数理解析研究所講究録
第 680 巻 1989 年 275-284

ナワバリをめぐる2人ゲーム

姫路工大　寺岡義伸 (Yoshinobu Teraoka)

1. 序

最近ゲームの理論は，経済事象の解明よりもむしろ生物進化の説明づけの理論的道具として応用できることがわかってきた．その出発となったモデルは，２匹の動物が１つのナワバリをめぐって対立するゲームであろう．ここでは，生物学者によって研究されているこのナワバリをめぐるゲーム[1]を，今少し一般的に定式化し生物学的直観にもとづいた取扱いを数学的に整理された取扱いで紹介する．

2. 基本モデル

２匹の動物(Player I，II)が「価値」V をもったナワバリをめぐって戦っている．この対戦に際して，各動物は，「誇示」・「挑み」・「逃げ」の３つの行動がとれるものとし，この行動から次の２つの「純戦略」のうち一方を選択するものとする．

タカ戦略：勝ち負けがはっきりするまで戦いを挑む。

ハト戦略：まず誇示をし，相手が戦いを挑めば逃げ出す。

もし両者とも戦いを挑んだときには，いずれか一方が傷つき逃げ出すことになるものとする。そして敗れた方は C だけ価値が減少するものとする。タカとハトをそれぞれ H と D で表わす。Payoff は以下のような仮定で定義されるものとする。

(i) I, II 共に H を選んだ時は，確率 p で I が勝ち，確率 q で II が勝つものとする。$p>0$, $q>0$, $p+q=1$.

(ii) 一方が H を選び他方が D を選んだ時は，H を選んだ方は価値 V を手に入れ，D を選んだ方は 0 となる。

(iii) I, II 共に D を選んだ時は，I と II は $p:q$ の比で V を分けあうことにする。後の議論のため $p \geqq \frac{1}{2}$ とする。

以上の仮定をもとに利得双行列を求めると次のようになる：

		II: H	II: D
I	H	$pV-qC,\ qV-pC$	$V,\ 0$
	D	$0\quad V$	$pV,\ qV$

この非0和ゲームに対しては平衡点 (x^0, y^0) および平衡値 $v_1^0 = M_1(x^0, y^0)$; $v_2^0 = M_2(x^0, y^0)$ はそれぞれ

$$0 < \frac{C}{V} \leqq \frac{q}{p} \Rightarrow (\langle 1, 0\rangle, \langle 1, 0\rangle),$$

$$v_1^0 = pV - qC\ ;\ v_2^0 = qV - pC,$$

$$\frac{q}{p} < \frac{C}{V} \leqq \frac{p}{q} \Rightarrow (\langle 1,0\rangle, \langle 0,1\rangle),$$
$$v_1^\circ = V \;;\quad v_2^\circ = 0,$$

$$\frac{C}{V} > \frac{p}{q} \Rightarrow (\langle 1,0\rangle, \langle 0,1\rangle),\ v_1^\circ = V \;;\ v_2^\circ = 0,$$
$$(\langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle),\ v_1^\circ = 0 \;;\ v_2^\circ = V,$$
$$\left(\left\langle \frac{pV}{pC-(q-p)V}, \frac{pC-qV}{pC-(q-p)V}\right\rangle, \left\langle \frac{qV}{qC-(p-q)V}, \frac{qC-pV}{qC-(p-q)V}\right\rangle\right),$$
$$v_1^\circ = \frac{pV(qC-pV)}{qC-(p-q)V} \;;\quad v_2^\circ = \frac{qV(pC-qV)}{pC-(q-p)V}$$

となる。特徴的なのは p, q, C, V の値が何であっても結果として平和的共存へ導く $(\langle 0,1\rangle, \langle 0,1\rangle)$ がとられないことであり常に挑戦的な戦略が残されていることである。

