数理解析研究所講究録
第 694 巻 1989 年 20-39

S^{2n-1} 上の無限次元グラスマン多様体，Free Fermion Fock 空間 および current 代数

早大 理工 郡 敏昭
(Tosiaki Kori)

複素平面の単位円周 S^1 上の $L^2(S^1, d\theta)$ を $\{|z|<1\}$ で正則な函数の境界値として表わされるものと，$\{|z|>1\}$ で正則（+∞で 1位の零）な函数の境界値としてあらわされるものに分割し（Plemelj の定理），自由フェルミ場の第二量子化とそれにともなう問題，ボソン化，ヤコビ三対恒等式，等の基本的なモデルにすること，は良く知られている。この講演では S^{2n-1} 上において その類似を展開する。

1. S^{2n-1} 上の無限次元グラスマン多様体，

$B = \{ z \in \mathbb{C}^n ; |z| = 1 \}$,

$L^2(B, d\sigma)$; $\sigma(B) = 1$ と仮定，

の部分空间を導入しよう。

H_+ ： z^α, $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, $\alpha_i\geqq 0$ $1\leq i\leq n$, が生成する $L^2(B)$ の閉線形部分空間。

H_- ； $\bar{z}^\beta$, $|\beta|>0$, が生成する $L^2(B)$ の閉線形部分空間。

$H_\ominus$ ： $\bar{z}^\beta$, $|\beta|\geqq 0$, が生成する閉線形部分空間。

$K = H_+ \oplus H_-$, 閉線形空間としての直和。

H_+ と $H_\ominus$ とは双一次形式 $\int_B f\cdot g\, d\sigma$, $f\in H_+$, $g\in H_\ominus$ により互いに双対である。

H_+ と H_- は K の中で互に直交補空間になっている。

$$c_\alpha=\left(\frac{(n+|\alpha|-1)!}{\alpha!\,(n-1)!}\right)^{1/2}, \quad |\alpha|\geqq 0,$$

とおく。

$\{e_\alpha = c_\alpha z^\alpha ;\ |\alpha|\geqq 0\}$ は H_+ の正規直交基底を与え，$\{e_{-\beta}=c_\beta \bar{z}^\beta ;\ |\beta|>0\}$ は H_- の正規直交基底を与える。

$P_+ : K \longrightarrow H_+$, $\quad P_- : K\longrightarrow H_-$

を直交射影とする。

定義

B上の無限次元グラスマン多様体を次のように定義する:

$$Gr(K)=\left\{ W :\ \begin{array}{l} K \text{ の閉線形空間で} \\ P_+|W : W\to H_+ \text{ はコンパクト作用素} \end{array}\right\}$$

「$P_-|W : W \to H_-$ はフレドホルム作用素」

$W \in Gr(K)$ の枠を与えよう。

まず multiindices に順序を決める。

$$\mathcal{N} = (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n, \quad \mathcal{N}^c = (\mathbb{Z}_{\leq 0})^n - (0, \cdots, 0)$$

とおく。 $\alpha, \beta \in \mathcal{N}^c \oplus \mathcal{N}$ に対し辞書式順序

$\alpha \gtrsim \beta \iff$ (i) $|\alpha| > |\beta|$, 又は

(ii) $|\alpha| = |\beta|$ である番号 $j \leq n$ に対し

$\alpha_n = \beta_n, \cdots, \alpha_{n-j+1} = \beta_{n-j+1}, \ \alpha_{n-j} > \beta_{n-j}$.

を定める。

$$\mathcal{N}_\alpha^c = \{\beta \in \mathcal{N}^c \oplus \mathcal{N} ; \beta < \alpha\}, \ \mathcal{N}_\alpha = \{\beta \in \mathcal{N}^c \oplus \mathcal{N} ; \beta \gtrsim \alpha\}$$

とおく。

$$\mathcal{S} = \left\{ S \subset \mathcal{N}^c \oplus \mathcal{N} ; \begin{array}{l} \#(\mathcal{N} \cap S) < \infty \\ \#(\mathcal{N}^c \cap S^c) < \infty \end{array} \right\}$$

$\mathcal{S} \ni S$ に対し $\chi(S) = \#(\mathcal{N} \cap S) - \#(\mathcal{N}^c \cap S^c)$

を S の charge と呼ぶ。

$p \in \mathbb{N}$ に対し、$(0, 0, \cdots, 0)$ より順序 $<$ によって、p 番目の場所の multiindex を $\alpha(p)$ と書く、同じく $(0, \cdots, 0)$ の p 番手前の場所の multiindex を $\alpha(-p)$ と書く;

$\alpha(p) \in \mathcal{N}, \ \alpha(-p) \in \mathcal{N}^c$。

Charge p の $S \in \mathcal{S}$ は、ある単調増加函数

$$\sigma : \mathcal{N}^c_{\alpha(p)} \longmapsto \mathcal{N}^c \oplus \mathcal{N}$$

で，十分小さな multiindex ν に対しては

$\sigma(\nu) = \nu$ となっているような函数 σ により

$\sigma(\mathcal{N}^c_{\alpha(p)}) = S$ と表わされることに注意しよう。

$S \in \mathcal{S}$ に対し

$H_S = \{ e_\nu \ ; \ \nu \in S \}$ の張る閉線形空間，

とする。

命題

$W \in Gr(K)$ に対し 一意的に $S \in \mathcal{S}$ が定まり，H_S への直交射影

$$Pr_{H_S} | W : W \longrightarrow H_S$$

が同型となる。

証明は Segal の本 Proposition 7.1. or 他の文献.

