数理解析研究所講究録
第 694 巻 1989 年 40-62


# SKP hierarchy と OSp-SKP hierarchy について

都立大理 池田薫 (Kaoru. Ikeda)

## §0. 序文

KP hierarchy は普遍 Grassmann 多様体 (UGM) 上の力学系とみなすことができ，UGM 上の各 frame は初期データとして KP hierarchy の解をパラメトライズする [5]。 この picture は SKP hierarchy にもあてはまる [8], [9]。 SKP hierarchy とは反可換な変数を導入した函数体"超場" (super field) 上への KP hierarchy の自然な拡張である [3], [4], [10], [11] [13]。 SKP hierarchy には普遍超 Grassmann 多様体 (USGM) が対応する。

さて KP hierarchy において無限個ある時間変数のうち偶数番目の変数を 0 とおく。 さらに解となる擬微分作用素 "W" に対して $\partial_x^{-1} W^* \partial_x = W^{-1}$, ただし $*$ は formal adjoint とする，なる対称性を課す。 こうして得た hierarchy を BKP hierarchy [1] という。 BKP hierarchy の対称性 ($\partial_x^{-1} W^* \partial_x = W^{-1}$) はその初期データである UGM 上の frame の条件におきかえられる。

それはframeの各タテベクトルがみたす2次の関係式である。逆にそのような条件をみたすUGM上のframeからBKP hierarchyを構成することができる。条件 $\partial_x^{-1} W^* \partial_x = W^{-1}$ は無限次元Lie群 $O(\infty)$ に関する対称性であることがわかる。以上の議論をsuper化する。$O(\infty)$ にあたるものはLie super群 $OSp(\mathcal{S})$, ただし $\mathcal{S}$ は超場あらわすものとする, でありBKP hierarchyにあたるものは表題のOSp-SKP hierarchyである。

この小論は筆者が最近上野喜三雄氏(早大理工), 山田裕史氏(都立大理)の3人で行った仕事[12]の一部の紹介である。[12]ではSKP hierarchyの双線形留数公式や多重ソリトン解の構成についても述べられているがそれらの事項に関してはすでに上野氏の詳しい解説[8],[9]があるのでそちらを参照していただきたい。以下この稿の構成を述べる。§1において我々はBKP hierarchyについてやや詳しく論じる。この稿の主目的はOSp-SKP hierarchyの紹介にあるのだが, BKP hierarchyの話しはOSp-SKP hierarchyの議論の基礎になること, いきなりsuperからはじめると記号の複雑さ等により話しの本筋が見えにくくなることなどからこのようにした。ここでは擬微分作用素環の2×2行列への表現を考え, BKP-hierarchyの解になるoperator $W$ への条件 $\partial_x^{-1} W^* \partial_x = W^{-1}$ が $O(\infty)$ に関する対称性の条件に他ならないことを示す。さら

に $O(\infty)$ の対称性を BKP hierarchy の解の初期データにあたる UGM 上の frame の条件として書き直す。この条件は"frame の各タテベクトルが2次の内積に関し isotropic である"ということがわかる。逆にこのような条件をみたす UGM 上の frame から Grassmann 方程式を通じ構成される operator が BKP hierarchy の解となることも示す。§2では初めにいくつかの代数的概念を定義ししかる後に Lie super 群 $OSp(\infty)$ を導入し、それから $OSp$-SKP hierarchy について述べる。§2における議論は§1とパラレルに進めていくことが出来るため細かい証明には立ち入らず主に結果のみ記したが、議論を進めて行く上で super 特有の難点があらわれるところにはその都度注を付した。

最後に我々がこの小論で UGM(USGM) といっているのは UGM(USGM) 全体ではなくその稠密な胞体 $UGM^{\phi}$($USGM^{\phi}$) にあたるものである。この小論における議論を $UGM^{\phi}$ ($USGM^{\phi}$) から UGM(USGM) 全体へ拡張することは(その難易は別として)今後の課題となろう。

## §1 BKP hierarchy について。

$k$を標数0の体とし，$\mathcal{K}=k[[x]]$を$k$上の$x$に関する形式的巾級数環とする。微分作用素環$\mathcal{D}$，擬微分作用素環$\mathcal{E}$を次で定義する。

$$\mathcal{D}=\left\{ P=\sum_{0\le j<+\infty} a_j(x)\partial_x^j \;\middle|\; a_j(x)\in\mathcal{K} \quad a_j(x)=0 \text{ for } j>>0 \right\}$$

$$\mathcal{E}=\left\{ P=\sum_{-\infty<j<+\infty} a_j(x)\partial_x^j \;\middle|\; a_j(x)\in\mathcal{K},\ a_j(x)=0 \text{ for } j>>0 \right\}。$$

さて$t=(t_1,t_2,t_3,\cdots)$を無限個の時間変数として$\mathcal{K}$係数の$t$に関する形式的巾級数環$\mathcal{K}[[t]]$をあらためて$\mathcal{K}$と書く。KP hierarchyのSato方程式とは次のものである。

$$\frac{\partial W}{\partial t_n}=B_nW-W\partial_x^n \qquad n=1,2,\cdots \qquad (1.1)$$

但し$W=\sum_{j=0}^{\infty} w_j(x,t)\partial_x^{-j}$，$w_j(x,t)\in\mathcal{K}$，$w_0(x,t)=1$で

$B_n=(W\partial_x^n W^{-1})_+$。

このとき$W$をKP hierarchyのwave operatorという。以後$\mathcal{D}$，$\mathcal{E}$の係数には時間変数$t$が含まれているものとする。$\mathcal{E}$から$Mat(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\mathcal{K})$への写像$\phi$を以下のように定義する。

$P\in\mathcal{E}$に対して　$\phi(P)=(\phi(P)_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$