注：生物系の文献では $p=q=\frac{1}{2}$ としてあり，その上モデルの考え方は非0和であったにもかかわらず取扱いは0和であった。また $p=q=\frac{1}{2}$ のときの平衡点は，$V \geqq C$ ならば $(\langle 1,0\rangle, \langle 1,0\rangle)$ であるが，$V < C$ の時は $(\langle 1,0\rangle, \langle 0,1\rangle)$, $(\langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle)$ $(\langle \frac{V}{C}, 1-\frac{V}{C}\rangle, \langle \frac{V}{C}, 1-\frac{V}{C}\rangle)$ が平衡点となる。ところで，$V \geqq C$ の $(\langle 1,0\rangle, \langle 1,0\rangle)$ と $V > C$ の時の $(\langle \frac{V}{C}, 1-\frac{V}{C}\rangle, \langle \frac{V}{C}, 1-\frac{V}{C}\rangle)$ は進化的に安定な戦略 (evolutionarily stable strategy) 略して ESS とよばれている。

3. ある拡張

生物進化学では 前節の基本モデルにもっと現実的と考え

られる中立的な純戦略を付け加えることを試みている．

3.1. ハト・タカ・報復者ゲーム

新しく第3番目の純戦略 R すなわち「報復者」をもち込んでみる．R とは，誇示によって対戦をむかえ，相手がタカで振る舞うようであれば自分もタカで応戦し，相手がハトで振る舞うようであれば自分もハトのように振る舞う戦略のことである．そうすると

	H	D	R
H	$pV-qC,\ qV-pC$	$V,\ 0$	$pV-qC,\ qV-pC$
D	$0,\ V$	$pV,\ qV$	$pV,\ qV$
R	$pV-qC,\ qV-pC$	$pV,\ qV$	$pV,\ qV$

このゲームの平衡点は次のようになる：

$$0<\frac{C}{V}\leqq\frac{q}{p}\ \Rightarrow\ (\langle 0,0,1\rangle,\ \langle 0,0,1\rangle),$$

$$\frac{q}{p}<\frac{C}{V}\leqq\frac{p}{q}\ \Rightarrow\ (\langle 1,0,0\rangle,\ \langle 0,1,0\rangle),$$

$$\frac{C}{V}>\frac{p}{q}\ \Rightarrow\ (\langle 1,0,0\rangle,\ \langle 0,1,0\rangle)$$

$$(\langle 0,1,0\rangle,\ \langle 1,0,0\rangle)$$

$$\left(\left\langle \frac{pV}{pC-(q-p)V},\ \frac{pC-qV}{pC-(q-p)V},\ 0\right\rangle,\ \left\langle \frac{qV}{qC-(p-q)V},\ \frac{qC-pV}{qC-(p-q)V},\ 0\right\rangle\right).$$

結果として，$0<\frac{C}{V}\leqq\frac{q}{p}$ の時，すなわち基本モデルにおいて共にタカ戦略をとる方が最適であるような場合に対してのみ戦略 R は意味をもち，その他の場合は基本モデルに帰着されるゲームとなってしまう．

また，上記のモデルに対して，相手の様子をみてからタカ的に振る舞うのと最初からタカ的に振る舞うのとでは利得に差が出るとして，次のようなゲームを提案している人もいる：

	H	D	R
H	$pV-qC,\ qV-pC$	$V,\ 0$	$pV-qC+\varepsilon,\ qV-pC-\varepsilon$
D	$0,\ V$	$pV,\ qV$	$pV-\varepsilon,\ qV+\varepsilon$
R	$pV-qC-\varepsilon,\ qV-pC+\varepsilon$	$pV+\varepsilon,\ qV-\varepsilon$	$pV,\ qV$

ここに ε はある小さな正の数としておく。一見意味のありそうな上記の修正モデルも，結局は基本モデルと大差のない平衡戦略へ導く。

3.2. ハト・タカ・あばれ者ゲーム

前と同様に今度は第３番目の純戦略として B すなわち「あばれ者」：対戦のはじめはタカ的に振る舞うが，相手がタカ戦略を選ぶようであれば自分に逃げ出す，を加えると

	H	D	B
H	$pV-qC,\ qV-pC$	$V,\ 0$	$V,\ 0$
D	$0,\ V$	$pV,\ qC$	$0,\ V$
B	$0,\ V$	$V,\ 0$	$pV,\ qC$

