Bernstein, "Second-order necessary conditions in optimal control: Accessory-problem results without normality conditions", Journal of Optimization Theory and Applications 41 (1983) 75-106.

[3] I.V. Girsanov, Lectures on mathematical theory of extremum Problems, Lecture notes in economic and mathematical systems 67 (springer, Berlin, 1972).

[4] K.H. Hoffman and H.J. Kornstaedt, "Higher order necessary conditions in abstract mathematical Programming", Journal of Optimization Theory and Applications 26 (1978) 533-569.

[5] H. Kawasaki, "An envelope-like effect of infinitely many inequality constraints on second-order necessary conditions for minimization problems", Mathematical Programming 41 (1988) 73-96.

[6] H. Kawasaki, "The upper and lower second order directional derivatives of a sup-type function", Mathematical Programming 41 (1988) 327-339.

[7] Y. Maruyama, "Second-order necessary conditions for nonlinear optimization problems in Banach spaces and their application to an optimal control problem", Submitted.

[8] Y. Maruyama, "Second-order necessary conditions for nonlinear optimization problems in Banach spaces by the use of Neustadt derivative", Submitted.

[9] V. Zeidan and P. Zezza, "Necessary conditions for optimal control Problems: conjugate points", SIAM J. Control and Optimization 26 (1988) 592-608.

[10] J. Warga, "A second-order Lagrangian condition for restricted control problems". Journal of Optimization Theory and Applications 24 (1978) 475-483.