ただし　$\partial_x^i P = \sum_j \phi(P)_{ij} \partial_x^j$　。

<u>Fact 1</u>　$\phi$ は積を保存する。すなわち $P, Q \in \mathcal{E}$ に対し　$\phi(PQ) = \phi(P)\phi(Q)$。

<u>証明</u>　$\partial_x^i PQ = \sum_j \phi(PQ)_{ij} \partial_x^j$，一方．$\partial_x^i PQ = (\partial_x^i P)Q$

$$= \sum_k \phi(P)_{ik} \partial_x^k Q = \sum_k \phi(P)_{ik} \sum_j \phi(Q)_{kj} \partial_x^j$$

$$= \sum_j \Big( \sum_k \phi(P)_{ik} \phi(Q)_{kj} \Big) \partial_x^j \qquad \therefore\ \phi(PQ) = \phi(P)\phi(Q)。//$$

$W$ を KP hierarchy の wave operator とすると $\phi(W^{-1})|_{x=t=0}\, \Xi_\phi$ は UGM 上の frame となる。ただし $\Xi_\phi = (\delta_{ij})_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ j \in N^c}}$　。　よって KP hierarchy の wave operator は UGM 上の frame を定める。逆の対応として

<u>命題2</u>　$\Xi$ を UGM 上の frame とする。$\vec{w} = (\overset{\cdots\ -2}{\cdots\, w_2},\, \overset{-1}{w_1},\, \overset{0}{1}, 0 \cdots)$，$w_j \in \mathcal{R}$ が次の方程式をみたすものとする

$$^t\vec{w}\, \exp\Big(x\Lambda + \sum_{j=1}^{\infty} t_j \Lambda^j\Big)\Xi = 0 \qquad 。 \qquad (1.2)$$

このとき　$W = \sum_{j=0}^{\infty} w_j \partial_x^{-j}$ は KP hierarchy の wave operator である。　ただし $\Lambda = (\delta_{i+1,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$　。

<u>証明</u>　方程式 (1.2) を Grassmann 方程式という。Grassmann

方程式に関する補題を述べる。

__補題 3__　$\Xi, \Xi'$ を UGM 上の frame とする。$\Xi, \Xi'$ に関する Grassmann 方程式が同じ解 ${}^t\vec{w} = (\cdots w_2\, w_1\, 1, 0 \cdots)$ をもつとする。つまり

$$ {}^t\vec{w} \exp(x\Lambda + \sum_{j=1}^{\infty} t_j \Lambda^j)\Xi = 0 $$

$$ {}^t\vec{w} \exp(x\Lambda + \sum_{j=1}^{\infty} t_j \Lambda^j)\Xi' = 0 \quad 。 $$

このとき，${}^\exists g \in GL(N^c)$ が存在して $\Xi = \Xi' g$。

__証明__　Grassmann 方程式 (1.2) に対し右から ${}^\exists g \in GL(N^c)$ をかけることにより次の方程式を得る。

$$ {}^t\vec{w} \exp(x\Lambda + \sum_{j=1}^{\infty} t_j \Lambda^j)\tilde{\Xi} = 0 \qquad (1.2)' $$

ただし $\tilde{\Xi} = (\tilde{\xi}_{ij})_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ j \in N^c}}$ であって $\tilde{\xi}_{ij} = \delta_{ij}$ for $i, j < 0$ 。 $(1.2)'$ において ${}^t\vec{w}$ に対して $\tilde{\Xi}$ が一意にさだまることをいえばよい。

$(1.2)'$ の両辺を $\partial_x$ に関し $n$ 回微分すると

$$ {}^t\vec{w}[n] \exp(x\Lambda + \sum_{j=1}^{\infty} t_j \Lambda^j)\tilde{\Xi} = 0 \qquad (1.3) $$

を得る。ただし ${}^t\vec{w}[n] = (\cdots\cdots \overset{n-2}{*}\ \overset{n-1}{*}\ \overset{n}{1}, 0\, 0 \cdots)$ なるものであり ${}^t\vec{w}$ より一意に定まる。(1.3) において $x = t = 0$ とおくと

$${}^t\vec{m}[n]|_{x=t=0}\,\tilde{\Xi} = 0 \tag{1.4}$$

となる。(1.4)より $\tilde{\xi}_{ij}$ は各 $j$ につき $i=1$ より順次定まる。∴ $\tilde{\Xi}$ は ${}^t\vec{m}$ に対し一意に定まる。補題の証明終る。//

さて (1.2) によりさだまる operator $W$ は次をみたす。

$$\Xi = \phi(W^{-1})|_{x=t=0}\,\Xi_\phi\, g \tag{1.5}$$

ただし $g$ は $GL(N^c)$ のある元。実際 $WW^{-1}=1$ より両辺の $\phi$ をとって $\phi(W)\phi(W^{-1}) = 1$ 。 (1.6)

ところで一般に $P\in\mathcal{E}$ とすると Leipniz の法則により

$\partial_x P = \frac{\partial P}{\partial x} + P\partial_x$. 両辺の $\phi$ をとると

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi(P) = \Lambda\phi(P) - \phi(P)\Lambda \tag{1.7}$$