．

このゲームの平衡点は

$$0<\frac{C}{V}\leqq\frac{q}{p} \Rightarrow (\langle 1,0,0\rangle,\ \langle 1,0,0\rangle),$$

$$\frac{q}{p}<\frac{C}{V}\leqq\frac{V}{q} \Rightarrow (\langle 1,0,0\rangle,\ \langle 0,0,1\rangle),$$

$$\frac{C}{V} > \frac{q}{p} \Rightarrow \begin{array}{l} (\langle 1,0,0\rangle, \langle 1,0,0\rangle) \\ (\langle 1,0,0\rangle, \langle 0,0,1\rangle) \end{array}$$

$$\left(\left\langle \frac{pV}{pC-(q-p)V}, 0, \frac{pC-qV}{pC-(q-p)V} \right\rangle, \left\langle \frac{qV}{qC-(p-q)V}, 0, \frac{qC-pV}{qC-(p-q)V} \right\rangle\right).$$

この修正モデルも，一見意味がありそうであるが 結果からは，戦略Dが戦略Dにとって代られたにもかかわらず（あるいは代られたにすぎず）基本モデルとまったく同じゲームをプレイしていることに他ならないことになっている。

3.3. ハト・タカ・報復者・あばれ者ゲーム

生物進化学では さらに，基本モデルに戦略Rと戦略Bの両方を加えたゲームも考察しているが 数学的にはあまり意味がないように思われる。

4. 持久戦

前節までのモデルでは，Player I，II 共に戦略Dを選択した場合には，価値Vを $p:q$ の比で分け合うものとした。しかし 1つのナワバリをめぐって競争するような時は ある一定の比で分け合うといった合意のできない場合が多い。さらに前節までの結果では 両者共確率1で Dを選ぶという意味での平衡点はいずれのモデルにでも存在していなかった。

このような場合には，通常対戦は誇示ではじめられ， この

誇示による対戦でどこまで維持できるかという問題が生ずる。この場合より長い間持続した方が勝ちとなる。ところがこの際誇示を続けるには何らかのコストがかかるはずである。たとえば生物進化学では繁殖をはじめるのが遅れるというコストが考えられている。したがって誇示のコストは時間が長引くほど大きくなると仮定できる。Playerにとっての決定はどれくらいの時間持続できるかの時間をきめることである。

ここでは，上記の問題を次のようにモデル化する：

Player I, II は各々 $[0,\infty)$ 内のどの時点までねばるかを決めようとしている。大きな時点を選んだ方が勝ちとなり，勝者は価値 V を敗者は価値 0 を得る。しかしながら $t\in[0,\infty)$ まで対戦を持続させるためには I, II はそれぞれ $h_1(t)$, $h_2(t)$ のコストを費やさなければならない。ここにコスト $h_i(t)$ は微分可能で $h_i(0)=0$, $h_i'(t)>0$ for $t\in[0,\infty)$, かつ $h_i(t)\nearrow\infty$ as $t\nearrow\infty$ であると仮定する $(i=1,2)$。また両者が同時刻までねばった時は $p:q$ の比で勝負が決まるものとする。両者共最適な持続時間をきめなければならない。

$M_i(x,y)$ を Player i $(i=1,2)$ への利得関数とすると

$$(4.1)\quad M_1(x,y)=\begin{cases}-h_1(x), & x<y\\ pV-h_1(x), & x=y\\ V-h_1(y), & x>y\end{cases};$$

$$(4.2)\quad M_2(x,y)=\begin{cases}-h_2(y), & y<x\\ \gamma V-h_2(y), & y=x\\ V-h_2(x), & y>x\end{cases}$$

となる。ここに $x\in[0,\infty)$, $y\in[0,\infty)$ はそれぞれ Player I, II の純戦略である。このゲームの平衡戦略は純戦略の中には存在しない。そこでこのゲームの平衡戦略を次のクラスの混合戦略 (cdf) の中からみつけることにする:

Player I の混合戦略 $F(x)$ は点 $x=0$ における mass part $\alpha\geqq 0$ と $(0,\infty)$ 上の density part $f(x)$ で構成される cdf,
Player II の混合戦略 $G(y)$ は点 $y=0$ における mass part $\beta\geqq 0$ と $(0,\infty)$ 上の density part $g(y)$ で構成される cdf.

