数理解析研究所講究録
第 680 巻 1989 年 240-249

オプションと最適停止問題—離散時間の場合—

南山大・経営 沢木勝茂(K. Sawaki)

1 はじめに

配当のない株式に対するオプションを想定しよう。すなわち，ある一定期間のいつでもある一定額の権利行使額を支払うことによって株式を1単位購入できる権利をアメリカンコール・オプションという。満期までのある時点で権利を行使して獲得した株式を公開の株式市場で直ちに売却すれば，その株価と権利行使価格との差額がこのオプション保有者の資本利得である。株式が毎期ランダムに変動するとき，この資本利得の期待値を最大にするためには，このオプションに付与されている権利をいつ行使すればよいであろうか。また，このようなオプション証券の価格はどれ程であるか。この問題は，同一で独立な正値確率変数の列からなる確率過程が与えられたとき，その期待値が最大になる停止時刻（マルコフ時刻）を求める最適停止問題と数学的本質において全

く同一の問題である。

本稿の目的は，離散時間の下でオプション証券の権利行使問題をいわゆる最適停止問題として定式化し，具体的に最適な権利行使政策とその最大利得およびその上下限と定性的性質を明らかにすることである。さらに，ファイナンス理論におけるBlack and Scholes [1]のオプション評価モデルの均衡価格式を別の方法から導出してみよう。

2. オプションと最適停止問題

時間を離散的にとり，$t = 0,1,2,\cdots,T$，満期T をもつアメリカン・コール・オプションを考えよう。株式には配当がないから，T が十分大ならばこのオプションはワラント債と同じ商品である。時刻tでの株価を X_t で表わす。$Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$ を同一で独立な正値確率変数の列とする。時刻0での株価 $X_0 = x$ が与えられたとき時刻tでの株価 X_t は

$$(1) \qquad X_t = x\, Z_1 \cdot Z_2 \cdots Z_t$$

で与えられるものと仮定する。すなわち株価の確率過程 $\{X_t, t = 0, 1, 2, \cdots\}$ は幾何ランダム・ウォークに従う。従って $(Z_t - 1)$ は株価の収益率を表わす。K をオプションの権利行使価格，$K > 0$，τ を権利行使の時刻（停止時刻，マル

コフ時刻）を表わす確率変数とし，rを無危険利子率とする。
ここでの最適停止問題は次のように定式化される。

$$(2) \qquad \max_{\tau=1,2,\cdots,T} E\left[e^{-r\tau}(X_\tau - K)^+ \mid X_0 = x\right]$$

ここで $x^+ = \max\{x, 0\}$ である。いま満期Tは十分に大きく，株価が初めてyになる最初の時刻を$\tau(y)$とする。すなわち，$\tau(y) = \min\{t \geq 0: X(0)=x,\ X_t \geq y\}$ で $P_x\{\tau(y) \leq T\} \fallingdotseq 1$ と仮定する。(2)式を満足するような停止時刻τを求める問題を直接に解く代りに，最適政策のクラスを株価がy以上になれば権利を行使するような政策のクラスに限定しよう。(2)式を最大にするような停止時刻の政策はオペレーショナルでないばかりでなく制度的にも認められていないのに対して，株価がy以上になれば権利を行使するという政策はいわゆる“差し値”と呼ばれる取引政策で証券会社によって広く採用されている取引制度である。このような政策のクラスの下での最適停止問題は次のように書き改められる。

$$(3) \qquad \max_{y \geq K} E\left[e^{-r\tau(y)}(X_{\tau(y)} - K)^+ \mid X_0 = x\right]$$

$$= \max_{y \geq K} (y-K) E\left[e^{-r\tau(y)} \mid X_0 = x\right]$$

$$= \max_{y \geq K} (y-K)\left(\frac{x}{y}\right)^{\rho} \equiv \max_{y \geq K} g_x(y).$$

ただし $\rho = \sqrt{\mu^2/\sigma^2 + 2r}/\sigma - \mu/\sigma^2 > 0$ で，$g_x(y) = (y-K)(x/y)^{\rho}$ である。$g_x(y)$ は，初期値 x にのみ依存して，満期 T からは独立な y の関数であることに注意しよう。関数 $g_x(y)$ の y に関する性質を調べてみよう。1階の導関数は

(4) $$g'_x(y) = \left(\frac{x}{y}\right)^{\rho} \frac{1}{y}\left[\rho K - (\rho-1)y\right]$$

となって，$\rho > 1$ ならば $g'_x(y)$ は途中で一回だけ符号を変える。も $\rho \leq 1$ ならば $g'_x(y)$ は非負となって $g_x(y)$ は y の非減少関数となる。2階の導関数は

(5) $$g''_x(y) = \left(\frac{x}{y}\right)^{\rho} \frac{\rho}{y^2}\left[-K(\rho+1) + (\rho-1)y\right]$$