を得る。方程式(1.7)を積分すると

$$\phi(P) = \exp(x\Lambda)\,\phi(P)|_{x=0}\exp(-x\Lambda) \tag{1.8}$$

を得る。$W_0 = W|_{t=0}$ とする。(1.5)及び(1.6)より

$$\phi(W_0)\exp(x\Lambda)\,\phi(W_0^{-1})|_{x=0}\exp(-x\Lambda) = 1 \tag{1.9}$$

(1.8)の両辺に右から $\Xi_\phi$ をかけて第0行目に注目すると。

$${}^t\vec{m}_0 \exp(x\Lambda)\,\phi(W_0^{-1})|_{x=0}\,\Xi_\phi = 0 \tag{1.10}$$

ただし ${}^t\vec{m}_0$ は $\phi(W_0)$ の第0行目で $\Lambda_{N^c} = (\delta_{i+1,j})_{i,j\in N^c}$ 。 さて (1.2) において $t=0$ とすると

$${}^t\vec{m}_0 \exp(x\Lambda)\,\Xi = 0 \tag{1.11}$$

を得る。 (1.10)と(1.11)を比較すると補題3より(1.5)を得る。
さて $\tilde{w}$ は(1.2)と同値なGrassmann方程式

$$\tilde{w}\exp\left(x\Lambda+\sum_{j=1}^{\infty}t_j\Lambda^j\right)\phi(W^{-1})\Big|_{x=t=0}\mathfrak{Z}_\phi=0 \qquad (1.12)$$

をみたす。 ところで $Y=W\exp\left(\sum_{j=1}^{\infty}t_j\partial_x^j\right)W_0^{-1}$ とおくと
(1.12)より $Y$ は $\partial_x$ に関し正巾のみのoperator ($\partial_x^0$ も含まれる) となり $Y|_{t=0}=1$ をみたす。 $U=W_0^{-1}$ とおくと $W, Y$ は

$$W^{-1}Y=\exp\left(\sum_{j=1}^{\infty}t_j\partial_x^j\right)U \qquad (1.13)$$

をみたす。 (1.13)は擬微分作用素の群に関するBirkhoff分解であり Birkhoff分解よりKP hierarchyが従うことは見易い (cf [4], [11])。

証終//

以上見てきたようにKP hierarchyとUGMは写像 $\phi$ 及びGrassmann方程式を通じ互いに対応している。 次にBKP hierarchyについて述べよう。 $\tilde{\mathcal{K}}$ を $\tilde{\mathcal{K}}=\mathcal{K}|_{t_2=t_4=\cdots=0}$ とおく。 BKP hierarchyとは

$$\begin{cases}\dfrac{\partial W}{\partial t_{2n+1}}=B_{2n+1}W-W\partial_x^{2n+1} & n=0,1,2,\cdots \qquad (1.14)\\[2ex] \partial_x^{-1}W^{*}\partial_x=W^{-1} & \qquad (1.15)\end{cases}$$

のことである。但し $W=\sum_{j=0}^{\infty} w_j \partial_x^{-j}$ で $w_0=1$, $w_j \in \tilde{\mathcal{K}}$ とし $*$ は formal adjoint とする。さて W を BKP hierarchy の wave operator としたとき $\phi(W^{-1})|_{x=\tilde{t}=0}\,\Xi_\phi$ は UGM 上の frame を定める。ただし $\tilde{t}=(t_1,t_3,t_5,\cdots)$。$\Xi=\phi(W^{-1})|_{x=\tilde{t}=0}\,\Xi_\phi$ とおいたとき W に関する条件 (1.15) は $\Xi$ に関してどのような条件としていいかえられるだろうか。逆にそのような条件があったとした時，その条件をみたす frame $\Xi$ から Grassmann 方程式によって定まる KP hierarchy ($t_1,t_3,t_5,\cdots$ に関する) の wave operator は (1.15) をみたすだろうか。

<u>命題 4</u>　$P\in\mathcal{E}$ に対して

$$\phi(P^*)={}^tK\,{}^t\phi(P)K$$

がなりたつ。但し $J=((-)^i\delta_{i,-j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ として $K=\Lambda J$ とする。

<u>証明</u>　$P=f\in\mathcal{K}$ とする。$\phi(f)_{ij}=\binom{i}{i-j}f^{(i-j)}$ である。ただし $\binom{k}{l}$ $k,l\in\mathbb{Z}$ は 2 項係数で $\binom{k}{l}=0$ $\forall\, l<0$ とする。一般に $A=(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ としたとき

$${}^tK\,{}^tAK=((-)^{i+j}a_{-j-1,-i-1})_{i,j\in\mathbb{Z}} \quad \text{であるから}$$

$${}^tK\,{}^t\phi(f)K=\left((-)^{i-j}\binom{-j-1}{i-j}f^{(i-j)}\right)_{i,j\in\mathbb{Z}}\,.$$

一方

$$\binom{-j-1}{i-j}=\frac{(-j-1)\cdot\cdots\cdots(-i)}{(i-j)!}=(-)^{i-j}\frac{i\cdots\cdots(j+1)}{(i-j)!}$$

$$= (-)^{i-j}\begin{pmatrix} i \\ i-j \end{pmatrix}。$$

$f^* = f$ より $P = f \in \mathcal{X}$ に対して命題の主張は正しい。 次に $P = \partial_x^n$ とすると $\phi(\partial_x^n) = \Lambda^n$ で ${}^tK\,{}^t\Lambda^n K = (-)^n\Lambda^n$。 一方 $(\partial_x^n)^* = (-)^n\partial_x^n$ より $P = \partial_x^n$ に対しても命題は正しい。 $P = f\partial_x^n$ とする。

$$ {}^tK\,{}^t\phi(f\partial_x^n)K = {}^tK\,{}^t\phi(\partial_x^n)K\,{}^tK\,{}^t\phi(f)\,K = \phi((\partial_x^n)^*)\phi(f^*)$$
$$= \phi((\partial_x^n)^* f^*) = \phi((f\partial_x^n)^*)。$$