$W \in Gr(K)$ に対し 上の考察より，$S \in \mathcal{S}$ と，線形等距離写像 $w : H_S \longrightarrow$ で，$w_- = P_- \circ w$ がフレドホルム作用素，$w_+ = P_+ \circ w$ がコンパクト作用素となるものがある。このフレドホルム作用素 w_- の指数 $\chi(w_-)$ がちょうど charge $\chi(S)$ に等しい。

Wの線形枠は $(\mathcal{N}^c \oplus \mathcal{N}) \times \mathcal{N}^c_\alpha$，$\alpha = \alpha(\chi(S))$，$S = \sigma(\mathcal{N}^c_\alpha)$，なる行列で表わされる：

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} w_- \\ w_+ \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \mathcal{N}^c \\ \oplus \\ \mathcal{N} \end{array} \\ \xrightarrow{\mathcal{N}^c_\alpha} & \end{array}$$

。

さらに W は admissible frame と呼ばれる次の枠で表わされる：

$$\mathfrak{X} = (\xi_\mu)_{\mu \to}$$

$$\xi_\mu = e_{\sigma(\mu)} + \sum_{\nu \geq \sigma(\mu)} t_{\nu,\mu} e_\nu, \qquad \mu \in N_\alpha^c.$$

admissible basis を用いて $W \in Gr(K)$ の Plücker embedding が得られる．すなわち $S' \in \mathcal{S}$ を charge $p = \chi(S)$ の Maya 図形とすると $N_\alpha^c \times N_\alpha^c$ − 行列 $Pr_{H_{S'}} \circ \mathfrak{X}$ は $\mathrm{Identity}_{N_\alpha^c \times N_\alpha^c}$ と有限位数の行列だけ異なっているにすぎないので行列式

$$\det(Pr_{H_{S'}} \circ \mathfrak{X})$$

が定まる。ここで $\alpha = \alpha(p)$, $p = \chi(S) = \chi(S')$。

admissible frame $\mathfrak{X}$ をとり変えるとこの行列式の値は $\mathbb{C}^*$ のある値だけ乗ぜられる。したがって写像

$$\begin{array}{ccc} Gr(K) & & \mathbb{P}(\prod_{T \in \mathcal{S}} \mathbb{C}e^T) \\ \cup\!\!\!\!| & & \cup\!\!\!\!| \\ W & \longrightarrow & [\det(Pr_{H_{S'}} \circ \mathfrak{X})] = \Delta_{S'}(W) \end{array}$$

が定義される。但右辺は $\chi(T) = p$ なる $T \in \mathcal{S}$ に対して，線形空間 $\mathbb{C}e^T = \mathbb{C} \bigwedge_{-\nu \in N^c} e_{\sigma(-\nu)}$ の直積を考え，その射影直線全体を表わしている。

2. 自由フェルミオンのフォック空間

$$e^S = \bigwedge_{-\nu \in N_\alpha^c} e_{\sigma(-\nu)}, \quad S \in \mathcal{S}$$

とおく。但し

$\sigma : N_\alpha^c \longrightarrow N^c \oplus N$ 単調増加, $\sigma(-\nu) = \nu$ for $\nu \gg 0$ で, $\alpha = \alpha(p)$, $p = \chi(S)$, また外積は $\mu < \lambda$ なる μ, λ に対し, $\cdots \wedge e_\lambda \wedge \cdots \wedge e_\mu \wedge \cdots$ となるようにとる。

charge p のフォック空間 $\mathcal{F}_p$ を

$$\mathcal{F}_p = \prod_{\substack{S \in \mathcal{S} \\ \chi(S) = p}} \mathbb{C} e^S ,$$

また

$$\mathcal{F} = \bigoplus_p \mathcal{F}_p$$

と定義する。同様に

$$\bar{e}^S = \bigwedge_{-\nu \in N_\alpha^c} e_{-\sigma(-\nu)}, \quad \alpha = \alpha(p)$$

により, conjugate Fock 空間

$$\bar{\mathcal{F}}_p = \bigoplus_{\substack{S \in \mathcal{S} \\ \chi(S) = p}} \mathbb{C} \bar{e}^S$$

$$\bar{\mathcal{F}} = \bigoplus_p \bar{\mathcal{F}}_p$$

を定義する.