となる。もし $0 < \rho \leq 1$ ならば $g''_x(y) \leq 0$ となって，$g_x(y)$ は凹関数である。もし，$\rho > 1$ ならば，$g_x(y)$ は $y = K(\rho+1)/(\rho-1)$ で変曲点をもち，$g''_x(y)$ はこの変曲点で符号を1回だけ変えるから，$g_x(y)$ は単峰型の関数であることが判る。従って，(3)式で定義した最適停止問題は，次の2つの場合に分けて議論しよう。

$\rho > 1$ の場合

$\rho > 1$ ならば，ρ の定義より，これは $r > \mu + \frac{\sigma^2}{2}$ と同値である。このとき，$g_x(y)$ は単峰型で (4)式より明らかに

$$y^* = K\frac{\rho}{\rho - 1} \tag{6}$$

で最大となる。この y^* は $y \geq K$ の条件を満たす。(6)式を(3)式に代入すれば，期待割引利得の最大値 $g_x(y^*)$ を得て，それは次式で与えられる。

$$g_x(y^*) = \frac{K}{\rho - 1}\left[\frac{x(\rho - 1)}{K\rho}\right]^{\rho}. \tag{7}$$

この最大期待割引利得を x の関数とみたとき，x の単調増加で凸な関数であることが容易に調べられる。$\rho > 1$ すなわち $r > \mu + \frac{\sigma^2}{2}$ ならば，$y^* > K$ でかつ $y^* < \infty$ となる。故に，最適な権利行使政策は $\min\{\tau(y^*), T\}$ で特徴づけられる。オプションの権利行使が満期前に実行される可能性がある場合は条件 $\rho > 1$ すなわち $r > \mu + \frac{\sigma^2}{2}$ が成立する場合であることを見た。この条件 $r > \mu + \frac{\sigma^2}{2}$ は，無危険証券の収益率が危険証券の収益率の期待値 $(\mu + \frac{\sigma^2}{2})$ よりも大きいことを主張している。これは財務理論の立場から見ると奇妙な世界であることに注意しよう。最適化が可能な世界と裁定が存在しないことを前提とする財務論の世界についての1つの示

唆を与えている。次に，財務理論で暗黙のうちに仮定する$\rho \leq 1$すなわち $r \leq \mu + \frac{\sigma^2}{2}$ の場合について考えよう。

<u>$\rho \leq 1$ の場合</u>

$\rho \leq 1$すなわち$r \leq \mu + \frac{\sigma^2}{2}$ の場合，期待割引利得$g_x(y)$はyの単調増加でかつ凹関数である。従って，$g_x(y)$を最大にするyの値は限りなく大きくなる。明らかに$y \to \infty$のとき$\tau(y) \to \infty$ となるから，そのようなyに対して$P\{\tau(y) \geq T\} \doteqdot 1$となる。従って，(2)式で定義した最初の最適停止問題は，$\rho \leq 1$の条件の下で，次のようになる。

$$(8) \qquad \max_{1 \leq \tau \leq T} E[e^{-r\tau}(X_\tau - K)^+ \mid X_0 = x]$$

$$= E[e^{-rT}(X_T - K)^+ \mid X_0 = x].$$

すなわち，$\rho \leq 1$のときは，満期Tまで権利を行使しないのが最適である。この結論は，財務理論における Black and Scholes [1]のそれと一致する。換言すれば，$r \leq \mu + \frac{\sigma^2}{2}$であって配当のない株式に対するアメリカン・コール・オプションは満期まで権利を行使しないことが最適であるからヨーロピアン・コール・オプションに帰結する。(8)式を$c(x,T)$とおけば(1)式の幾何ランダム・ウォークを用いて

$$c(x,T) \equiv \max E[e^{-r\tau}(X_\tau - K)^+ \mid X_0 = x]$$

$$= E[e^{-rT}(X_T - K)^+ \mid X_0 = x]$$

$$= x e^{(\mu+\frac{\sigma^2}{2}-r)T}\,\Phi([\log(\tfrac{x}{K}) + (\mu+\sigma^2)T]/\sigma\sqrt{T})$$

(9) $$\quad - K e^{-rT}\,\Phi([\log(\tfrac{x}{K}) + \mu T]/\sigma\sqrt{T})$$

が計算される。ただし，$\Phi(\cdot)$は標準正規分布を表わす。この $c(x, T)$ $\underbrace{\text{が}}_{}$ xに関して 増加でかつ凸な関数であることは，$\partial c/\partial x$ および $\partial^2 c/\partial x^2$ を計算すれば容易に確認できる。さらに $c(x, T)$ は Tの増加関数で，Kの減少関数，σ^2の増加関数，rの増加関数であることも同様に分る。