以上のことより一般の $P \in \mathcal{E}$ に対しても命題の正当性は明らか。

証終 //

命題4により (1.15) の両辺の $\phi$ をとると

$$J\,{}^t\phi(W)J = \phi(W)^{-1} \quad . \tag{1.16}$$

これは $\phi(W)$ 無限次元直交 Lie 群 $O(\infty)$ [1], [7] に属していることを示している。 但し $O(\infty)$ とは次の Lie 群である。

$$O(\infty) = \{A \in GL(\infty) \mid J\,{}^tAJ = A^{-1}\} \quad 。$$

さて $\phi(W) \in O(\infty)$ より

$$J\,{}^t\phi(W^{-1})J\,\phi(W^{-1}) = 1 \tag{1.17}$$

$\Xi = (\xi_i)_{i<0} = \phi(W^{-1})|_{x=\bar{t}=0}\,\Xi_\phi$ とすると (1.17) より

$$\langle \vec{\xi}_i , \vec{\xi}_j \rangle_B = 0 \qquad i,j<0 \tag{1.18}$$

が成り立つ。ただし $\vec{f}=(f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, $\vec{g}=(g_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ としたとき

$\langle \vec{f},\vec{g} \rangle_B = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-)^i f_i g_{-i}$ とする。

さて一般に $\Xi=(\vec{\xi}_i)_{i<0}$ が (1.18) をみたしていたとする。すると $g\in GL(\mathbb{N}^c)$ に対して $\Xi g$ の各タテベクトルも (1.18) をみたす。(1.18) をみたす frame を isotropic frame ということにすると以上のことより isotropic frame という条件は UGM 上の条件としても well defined であることがわかる。isotropic frame よりなる UGM の部分集合を i-UGM と呼ぶ。いままでの議論から

"BKP hierarchy に対応する UGM の点は i-UGM の点である。"

を得る。

次に $\Xi\in$ i-UGM なる frame とする。このとき Grassmann 方程式

$$^t\vec{w}\exp(x\Lambda+\sum_{j=0}^{\infty}t_{2j+1}\Lambda^{2j+1})\,\Xi = 0 \tag{1.19}$$

より $\tilde{\xi}$ に関する KP hierarchy の wave operator $W$ を得る。このとき $W$ は BKP hierarchy の wave operator となるが, $W$ が (1.15) をみたすか否かを考察しよう。

<u>補題5</u>　Grassmann 方程式

$$^t\vec{w}_0\exp(x\Lambda)\,\Xi = 0 \tag{1.20}$$

の解 $^t\vec{w}_0$ より構成される wave operator を $W_0$ とする。このとき $\Xi\in$ i-UGM ならば $\phi(W_0^{-1})\,\Xi_\phi$ は isotropic frame となる。

証明　$W_0 W_0^{-1} = 1$ より両辺の$\phi$をとると $\phi(W_0)\phi(W_0^{-1}) = 1$.
ところで一般に $P \in \mathcal{E}$ に対してライプニッツ則

$$\partial_x P = \frac{\partial P}{\partial x} + P\partial_x$$

上式の両辺の$\phi$をとることにより

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi(P) = \Lambda\phi(P) - \phi(P)\Lambda$$

を得る。　この方程式を積分すると

$$\phi(P) = \exp(x\Lambda)\phi(P)|_{x=0}\exp(-x\Lambda)$$

を得る。　$\phi(W_0)\phi(W_0^{-1}) = 1$ に上式を適用すると

$$\phi(W_0)\exp(x\Lambda)\phi(W_0^{-1})|_{x=0}\exp(-x\Lambda) = 1 \qquad (1.21)$$

(1.21) の両辺に右から $\Xi_\phi$ をかけ その第0行目に注目すると Grassmann 方程式

$$\vec{w}_0 \exp(x\Lambda)\phi(W_0^{-1})|_{x=0}\Xi_\phi = 0 \qquad (1.22)$$

を得る。　補題3より $\exists g \in GL(\mathbb{N}^c)$ が存在して ((1.20) と比較して)

$$\phi(W_0^{-1})|_{x=0}\Xi_\phi = \Xi g$$

よって $\phi(W_0^{-1})|_{x=0}\Xi_\phi$ は isotropic であることがわかった。　よって

$$\exp(x\Lambda)\phi(W_0^{-1})|_{x=0}\Xi_\phi\exp(-x\Lambda_{\mathbb{N}^c}) \ : \text{isotropic}$$

$$\because \exp(x\Lambda) \in O(\infty)$$

$$= \exp(x\Lambda)\phi(W_0^{-1})|_{x=0}\exp(-x\Lambda)\Xi_\phi$$

$$= \phi(W_0^{-1})\Xi_\phi \quad : \text{isotropic}$$

ただし $\Lambda_{\mathbb{N}^c} = (\delta_{i+1,j})_{i,j<0}$ 。　これで補題5は示せた　証終 //

<u>補題6.</u> $P\in\mathcal{E}$ を0階monicなoperatorであるとする。このとき $\phi(P)\subset\Xi_\phi$ が isotropicなframeであるとすると $\phi(P)\in O(\infty)$。

<u>証明</u> $\phi(P)=(\vec{p}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ とすると $J^t\phi(P)J\phi(P)=(\langle\vec{p}_i,\vec{p}_j\rangle_B)_{i,j\in\mathbb{Z}}$。次がわかる。

$$(\star)\quad \langle\vec{p}_{-i},\vec{p}_j\rangle_B=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i<j\\ 0 & i>0,\ j<0\end{cases}\quad \begin{matrix}\text{; P が0階monic だから}\\ \\ \text{: isotropicなことより}\end{matrix}$$

$P=\sum_{j=0}^{\infty}p_j\partial_x^{-j}$ $p_0=1$ とすると

$$\langle\vec{p}_0,\vec{p}_{-1}\rangle_B=p_1-p_1=0\ .$$

又 $J^t\phi(P)J\phi(P)=\phi(\partial_x^{-1}P^*\partial_xP)$ であることから次の漸化式を得る。

$$\langle\vec{p}_0,\vec{p}_{j-1}\rangle_B=-\frac{\partial}{\partial x}\langle\vec{p}_0,\vec{p}_j\rangle_B+\langle\vec{p}_{-1},\vec{p}_j\rangle_B \quad (1.23)$$