multi index α に対し, それが表わすエネルギー状態

$|\alpha\rangle$ を

$$|\alpha\rangle = \bigwedge_{\nu \leq \alpha} e_\nu \in \mathcal{F}$$

として定め，同じく共役状態 $\langle\alpha|$ を

$$\langle\alpha| = \bigwedge_{\nu \geq \alpha} e_\nu \in \overline{\mathcal{F}}$$

で定める。

フォック空間 $\mathcal{F}$, $\overline{\mathcal{F}}$ 上に状態の生成・消滅をあらわす演算子を導入しよう。記号は各著者，数学者，物理学者まちまちなので，ここでは西島"場の理論" Bjorken "Quantum Field Theory" に合わせた。

まず $\mathcal{F}$ 上の inner derivation by e_ν, $\nu \in N^c \oplus N$, を次のように定義する：

$f \in K$ に対しては $D_\nu f = \int_B e_\nu(x) f(x)\, d\sigma(x)$,

として，$\varphi, \psi \in \wedge K$ に対しては，

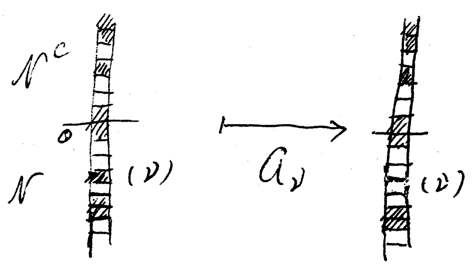
$\nu \in N$ なら，$D_\nu(\varphi \wedge \psi) = D_\nu\varphi \wedge \psi + (-1)^{\deg\varphi} \varphi \wedge D_\nu\psi$,

$\nu \in N^c$ なら，$D_\nu(\varphi \wedge \psi) = \varphi \wedge D_\nu\psi + (-1)^{\deg\psi} D_\nu\varphi \wedge \psi$,

により定義を延長する.

(i) 正エネルギー状態の消滅 a_ν, $\nu \in N$：

$$a_\nu e^S = D_{-\nu} e^S,$$

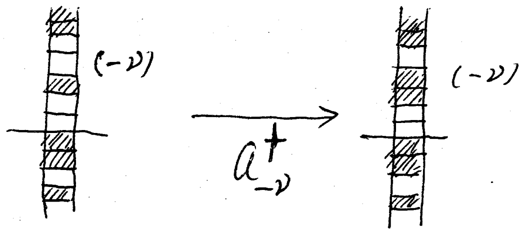


したがって $\nu \notin S$ なら

$a_\nu e^S = 0$

(ii) 負エネルギー状態の生成 $a^{\dagger}_{-\nu}$, $-\nu \in \mathcal{N}^c$:

$$a^{\dagger}_{-\nu} e^{S} = e_{-\nu} \wedge e^{S} .$$



$; = 0$ if $-\nu \in S$.

($a^{\dagger}_{-\nu} = b_{\nu}$ とも書く)

(iii) 正エネルギー状態の生成 $a^{\dagger}_{\nu}$, $\nu \in \mathcal{N}$:

$$a^{\dagger}_{\nu} e^{S} = e_{\nu} \wedge e^{S}$$

(iv) 負エネルギー状態の消滅 $a_{-\nu}$, $-\nu \in \mathcal{N}^c$

$$a_{-\nu} e^{S} = D_{\nu} e^{S} ,$$

($a_{-\nu} = b^{\dagger}_{\nu}$ とも書く)

命題 (i) $S \in \mathcal{S}$ に対し十分大きな $\nu > {}^{\exists}\nu_0(S)$
については $a_{\nu} e^{S} = a^{\dagger}_{-\nu} e^{S} = 0$,

(ii) $[A, B]_{+} = A \cdot B + B \cdot A$ として,

$$[a_{\nu}, a_{\mu}]_{+} = [a_{\nu}, a_{-\mu}]_{+} = 0$$

$$[a^{\dagger}_{\nu}, a^{\dagger}_{\mu}]_{+} = [a^{\dagger}_{\nu}, a^{\dagger}_{-\mu}]_{+} = 0$$

$$[a_{\nu}, a^{\dagger}_{\mu}]_{+} = [a_{-\nu}, a^{\dagger}_{-\mu}]_{+} = \delta_{\nu,\mu}$$

$$[a_{\nu}, a^{\dagger}_{-\mu}]_{+} = [a_{-\nu}, a^{\dagger}_{\mu}]_{+} = 0 .$$

自由フェルミオン空間とは線形空間

$$V = V_{ann} \oplus V_{cr}$$

$$V_{ann} = \bigoplus_{\nu} \mathbb{C} a_{\nu} \oplus \bigoplus_{\mu} \mathbb{C} a_{-\mu}^{\dagger}$$

$$V_{cr} = \bigoplus_{\mu} \mathbb{C} a_{\mu}^{\dagger} \oplus \bigoplus_{\nu} \mathbb{C} a_{-\nu}$$