次に最大期待割引利得 $c(x, T)$ の上界について議論しよう。

仮定　各tに対して

$$E[Z_t^\theta \mid Z_1, \cdots, Z_{t-1}] \leq e^r$$

となるような $\theta > 1$ が存在する。

この仮定を満すようなθとして前述の $\rho = \sqrt{\mu^2/\sigma^2 + 2r}/\sigma - \mu/\sigma^2$ を選べば，上の仮定の不等式は等号で成立する。なぜならば $r > \mu + \frac{\sigma^2}{2}$ の下で $\theta > \sqrt{\mu^2/\sigma^4 + 2r/\sigma^2} - \mu/\sigma^2 = 1$ である。

定理1　任意の$X_0 = x$に対して関数$f(x)$を次のように定義する。

(10) $$f(x) = \begin{cases} x^\theta \left(\frac{\theta-1}{K}\right)^{\theta-1}/\theta^\theta, & x \leq K\frac{\theta}{\theta-1} \text{ のとき} \\ x - K, & x > K\frac{\theta}{\theta-1} \text{ のとき.} \end{cases}$$

このとき，すべてのxと停止時刻τについて

$$(11) \qquad E[e^{-r\tau}(X_\tau - K)^+ \mid X_0 = x] \leq f(x)$$

が成立する。

証明はKarlin and Taylor [2]を参照のこと。ただし，彼らの証明ではK=1であることに注意しよう。従って，この定理と$\rho > 1$のときの(7)式とを一緒にすれば，$1 < \theta \leqq \rho$の関係の下で

$$(12) \qquad g_x(y^*) \leq C(x, T) \leq x \quad , \forall x$$

が成立する。更に，オプションの最大期待利得の上界である$f(x)$は，xとKにのみ依存してrとTから独立であること，株価の確率分布の型および権利の行使政策τからも独立であることが判る。もしこの上界をオプションの売手が利用するならば，彼の平均損失の上界でもある。また，$\theta \to 1$のとき，$f(x)$は$x = K\theta/(\theta-1)$の点で$\max(x-K, 0)$と接しているから，$f(x) \to C(x, T)$になることが確められる。

3. オプション評価モデル

前節でもし$r \leq \mu + \frac{\sigma^2}{2}$ならば，最適な停止時刻は満期T

まで何もしないことであることをみた。即ち，条件 $r \leq \mu + \frac{\sigma^2}{2}$ の下で

$$\max_{\tau} E[e^{-r\tau}(X_\tau - K)^+ \mid X_0 = x]$$
$$= E[e^{-rT}(X_T - K)^+ \mid X_0 = x]$$

が成立する。ここで期待値は株価の確率過程に関して取っている。$r = \mu + \frac{\sigma^2}{2}$ なる関係を満足する危険中立的な確率測度についての期待値を E^* と標記すれば

$$E^*[e^{-rT}(X_T - K)^+ \mid X_0 = x]$$

$$= x\Phi([\log\frac{x}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})T]/\sigma\sqrt{T})$$

(13)
$$-Ke^{-rT}\Phi([\log\frac{x}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T]/\sigma\sqrt{T})$$

となって，この(13)式は真に Black and Scholes [1] のオプション評価式の公式に他ならない。換言すれば，Black and Scholes のオプション評価モデルの世界は，配当のない株式に対するオプションの最適停止問題の中で $r \leq \mu + \frac{\sigma^2}{2}$ が成立する世界に一致する。もし条件 $r \leq \mu + \frac{\sigma^2}{2}$ が成立しないならば，第2節で述べた枠組から Black and Scholes の評価公式を導出することは出来ない。しかし，条件が成立しない場合でも次の導出過程に従えば，同一の評価公式を得る。

$\mu \geq 0$ ならば $\{X_t : t = 1, 2, \cdots, T\}$ はサブ・マーチンゲールを形成する。従って，サブ・マーチンゲールの凸関数である

$[X_t - K]^+$もまたサブ・マーチンゲールである。任意抽出定理(Optional Sampling Theorem)より，すべての停止政策τについて

$$E[(X_\tau - K)^+ | X_0 = x] \le E[(X_T - K)^+ | X_0 = x]$$

が成立するから，

$$(14) \quad \max_\tau E[(X_\tau - K)^+ | X_0 = x] = E[(X_T - K)^+ | X_0 = x]$$

を得る。先と同様の議論によって，株価に関する期待値の代りに危険中立的な確率測度についての期待値E^*を(14)式に適用すれば(13)式と同一のBlack and Scholesの評価公式を得る。

参考文献

[1] Black, F. and Scholes, M., The Pricing of Option and Corporate Liabilities, J. Political Economy, Vol. 81 (1973), 637-659.

[2] Karlin, S. and Taylor, H. M., A First Course in Stochastic Processes, Academic Press, New York, 1975

[3] Samuelson, P. A., Rational Theory of Warrant Pricing, Industrial Management Rev., Vol. 6 (1965), 13-52.

[4] ________, Mathematics of Speculative Prices, SIAM Review, Vol. 15 (1973), 1-42.

[5] Taylor, H. M., Bounds for Stopped Partial Sums, Annals of Mathematical Statistics, Vol. 43 (1972), 733-747.