$(\star)$ 及び $\langle\vec{p}_0,\vec{p}_{-1}\rangle_B=0$ より $j<0$ に対し $\langle\vec{p}_0,\vec{p}_j\rangle_B=0$ が(1.23)より結論できる。ところで

$$\partial_x^{-1}P^*\partial_xP=\sum_{j=0}^{\infty}\langle\vec{p}_0,\vec{p}_{-j}\rangle_B\,\partial_x^{-j}\quad\text{より}\quad \partial_x^{-1}P^*\partial_xP=1$$

$\therefore\ \phi(P)\in O(\infty)$ //

(1.19)よりさだまるwave operatorを $W$ とし $W_0=W|_{t=0}$ とすると補題5.6より

$$\partial_x^{-1}W_0^*\partial_x=W_0^{-1}\quad (1.24)$$

が成立する。これをもとに次の定理を得る。

<u>定理7</u>　Grassmann方程式 (1.19) において $\underset{\sim}{\xi} \in UGM$ が isotropicなframeであったとする。このとき $\tilde{\xi}$ から構成される wave operator $W$ は BKP hierarchy の wave operator である。

<u>証明</u>　$\partial_x^{-1} W^* \partial_x = W^{-1}$ を示せばよい。$W^*$ 及び $W^{-1}$ を $\tilde{t}$ に関して展開する。

$$W^* = \sum_\alpha (W^*)_\alpha \tilde{t}^\alpha \quad , \quad W^{-1} = \sum_\alpha (W^{-1})_\alpha \tilde{t}^\alpha$$

ただし $\alpha$ は多重指数で $\alpha = (\alpha_{2n+1})_{n \geq 0}$ とし有限個を除いて $0$ とする。$\tilde{t}^\alpha = t_1^{\alpha_1} t_3^{\alpha_3} \cdots t_{2n+1}^{\alpha_{2n+1}} \cdots$ とする。すべての多重指数 $\alpha$ について

$$\partial_x^{-1} (W^*)_\alpha \partial_x = (W^{-1})_\alpha \tag{1.25}$$

を示せばよい。$\alpha = (0, 0, \cdots)$ とした時 $(W^*)_\alpha = W_0^*$, $(W^{-1})_\alpha = W_0^{-1}$ であるから補題5.6より (1.25) は正しい。次に $\alpha = (1, 0, 0, \cdots)$ とする。$t_1$ に関する発展方程式

$$\frac{\partial W}{\partial t_1} = B_1 W - W \partial_x \tag{1.26}$$

において両辺の $*$ をとると

$$\frac{\partial W^*}{\partial t_1} = W^* B_1^* + \partial_x W^*$$

$$\therefore \quad (W^*)_{(1,0,0 \cdots)} = (W^*)_{(0,0,\cdots)} (B_1^*)_{(0,0,\cdots)} + \partial_x (W^*)_{(0,0,\cdots)}$$ を得る。

$(B_1)_{(0,0,\cdots)} = (W_0 \partial_x W_0^{-1})_+$ より $\partial_x^{-1} (B_1^*)_{(0,0,\cdots)} \partial_x = -(B_1)_{(0,0,\cdots)}$ がなりたつので

$$\partial_x^{-1} (W^*)_{(1,0,0,\cdots)} \partial_x = -(W^{-1})_{(0,0,\cdots)} (B_1)_{(0,0,\cdots)} + \partial_x (W^{-1})_{(0,0,\cdots)}$$

が成立する。一方 (1.26) より

$$\frac{\partial W^{-1}}{\partial t_1} = -W^{-1}B_1 + \partial_x W^{-1}$$

$$\therefore (W^{-1})_{(1,0,0\cdots)} = -(W^{-1})_{(0,0\cdots)}(B_1)_{(0,0,\cdots)} + \partial_x (W^{-1})_{(0,0,\cdots)} .$$

$\therefore \quad \partial_x^{-1}(W^*)_{(1,0,0,\cdots)}\partial_x = (W^{-1})_{(1,0,0,\cdots)}$ が成立する。

以下同様に $\alpha$ に関する帰納法で示せばよい。証終 //

この節を終るにあたって CKP hierarchy にも言及したい。CKP hierarchy とは $\tilde{\tau}$ に関する発展方程式系と wave operator に関する対称性の条件，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial t_{2n+1}} = B_{2n+1}W - W\partial_x^{2n+1} & n = 0, 1, 2, \cdots \\ W^* = W^{-1} \end{cases}$$

である。BKP hierarchy が リー群 $O(\infty)$ と関連していたのと同様 CKP hierarchy は無限次元 symplectic 群 $Sp(\infty)$ と関連している。$Sp(\infty)$ の作用で不変な内積は $\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle_c = \sum_i (-)^{i+1} f_i g_{-i-1}$, $\vec{f} = (f_i)$, $\vec{g} = (g_i)$ である。

## §2 OSp-SKP hierarchy について。

$A$ を無限もしくは有限次元の $k$ 上の Grassmann 代数とする。$\theta$ を odd な Grassmann 変数，$x$ を even な Grassmann 変数とし，$t = (t_1, t_2, \cdots)$ を無限個の時間変数とする。$t_{odd} = (t_1, t_3, \cdots)$ を odd な Grassmann 変数とし $t_{even} = (t_2, t_4, \cdots)$ を even な変数とする。$\mathcal{K} = k[[x, t_2, t_4, \cdots]]$ とし $\mathcal{S} = \mathcal{K}[[\theta, t_1, t_3, \cdots]] \otimes A$ とする。$\mathcal{S}$ に $\mathbb{Z}_2$-grade $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{S}_{\bar{1}}$ が入り超可換代数となる。$\mathcal{S}$ を超場