のことをいう。 $\mathcal{A}$ を a_{ν}, $a_{\nu}^{\dagger}$, $a_{-\nu}$, $a_{-\nu}^{\dagger}$, $\nu \in N$, が生成するクリフォード環とするとき $\mathcal{A}$ の左イデアル $\mathcal{A}V_{ann}$ による $\mathcal{A}$ の商と, フォック空間 $\mathcal{F}$ とは左 $\mathcal{A}$-module として同型になる。同じく

$$V_{cr}\mathcal{A} \backslash \mathcal{A} \simeq \overline{\mathcal{F}} \quad (\text{右 } \mathcal{A}\text{-加群として}).$$

この同型で

$$\mathcal{A}/\mathcal{A}V_{ann} \ni 1 + \mathcal{A}V_{ann} \longmapsto |0\rangle \in \mathcal{F}$$

$$V_{cr}\mathcal{A} \backslash \mathcal{A} \ni 1 + V_{cr}\mathcal{A} \longmapsto \langle 0| \in \overline{\mathcal{F}}$$

と対応している。

真空期待値 $\mathcal{F} \times_{\mathcal{A}} \mathcal{F} \ni \langle 0|a \otimes b|0\rangle \to \langle ab\rangle \in \mathbb{C}$ の定義もふつうに Wick の定理を用いてなされる。

$$a_{\nu}|0\rangle = a_{-\nu}^{\dagger}|0\rangle = 0,$$

$$\langle 0|a_{\nu}^{\dagger} = \langle 0|a_{-\nu} = 0,$$

がすぐわかる。

4節で current algebra を議論するが，これらが Lie 代数 A の subLie algebra であると言うのではばく然としているので，(生成・消滅)から生成され，第二量子化を考えるにちょうどよいくらいの Lie 代数を導入しておく．

$$\mathfrak{g}' = \left\{ X = \sum_{\nu,\mu\in N} \left(f_{\nu,\mu} a^\dagger_\nu a_\mu + f_{\nu,-\mu} a^\dagger_\nu a_{-\mu} + f_{-\nu,\mu} a^\dagger_{-\nu} a_\mu - f_{-\nu,-\mu} a_\mu a^\dagger_{-\nu} \right) \right.$$

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ such that}$$

$$\text{1) } f_{\nu,\mu} = f_{-\nu,-\mu} = 0 \text{ for } ||\nu| - |\mu|| > \varepsilon,$$

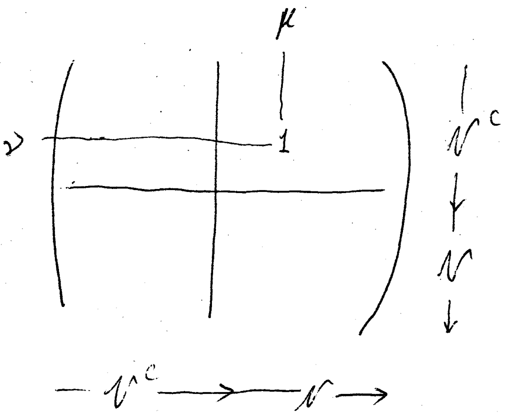
$$\left. \text{2) } f_{\nu,-\mu} = f_{-\nu,\mu} = 0 \text{ for } |\nu| + |\mu| > \varepsilon \right\}$$

線形空間

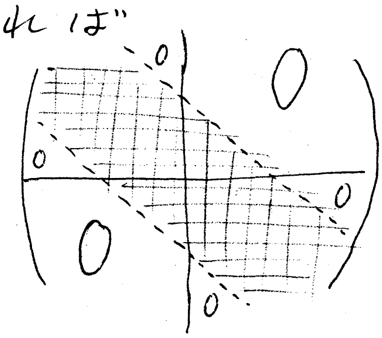
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathbb{C}\mathbb{1}$$