上記の混合戦略に対して，期待値の記号として

$$M_i(F,y)=\int_0^\infty M_i(x,y)\,dF(x)\ ;\ M_i(x,G)=\int_0^\infty M_i(x,y)\,dG(y),$$
$$M_i(F,G)=\int_0^\infty\int_0^\infty M_i(x,y)\,dF(x)\,dG(y),\quad (i=1,2)$$

を約束する。そうすると

$$(4.3)\quad M_2(F,y)=\begin{cases}\alpha\gamma V & y=0\\ \alpha V+\int_0^y\{V-h_2(x)\}f(x)dx-\int_y^\infty h_2(y)f(x)dx, & y>0\end{cases}$$

$$(4.4)\quad M_1(x,G)=\begin{cases}\beta\rho V & x=0\\ \beta V+\int_0^x\{V-h_1(y)\}g(y)dy-\int_x^\infty h_1(x)g(y)dy, & x>0\end{cases}$$

を得る。$M_2(F,y)=v_1^0$ for all $y>0$ として

$$f(t)=k\frac{h_2'(t)}{V}e^{-\frac{h_2(t)}{V}},\quad \text{for } t>0$$

となり，$\int_0^\infty f(t)dt = 1-\alpha$ から $k=(1-\alpha)$．したがって

$$f(t)=(1-\alpha)\frac{h_2'(t)}{V}e^{-\frac{h_2(t)}{V}}, \quad \text{for } t>0 .$$

(4.3) に代入して

$$M_2(F,y)=\begin{cases}\alpha q V, & y=0\\ \alpha V, & y>0 .\end{cases}$$

まったく同様の議論を (4.4) に対して行い

$$g(t)=(1-\beta)\frac{h_1'(t)}{V}e^{-\frac{h_2(t)}{V}}, \quad \text{for } t>0$$

$$M_1(x,G)=\begin{cases}\beta p V, & x=0\\ \beta V, & x>0 .\end{cases}$$

以上より，次の結論を得る：

$$F^\circ(x)=\int_0^x \frac{h_2'(t)}{V}e^{-\frac{h_2(t)}{V}}dt, \quad x\geqq 0$$

$$G^\circ(y)=\int_0^y \frac{h_1'(t)}{V}e^{-\frac{h_1(t)}{V}}dt, \quad y\geqq 0$$

とおくと (F°, G°) はゲーム (4.1), (4.2) の1つの平衡点となり，平衡値 v_1°, v_2° は

$$v_1^\circ = v_2^\circ = 0 .$$

注：生物進化学では 0 和と 非 0 和の区別がなく

$$p=q=\frac{1}{2}, \quad h_1(t)=h_2(t)=t$$

の時の　$M_1(\bar{x}, y)=v$ for all y より解を求めている．また最初から $\alpha=\beta=0$ としてあった．そして上記の戦略を ESS とよんでいる．

今の問題は，互に相手が先に引いた時そのことが観測できその時点で自分の勝利が決定するとした Noisy 型のモデルとしていたが，状況によっては自分の持続計画時間が経過してみてはじめて相手が先に引いたということがわかる Silent 型の場合も考えられる．この場合の利得関数は

$$M_1(x,y)=\begin{cases}-h_1(x), & x<y\\ pV-h_1(x), & x=y\\ V-h_1(x), & x>y\end{cases};$$

$$M_2(x,y)=\begin{cases}-h_2(y), & y<x\\ qV-h_2(y), & y=x\\ V-h_2(y), & y>x,\end{cases}$$

となるが意味のあるモデルかどうか検討を要する．

参考文献

[1] J. M. Smith : Evolution and the Theory of Games, Cambridge University Press, 1982.
（寺本訳：進化とゲームの理論―闘争の論理，産業図書，1985）．