(super field) という。 $\mathcal{S}$ 上の微分作用素 $D$ を $D=\partial_\theta+\theta\partial_x$ で定義する。又 $\mathcal{S}$ 上の超ベクトル場を

$$\begin{cases} D_{2n}=\dfrac{\partial}{\partial t_{2n}} \\[2ex] D_{2n+1}=\dfrac{\partial}{\partial t_{2n+1}}+\displaystyle\sum_{k\geq 0} t_{2k+1}\dfrac{\partial}{\partial t_{2n+2k+2}} \end{cases}$$

で定義する。

<u>注意</u> $D^2=\partial_x$, $[D_{2n+1}, D_{2m+1}]_+=2D_{2n+2m+2}$ が成り立つ。

さて Super 擬微分作用素環 $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$ を次で定義する。

$$\mathcal{E}_{\mathcal{S}}=\{P=\sum_{-\infty<j<<+\infty} a_j D^j \mid a_j\in\mathcal{S}\}.$$

$\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$ には $\mathbb{Z}_2$-grade

$$\mathcal{E}_{\mathcal{S}}=\mathcal{E}_{\mathcal{S}_{\underline{0}}}\oplus\mathcal{E}_{\mathcal{S}_{\underline{1}}}$$

が入る。ただし

$$\mathcal{E}_{\mathcal{S}_{\underline{\mu}}}=\{P=\sum_{-\infty<j<<+\infty} a_j D^j \mid a_j\in\mathcal{S}_{\underline{j+\mu}}\}\quad \mu=0.1.\ 。$$

SKP hierarchy とは 0階 monic な operator $W\in\mathcal{E}_{\mathcal{S}_{\underline{0}}}$ に関する次の発展方程式系のことである。

$$D_n W=\varepsilon_n(B_n W-WD^n)\qquad n=1.2.3.\cdots$$

ただし $B_n=(WD^nW^{-1})_+$ で $\varepsilon_n=(-)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ とする。

さて $\tilde{\mathcal{S}}$ を $\tilde{\mathcal{S}}=\mathcal{S}|_{t_j=0\quad j\equiv 0,1(\mathrm{mod}\,4)}$ で定義する。$W$ を 0階 monic な $\mathcal{E}_{\tilde{\mathcal{S}}_{\underline{0}}}$ の元とする。OSp-SKP hierarchy は次のものである。

$$\begin{cases} D_n W = \mathcal{E}_n (B_n W - W D^n) & n \equiv 2, 3 \pmod 4 \quad (2.1) \\ D^{-1} W^* D = W^{-1} & (2.2) \end{cases}$$

ただし $P = aD^n$, $a \in \mathcal{S}_{\underline{j}}$ としたとき $P^* = (-)^{nj} \mathcal{E}_n D^n a$ とする。$P \in \mathcal{E}_{\mathcal{S}\underline{\mu}}$, $Q \in \mathcal{E}_{\mathcal{S}\underline{\nu}}$ としたとき $(PQ)^* = (-)^{\mu\nu} Q^* P^*$ が成立する。

さてこれから§1の内容をSuper化する。それに先立っていくつかの記号，代数的概念を定義しよう。

① $\quad Mat(\mathbb{Z}|\mathbb{Z}, \mathcal{S}) = \{(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}} \mid a_{ij} \in \mathcal{S}\}$

$Mat(\mathbb{Z}|\mathbb{Z}, \mathcal{S})$ には $\mathbb{Z}_2$-grade が入り $Mat(\mathbb{Z}|\mathbb{Z}, \mathcal{S}) = Mat(\mathbb{Z}|\mathbb{Z}, \mathcal{S})_{\underline{0}} \oplus Mat(\mathbb{Z}|\mathbb{Z}, \mathcal{S})_{\underline{1}}$ となり

$$Mat(\mathbb{Z}|\mathbb{Z}, \mathcal{S})_{\underline{\mu}} = \{(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}} \mid a_{ij} \in \mathcal{S}_{\underline{i+j+\mu}}\} \quad \mu = 0, 1$$

となる。

② $\quad SGL(\mathbb{Z}|\mathbb{Z}, \mathcal{S}) = \{A \in Mat(\mathbb{Z}|\mathbb{Z}, \mathcal{S})_{\underline{0}} \mid A は可逆．\}$

③ $A = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}} \in Mat(\mathbb{Z}|\mathbb{Z}, \mathcal{S})$ に対し $\check{A}$ で

$$\check{A} = \begin{bmatrix} (a_{ij})_{\substack{i \equiv 0 \pmod 2 \\ j \equiv 0 \pmod 2}} & (a_{ij})_{\substack{i \equiv 0 \pmod 2 \\ j \equiv 1 \pmod 2}} \\ (a_{ij})_{\substack{i \equiv 1 \pmod 2 \\ j \equiv 0 \pmod 2}} & (a_{ij})_{\substack{i \equiv 1 \pmod 2 \\ j \equiv 1 \pmod 2}} \end{bmatrix}$$

とする。

$\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$ から $Mat(\mathbb{Z}|\mathbb{Z},\mathcal{S})$ への map $\psi$ を次で定義する。
$P\in\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$ に対し $\psi(P)=(\psi(P)_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$，但し $D^iP=\sum_j\psi(P)_{ij}D^j$ とする。

<u>Fact 8.</u>　$P,Q\in\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$ に関して
$$\psi(PQ)=\psi(P)\psi(Q)\quad。$$
<u>証明</u>．Fact 1 の証明と同じ。