に次の交換関係を持っており，$\mathbb{1}$ が central element になる．

$$\begin{aligned}
[X, X'] = \sum_{\nu,\mu} \Big\{ & \sum_i \left(f_{\nu,i} f'_{i,\mu} - f_{i,\mu} f'_{\nu,i} + f_{\nu,-i} f'_{-i,\mu} - f_{-i,\mu} f'_{\nu,-i} \right) a^\dagger_\nu a_\mu + \sum_i \left(f_{\nu,i} f'_{i,-\mu} - f'_{\nu,i} f_{i,-\mu} \right. \\
& \left. + f_{\nu,-i} f'_{-i,-\mu} - f_{-i,-\mu} f'_{\nu,-i} \right) a^\dagger_\nu a_{-\mu} \\
& + \sum_i \left(f'_{i,\mu} f_{-\nu,i} - f_{i,\mu} f'_{-\nu,i} + f_{-\nu,-i} f'_{-i,\mu} - f_{-i,\mu} f'_{-\nu,-i} \right) a^\dagger_{-\nu} a_\mu \\
& + \sum_i \left(f_{i,-\mu} f'_{-\nu,i} - f_{-\nu,i} f'_{i,-\mu} + f_{-i,-\mu} f'_{-\nu,-i} - f_{-\nu,-i} f'_{-i,-\mu} \right) a_{-\mu} a^\dagger_{-\nu} \Big\} \\
& + \sum_{\nu,\mu} \left(f_{-\mu,\nu} f'_{\nu,-\mu} - f_{\nu,-\mu} f'_{-\mu,\nu} \right) \cdot \mathbb{1}
\end{aligned}$$

$\mathfrak{g}' \ni$  $= a^{\dagger}_{-\nu} a_{\mu}$

等と考えれば

$\mathfrak{g}' \ni$  $= X$ 。

$\mathfrak{g}$ の highest weight 表現を考えたい。

3. $Map(S^{2n-1}, GL(K^r))$ の $Gr(K^n)$ への作用

（$r=1$ として解説，一般性を失なわない）

3.1. 筆者は「強擬凸領域上の境界までこめて連続な正則函数の全体の空間の双対空間」を以前に記述した。その結果を $\mathbb{C}^n$ の単位球 $\{|z|<1\}$ の場合に，また L^2-境界値として，述べると次のようになる。

$\hat{D} = \{ w \in \mathbb{C}^n : 1 + w \cdot z \neq 0 \quad \forall z \ |z| \leq 1 \} = \{|w|<1\}$

を $D = \{ |z| < 1 \}$ の dual domain とする。

$$\gamma : \mathbb{C}^n - D \longrightarrow \overline{\hat{D}} - \{0\}$$
$$\begin{array}{ccc} \psi & & \psi \\ z & \longmapsto & w = \gamma(z) = -\dfrac{\bar{z}}{|z|^2} \end{array}$$

なる C^∞-対応がある。とくに $B = \{|z| = 1\}$ に制限して

$\gamma | B ;\ B \longmapsto \hat{B} = \{|w| = 1\}$ は 1 対 1 な C^∞ 写像となる。$\gamma|B$ による $\overline{D}$ と $\overline{\hat{D}}$ の patching を M とする；$M = \overline{D} \sqcup_\gamma \overline{\hat{D}}$，（$C^\infty$-多様体）。

$A_{L^2}(D) = \{h :\ D$ で正則, B に L^2-境界値をもつ$\}$

$A_{L^2}(\hat{D}) = \{h :\ \hat{D}$ で正則, $\hat{B}$ に L^2-境界値をもつ$\}$

とおく。各々に対するコーシー積分表現は,

$$h(z) = \int_B (1 - \bar{x} \cdot z)^{-n} h(x)\, \sigma(dx), \quad h \in A_{L^2}(D),\ z \in D$$

$$\hat{h}(w) = \int_B (1 + w \cdot x)^{-n} \hat{h}(-\bar{x})\, \sigma(dx), \quad \hat{h} \in A_{L^2}(\hat{D}),\ w \in \hat{D}$$

となる。また $f \in L^2(B)$ に対し D 及び $\hat{D}$ で正則な函数を与えるコーシー積分は次のよう；

$$Hf(z) = \int_B (1 - \bar{x} \cdot z)^{-n} f(x)\, \sigma(dx), \quad z \in D,$$

$$\hat{H}f(w) = \int_B (1 + w \cdot x)^{-n} f(x)\, \sigma(dx), \quad w \in \hat{D}.$$

Plemelj theorem より Hf は $Hf \in A_{L^2}(D)$ へと拡張され，その $y \in B$ での境界値は,

$$Hf(y) = \frac{1}{2} f(y) + \int_{p.v.(y)} (1 - \overline{x} \cdot y)^{-n} f(x)\, \sigma(dx)$$

で与えられる。

また $\hat{H}f$ も拡張 $\hat{H}f \in A_{L^2}(\hat{D})$ を持ち，$y \in B$ での境界値は

$$\hat{H}f(y) = \frac{1}{2} f(y) + \int_{p.v.(y)} (1 - \overline{y} \cdot x)^{-n} f(x)\, \sigma(dx).$$

命題　pairing

$$\begin{array}{ccc} A_{L^2}(D) \times A_{L^2}(\hat{D}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \Psi & & \\ (h, \hat{h}) & \longmapsto & \int_B h(x) \hat{h}(-\overline{x})\, \sigma(dx) \end{array}$$

により，$A_{L^2}(D)$ の双対空間と $A_{L^2}(\hat{D})$ は線形同型。

命題

$$A_{L^2}(D) \cong H_+, \qquad A_{L^2}(\hat{D}) \cong H_\ominus$$

また

$f \longmapsto Hf|B$，　$f \longmapsto \hat{H}f|B$　はそれぞれ $L^2(B)$ より H_+，$H_\ominus$ への射影を与える。

3.2，Segal にしたがい

$$GL_{res}(K^r) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{array}{c} (H_-)^r \\ \oplus \\ (H_+)^r \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} (H_-)^n \\ \oplus \\ (H_+)^r \end{array} \text{ 可逆} \right.$$
$$\left. \text{で，} a, d \text{ はフレドホルム作用素，} b, c \text{ はコンパクト作用素} \right\}$$

とおく。

$f \in C^\infty(B,\ GL(r, \mathbb{C}))$ に対して

$$M(f) = \begin{pmatrix} \hat{H}\cdot f\cdot\hat{H}, & \hat{H}\cdot f\cdot H \\ H\cdot f\cdot\hat{H}, & H\cdot f\cdot H \end{pmatrix} : \begin{matrix}(H_-)^r \\ \oplus \\ (H_+)^r\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}(H_-)^r \\ \oplus \\ (H_+)^r\end{matrix}$$

と定義する. $H\cdot f\cdot H$ はテプリッツ作用素として知られている。

命題　$M(f) \in GL_{res}(K^r)$

さらに, $\hat{H}\cdot f\cdot H$, $H\cdot f\cdot\hat{H}$ は trace class,

(証明と例とが同時に与えられる, $r = 1$)

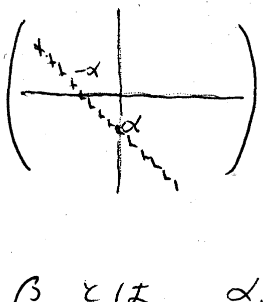
Ex. 1, $f(x) = c_\alpha x^\alpha$ のとき $M(f) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$

は,

$$a_{-(\nu-\alpha),-\nu} = \begin{cases} \binom{\nu}{\alpha}^{1/2}\binom{n+|\nu|-1}{n+|\alpha|-1}^{-1/2} & \text{if } \nu \supset \alpha \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$c_{(\alpha-\nu),-\nu} = \begin{cases} \binom{\alpha}{\nu}^{1/2}\binom{n+|\alpha|-1}{n+|\nu|-1}^{-1/2} & \text{if } \alpha \supset \nu \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$d_{(\alpha+\nu),\nu} = \begin{cases} \binom{\nu+\alpha}{\nu}^{1/2}\binom{n+|\nu|+|\alpha|-1}{n+|\nu|-1}^{-1/2} \\ 0 \end{cases}$$



,

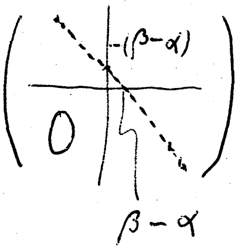
但 $\alpha \supset \beta$ とは $\alpha_i \geqq \beta_i \quad \forall 1 \leq i \leq n$.

Ex. 2. $f(z,\bar z) = c_\alpha z^\alpha \cdot c_\beta \bar z^\beta$, $\alpha < \beta$ のとき

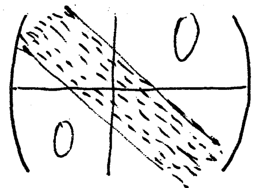
$$M(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$a_{-(\beta-\alpha+\nu),-\nu} = \binom{\nu+\beta}{\beta}^{1/2}\binom{n+|\beta|+|\nu|-1}{n+|\beta|-1}^{-\frac{1}{2}}\binom{\nu+\beta}{\alpha}^{1/2}\binom{n+|\beta|+|\nu|-1}{n+|\alpha|-1}^{-\frac{1}{2}}$$

etc で

$M(f) =$ 

Ex 3 $f(z,\bar z) =$ z と $\bar z$ の多項式

$M(f) =$  $\in \mathfrak{g}$

Example 3 と Weierstrass の多項式近似定理より Proposition がしたがう。

4 カレント代数

4.1. フェルミ作用素を次の形式的ローラン級数で定義.

$$\psi(z) = \psi_+(z) + \psi_-(z) = \sum_{\nu\in N} a_\nu(c_\nu z^\nu) + \sum_{-\nu\in N^c} a_{-\nu}(c_\nu \bar z^\nu)$$

$$\psi^\dagger(w) = \psi^\dagger_+(w) + \psi^\dagger_-(w) = \sum_{-\nu\in N^c} a^\dagger_{-\nu}(c_\nu \bar w^\nu) + \sum_{\nu\in N} a^\dagger_\nu(c_\nu w^\nu),$$