ここで SKP hierarchy と普遍超 Grassmann 多様体 (USGM) の関係を見ていこう。W を SKP hierarchy の wave operator とする。この W に対し USGM 上の super frame を
$$\psi(W^{-1})|_{x=\theta=t=0}\ \Xi_\phi$$
で定義する。逆に $\Xi$ を USGM 上の super frame とすると次の命題がなりたつ。

<u>命題 9.</u>　次の Grassmann 方程式
$$^t\vec{w}\exp\left(\theta\Lambda+x\Lambda^2+\sum_{j=1}^{\infty}t_j\Gamma^j\right)\Xi=0 \qquad (2.3)$$
但し $^t\vec{w}=(\cdots w_2,w_1,1,0,0\cdots)$，$w_j\in\mathcal{S}_j$，$\Gamma=((-)^j\delta_{i+1,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$。
の解より構成される 0 階の operator $W=\sum_{j=0}^{\infty}w_jD^{-j}$ は SKP-hierarchy の wave operator である。

<u>証明</u>．命題 2 の証明と同じである。しかし $W_0=W|_{t=0}$ としたとき
$$\psi(W_0)=\exp(\theta\Lambda+x\Lambda^2)\,\psi(W_0)|_{x=\theta=0}\exp(-\theta\Lambda-x\Lambda^2)$$

となることに注意が必要なのでそのことについて述べる。$u \in \mathcal{S}_a$.
$u = f + \theta g$ とおく。このとき

$$\check{\Psi}(u) = \begin{bmatrix} \phi(f) + \theta\phi(g) & 0 \\ \theta\phi(f_x) + \phi(g) & (-)^a(\phi(f) + \theta\phi(g)) \end{bmatrix}$$

であるから

$$D\check{\Psi}(u) = \begin{bmatrix} \phi(g) + \theta\phi(f_x) & 0 \\ \phi(f_x) + \theta\phi(g_x) & (-)^a(\phi(g) + \theta\phi(f_x)) \end{bmatrix}$$

$\phi(f_x) = \frac{\partial}{\partial x}\phi(f) = \Lambda\phi(f) - \phi(f)\Lambda$ （$\phi(g)$ も同様）に注意すると

$$D\check{\Psi}(u) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \Lambda & 0 \end{bmatrix} \check{\Psi}(u) - \check{\Psi}(u)^{\dagger} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \Lambda & 0 \end{bmatrix}$$

を得る。ただし $a \in S$, $a = a_0 + a_1$, $a_i \in \mathcal{S}_i$ $i = 0, 1$ に対して
$a^{\dagger} = a_0 - a_1$, $A = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}} \in Mat(\mathbb{Z}|\mathbb{Z}, \mathcal{S})$ に対し $A^{\dagger} = (a_{ij}^{\dagger})_{i,j \in \mathbb{Z}}$。

$P = uD^n$ とすると $\Psi(P) = \Psi(u)\Lambda^n$ だから

$$D\Psi(P) = (\Lambda\Psi(u) - \Psi(u)^{\dagger}\Lambda)\Lambda^n = \Lambda\Psi(P) - \Psi(u)^{\dagger}\Lambda^n \cdot \Lambda$$
$$= \Lambda\Psi(P) - \Psi(P)^{\dagger}\Lambda。$$

よって一般の $P$ に対しても $D\Psi(P) = \Lambda\Psi(P) - \Psi(P)^{\dagger}\Lambda$ が成立するのでこの式を積分して

$\psi(P) = \exp(\theta\Lambda + x\Lambda^2)\psi(P|_{x=\theta=0})\exp(-\theta\Lambda - x\Lambda^2)$ を得る。　　証終 //

では次に OSp-SKP hierarchy をパラメトライズする ひSGM 上の super frame を特徴づけよう。

<u>定義</u>　$A \in Mat(\mathbb{Z}|\mathbb{Z}, \mathcal{S})_{\underline{a}}$ とし $\check{A} = \begin{bmatrix} A_{00}, & A_{01} \\ A_{10}, & A_{11} \end{bmatrix}$ とする。

このとき "st" を

$$ {}^{st}\check{A} = \begin{bmatrix} {}^{t}A_{00}, & (-)^{a}\,{}^{t}A_{10} \\ (-)^{a+1}\,{}^{t}A_{01} & {}^{t}A_{11} \end{bmatrix} $$

でさだめる。

<u>注意</u> $A \in Mat(\mathbb{Z}|\mathbb{Z}, \mathcal{S})_{\underline{a}}$, $B \in Mat(\mathbb{Z}|\mathbb{Z}, \mathcal{S})_{\underline{b}}$ に対して
${}^{st}(\check{A}\check{B}) = (-)^{ab}\,{}^{st}\check{B}\,{}^{st}\check{A}$

がなり立つ。

<u>命題10</u>　$P \in \mathcal{E}_{\mathcal{S}\underline{a}}$ に対して

$$ \check{\psi}(P^*) = (-)^{a}\begin{bmatrix} 0 & {}^{t}K \\ {}^{t}K & 0 \end{bmatrix} {}^{st}\check{\psi}(P) \begin{bmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{bmatrix} $$

がなりたつ。

<u>証明</u>.　$u = f + \theta g \in \mathcal{S}_{\underline{a}}$ に対し

$$ \check{\psi}(u) = \begin{bmatrix} \phi(f) + \theta\phi(g) & 0 \\ \theta\phi(f_x) + \phi(g) & (-)^{a}(\phi(f) + \theta\phi(g)) \end{bmatrix}, \quad \check{\psi}(D) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \Lambda & 0 \end{bmatrix} $$

であることに注意し計算をすればよい。　証終 //

定義. Lie supergroup $OSp(\infty)$ を次で定義する。

$$OSp(\infty) = \left\{ A \in SGL(\infty) \;\middle|\; \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & -{}^tK \end{bmatrix} {}^{st}\check{A} \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & -K \end{bmatrix} = \check{A}^{-1} \right\}。$$