ここに $z \in \bar D$, $w \in \overline{\hat D}$ 。

命題 4.1. $z \in \overline{D}$, $w \in \overline{\hat{D}}$ に対し,

$$\langle \psi(z)\psi^\dagger(w)\rangle = \langle \psi_+(z)\psi_-^\dagger(w)\rangle = (1+z\cdot w)^{-n},$$

$$\langle \psi^\dagger(w)\psi(z)\rangle = \langle \psi_+^\dagger(w)\psi_-(z)\rangle = (1+\bar{z}\cdot\bar{w})^{-n},$$

とくに $z \in \overline{D}$, $y \in B$ に対して

$$\langle \psi(z)\psi^\dagger(-\bar{y})\rangle = (1-z\cdot\bar{y})^{-n}. \quad \text{Cauchy 核.}$$

となる。

$$\langle 0|\psi_-(z) = 0 \qquad \langle 0|\psi_-^\dagger(w) = 0$$

$$\psi_+(z)|0\rangle = 0 \qquad \psi_+^\dagger(w)|0\rangle = 0$$

4.2.

カレント作用素を, $\alpha \in \mathcal{N}$ に対し,

$$J_\alpha = \int_B c_\alpha z^\alpha : \psi(z)\psi^\dagger(-\bar{z}) : \sigma(dz),$$

$$J_{-\alpha} = \int_B c_\alpha \bar{z}^\alpha : \psi(z)\psi^\dagger(-\bar{z}) : \sigma(dz),$$

と定義する.

一般に $f \in C^\infty(B)$ に対し

$$J_f = \int_B f(z) : \psi(z)\psi^\dagger(-\bar{z}) : \sigma(dz)$$

と定める. ここに : : は renormalization を示す。

命題 4.2.

$$J_\alpha = -\sum_{\nu\in\mathcal{N}} a^\dagger_{\alpha+\nu} a_\nu + \sum_{0\neq\nu\subset\alpha} a_{-\nu} a^\dagger_{\alpha-\nu} + \sum_{\alpha \subsetneq \nu} a_{-\nu} a^\dagger_{-(\nu-\alpha)},$$

$$J_{-\alpha} = -\sum_{\nu\in N} a_\nu^\dagger a_{\alpha+\nu} + \sum_{0\neq\nu\subset\alpha} a_{\alpha-\nu} a_{-\nu}^\dagger + \sum_{0\neq\nu\in N} a_{-\nu} a_{-(\alpha+\nu)}^\dagger$$

命題 4.3.　$z \in B$.

(1) $[J_\alpha, \psi(z)] = M(z^\alpha)\psi(z)$

但 $M(z^\alpha)$ の作用は §3 より従うもので

$$M(z^\alpha)\psi(z) = \sum_{\nu\supsetneq\alpha} a_{-\nu} \bar{z}^{\nu-\alpha} + \sum_{\nu\subset\alpha} a_{-\nu} z^{\alpha-\nu} + \sum a_\nu z^{\alpha+\nu}$$

(2)

$$[J_{-\alpha}, \psi(z)] = M(\bar{z}^\alpha)\psi(z),$$

$$M(\bar{z}^\alpha)\psi(z) = \sum a_{-\nu} \bar{z}^{\nu+\alpha} + \sum_{\nu\subset\alpha} a_\nu \bar{z}^{\alpha-\nu} + \sum_{\nu\supsetneq\alpha} a_\nu z^{\nu-\alpha}$$

(3) $[J_\alpha, \psi^\dagger(-z)] = -M(z^\alpha)\psi^\dagger(-z)$

$$M(z^\alpha)\psi^\dagger(-z) = -\sum a_{\nu+\alpha}^\dagger \bar{z}^\nu - \sum a_{-\nu}^\dagger z^{\nu+\alpha} - \sum_{\nu\subset\alpha} a_\nu^\dagger z^{\alpha-\nu}$$

(4) $[J_{-\alpha}, \psi^\dagger(-z)] = -M(\bar{z}^\alpha)\psi^\dagger(-z)$

$$M(\bar{z}^\alpha)\psi^\dagger(-z) = \sum a_\nu^\dagger \bar{z}^{\nu+\alpha} + \sum_{\nu\subset\alpha} a_{-\nu}^\dagger \bar{z}^{\alpha-\nu} + \sum a_{-\nu}^\dagger z^{\nu-\alpha}$$

以上は，ふつうの計算で示される．

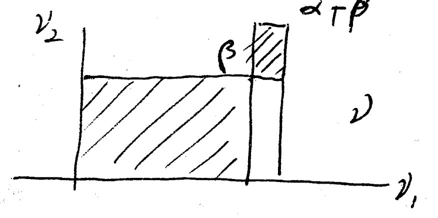
次に交換関係を述べる．

命題 4.4.