次の事実に注意せよ。　$U \in \mathcal{E}_{\infty 0}$ について

$$D^{-1} U^* D = U^{-1} \Leftrightarrow \psi(U) \in OSp(\infty).$$

さて $W$ を OSp-SKP hierarchy の wave operator とすると $\psi(W^{-1}) \in OSp(\infty)$ より $\check{\Xi} = \left( (\vec{\xi}_i^{\alpha\beta})_{i<0} \right)_{\alpha,\beta=0,1} = \overline{\psi(W^{-1})}|_{x=\theta=\tilde{t}=0} \Xi_\phi$ としたとき $\vec{\xi}_i^{\alpha\beta}$ $i<0$ 達は次の2次の関係式をみたす

$$\begin{cases} \langle \vec{\xi}_i^{00}, \vec{\xi}_j^{00} \rangle_B - \langle \vec{\xi}_i^{10}, \vec{\xi}_j^{10} \rangle_C = 0 & (2.4) \\ \langle \vec{\xi}_i^{00}, \vec{\xi}_j^{01} \rangle_B - \langle \vec{\xi}_i^{10}, \vec{\xi}_j^{11} \rangle_C = 0 & (2.5) \\ \langle \vec{\xi}_i^{01}, \vec{\xi}_j^{00} \rangle_B + \langle \vec{\xi}_i^{11}, \vec{\xi}_j^{10} \rangle_C = 0 & (2.6) \\ \langle \vec{\xi}_i^{01}, \vec{\xi}_j^{01} \rangle_B + \langle \vec{\xi}_i^{11}, \vec{\xi}_j^{11} \rangle_C = 0 & (2.7) \end{cases}$$

$i, j < 0$，ただし $\tilde{t} = (t_2, t_3, t_6, t_7, \cdots)$。

Superframe $\Xi \in USGM$ に対して Superframe $\Xi'$ を $\Xi' = \Xi g$ $g \in SGL(\mathbb{N}^c|\mathbb{N}^c, A)$ で定義する。ただし

$$SGL(\mathbb{N}^c|\mathbb{N}^c, A) = \left\{ A = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}^c} \;\middle|\; a_{ij} \in A_{\underline{i+j}},\ \epsilon(A) \text{は可逆} \right\}。$$

$\check{\Xi}$ の各タテベクトルが (2.4)〜(2.7) をみたすなら $\check{\Xi}'$ の各タテベクトルも (2.4)〜(2.7) をみたすことが簡単な計算よりわかる。

よって (2.4)〜(2.7) は USGM 上の条件として well defined であることがわかる。(2.4)〜(2.7) をみたす superframe を isotropic superframe といい isotropic superframe からなる USGM 上の部分集合を i-USGM という。よって OSp-SKP hierarchy に対応する USGM 上の superframe は i-USGM 上の superframe であることがわかった。次に逆の対応について結果のみを述べる。

**定理11** Grassmann 方程式

$$ {}^{t}\vec{w}\exp(\theta\Lambda + x\Lambda^2 + \sum_{j\equiv 2,3 \,(\mathrm{mod}\, 4)} t_j \Gamma^j)\Xi = 0 $$

において $\Xi$ が i-USGM 上の superframe ならば ${}^{t}\vec{w}$ より構成される wave operator は OSp-SKP hierarchy の wave operator である。

## References


[1] E.Date, M.Jimbo, M.Kashiwara and T.Miwa: Transformation groups for soliton equations, Proc. RIMS Symp. "Nonliner Integrable systems —— Classical Theory and Quantum Theory ——", T.Miwa and M.Jimbo ed. World scientific 1983, 39 - 119.

[2] K.Ikeda: A supersymmetric extension of the Toda lattice hierarchy, Lett. Math. Phys. 14 (1987), 321-328.

______: "The super Toda Lattice Hierarchy" preprint.

[3] Yu.I.Manin and A.O.Radul: A supersymmetric extension of the Kadomtsev-Petviashvili hierarchy, Comm.Math.Phys. 98(1985), 65-77.

[4] M.Mulase: Solvability of the super KP hierarchy and a generalization of the Birkhoff decomposition, Inventiones Math. 98(1988), 1-46.

[5] 佐藤幹夫述，野海正俊記；ソリトン方程式と普遍グラスマン多様体，上智大数学講究録. No18, 1984年。

[6] K.Takasaki: Symmetries of the super KP hierarchy, to appear in Lett. Math.Phys.

[7] K.Ueno and K.Takasaki:Toda lattice hierarchy. Adv.Studies in Pure Math. 4 "Group Representations and Systems of Differential Equations". Kinokuniya 1984, 1-95.

[8] 上野喜三雄："Super KP系，OSp SKP系" 数理研講究録 660 代数解析学の諸相。

[9] ———— ："Super KP系，OSp SKP系" 数理研講究録 675 代数解析学の発展。

[10] K.Ueno and H.Yamada:Super Kadomtsev-Petviashvili hierarchy and super Grassmann manifold. Lett. Math. Phys. 13(1987). 59-68.

[11] ______: Supersymmetric extension of the Kadomtsev-Petviashvili hierarchy and universal super Grassmann manifold. Adv. Studies in Pure Math. 16 "Two-Dimensional Conformal Field Theory and Solvable Lattice Models", Kinokuniya 1988 , 373-426.

[12] K.Ueno, H.Yamada and K.Ikeda:Algebraic study on the super-KP hierarchy and the ortho-symplectic super-KP hierarchy, to appear in Comm. Math. Phys.

[13] H.Yamada: Super Grassmann hierarchies - A multicomponent theory -, Hiroshima Math. J. (1987), 373 - 394.