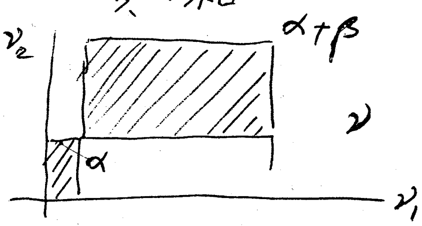
$$[J_\alpha, J_\beta] = \Big(\sum_{\nu\subset\beta} + \sum_{\beta\subset\nu\subset\alpha+\beta}\Big) a^\dagger_{\alpha+\beta-\nu}\, a_{-\nu}$$

$$- \Big(\sum_{\nu\subset\alpha} + \sum_{\alpha\subset\nu\subset\alpha+\beta}\Big) a^\dagger_{\alpha+\beta-\nu}\, a_{-\nu}$$

第一項の和



第二項の和



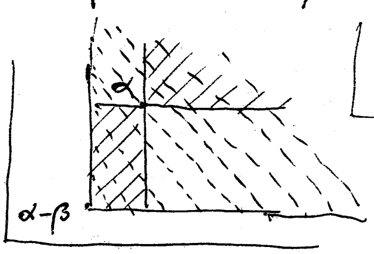
$$[J_{-\alpha}, J_{-\beta}] = \Big(\sum_{\nu\subset\alpha} + \sum_{\alpha\subset\nu\subset\alpha+\beta}\Big) a^\dagger_{-\nu}\, a_{\alpha+\beta-\nu}$$

$$- \Big(\sum_{\nu\subset\beta} + \sum_{\beta\subset\nu\subset\alpha+\beta}\Big) a^\dagger_{-\nu}\, a_{\alpha+\beta-\nu}$$

$$[J_\alpha, J_{-\beta}]$$

$$= \Big(\sum_{\nu\supset\alpha} + \sum_{\alpha\supset\nu\supset\alpha-\beta} - \sum_{\nu\supset\alpha-\beta}\Big) a^\dagger_{\nu}\, a_{\nu+\beta-\alpha}$$

$$+ \Big(\sum_{\nu\supset\beta} + \sum_{\beta\supset\nu\supset\beta-\alpha} - \sum_{\nu\supset\beta-\alpha}\Big) a_{-(\alpha-\beta+\nu)}\, a^\dagger_{-\nu}$$



$$- \delta_{\alpha,\beta}\, \#\{\nu : 0\subset\nu\subset\alpha\}$$

第一項の $\sum$ のとり方：（実線部－点線部）

1次元の current algebra は良く知られているように，交換関係

$[J_m, J_n] = [J_{-m}, J_{-n}] = 0$

$[J_m, J_{-n}] = -\delta_{m,n} \cdot n$

を満足する．同様の交換関係を得るには，Lie環 $\mathfrak{g}$ を商をとらねばならない．

元 $a^\dagger_{\alpha-\nu} a_{-\nu} - a^\dagger_\nu a_{-(\alpha-\nu)}$

$a^\dagger_{\alpha-\nu} a_{\alpha+\beta-\nu} - a^\dagger_\nu a_{\nu+\beta}$ $\quad , \alpha > \nu \in \mathbb{N}$.

$a^\dagger_{-(\alpha-\nu)} a_{-(\alpha+\beta-\nu)} - a^\dagger_{-\nu} a_{-(\nu+\beta)}$

$a^\dagger_{-\nu} a_{\alpha-\nu} - a^\dagger_{-(\alpha-\nu)} a_\nu$

は $\mathfrak{g}$ の center に属す．これらが生成する部分空間を $\mathcal{J} \subset Z(\mathfrak{g})$ とする．

$$Q = \mathfrak{g}/\mathcal{J}$$

とおく．Q に induce される Lie bracket を $[\ ,\ ]_Q$ と書く．

命題 4.4.

$[J_\alpha, J_\beta]_Q = 0$．$\quad [J_{-\alpha}, J_{-\beta}]_Q = 0$

$[J_\alpha, J_{-\beta}]_Q = -\delta_{\alpha,\beta} \# \{\nu \in \mathbb{N} \quad \nu < \alpha\}$

証明．一行目は $\mathcal{J} \subset Z(\mathfrak{g})$ の定義より。

2行目は $\forall |\xi\rangle \in \mathcal{F}$ に対し $a_\nu |\xi\rangle = 0$ for large ν を使ってわかる．

命題 4.5.

(1) $\forall |\xi\rangle \in \mathcal{F}$ に対し 十分大きく α をとれば

$$J_\alpha^\dagger |\xi\rangle = \langle\xi| J_\alpha = 0$$

(2) $\{ t_\nu , \nu \in \mathcal{N} \} \subset \mathbb{R}$ に対し

$\sum t_\nu J_\nu$, $\sum t_\nu J_{-\nu}$ は well def'ed

(3)

$\exp(\sum_\nu t_\nu J_\nu)$ well def'ed で

$$e^{\sum t_\nu J_\nu} \cdot \psi(z) \cdot e^{-\sum t_\nu J_\nu} = e^{\sum t_\nu M(z^\nu)} \psi(z)$$

が成立。