数理解析研究所講究録
第694巻 1989年 63-73

Ernst方程式の有理関数解

永 友 清 和 (KIYOKAZU NAGATOMO)

大阪大学理学部数学

アブストラクト. 定常かつ軸対称な重力場を記述する Ernst 方程式が有理関数解を持つことを示しそれらを具体的に構成する。従来の特殊解の構成法と異なりRiemann-Hilbert 変換を用いないので、はじめに特殊解を知る必要はない。

序. 以前の仕事 [1] で Ernst 方程式

$$f\nabla^2 f - (\partial_z f)^2 - (\partial_\rho f)^2 + (\partial_z e)^2 + (\partial_\rho e)^2 = 0,$$

$$f\nabla^2 e - 2\{\partial_z f\partial_z e + \partial_\rho f\partial_\rho e\} = 0$$

$$\nabla^2 = \partial_\rho^2 + 1/\rho\partial_\rho + \partial_z^2$$

の $(z,\rho) = (0,0)$ の近傍で局所解析的な解は普遍グラスマン多様体(UGM)上の線型微分方程式の解を用いて表示されることを明らかにし、特に $\rho = 0$ における初期値がある条件 ([1] Corollary 5.4) を満たす場合に有理関数解を幾つか構成した。 Ernst 方程式が線形化される様子を調べるには UGM の方法は不可欠であるが、特殊解を具体的に構成するためにはBelinsky-Zahkarov[2], Hauser-Ernst[3] に代表されるように Hilbert の斉次問題を用いるほうが便利である。ここでは形式的な Hilbertの斉次問題を解いて Ernst 方程式の有理関数解を構成し

よう。Belinsky-Zahkarov あるいは Hauser-Ernst らの用いた Lax 形式では、解空間はMinkowski 空間（これは Ernst 方程式の自明な解）の Riemann-Hilbert 変換群による軌道になる。従って、特殊解を構成するときには、 Riemann-Hilbert 変換を定義する Hilbert の斉次問題を解き、その後に Riemann-Hilbert 変換を既に求めた特殊解に作用させるという手順をとる。 我々の用いる Lax 形式では、Riemann - Hilbert 変換をほどこさなくても Hilbert の斉次問題の解から直接 Ernst 方程式の解を求めることができる。とりわけ、有理関数解については有限次元の線形代数の知識のみで具体的に特殊解を構成できるという利点がある。ここで求める有理関数解は残念ながら漸近的平坦（無限遠方で Minkowski空間に収束）ではなく物理的な解釈はできないが、現在までに求められている特殊解の少なさを考えると、原理的に有限解の操作で構成可能な特殊解のクラスを知ることは重要であると考える。

I. 線型問題

$f(z) \neq 0$, $e(z)$ を $z = 0$ の近傍で局所解析的な関数としよう。このとき以前の仕事[1]で明らかにしたように Ernst 方程式の $z = \rho = 0$ の近傍で局所解析的な解 $f(z,\rho)$, $e(z,\rho)$ で初期値 $f(z,0) = f(z)$, $e(z,0) = e(z)$ をとるものが一意的に存在する。次の式で行列 $\tau(z,\rho)$ を定義しよう：

$$\tau = \begin{bmatrix} -\dfrac{f^2 + e^2}{f} & \dfrac{e}{f} \\ \dfrac{e}{f} & -\dfrac{1}{f} \end{bmatrix} .$$

このとき Ernst 方程式は次の付帯条件のついた微分方程式と同等にな

る：

$$\partial_z(\rho\partial_z\tau\cdot\tau^{-1}) + \partial_\rho(\rho\partial_\rho\tau\cdot\tau^{-1}) = 0\ , \tag{1a}$$

$$\det(\tau(z,\rho)) = 1,\ {}^t\tau(z,\rho) = \tau(z,\rho). \tag{1b}$$

方程式 (1a) に対する $\rho = 0$ での初期値問題は一意可解である。すなわち、$\tau(z)$ を z の可逆な z の行列値解析関数とすると、(1a) の局所解析的な解で $\tau(z,0) = \tau(z)$ をみたすものが存在する。さらに、初期値 $\tau(z)$ が条件

$$\det(\tau(z)) = 1\ , \qquad {}^t\tau(z) = \tau(z)$$

をみたせば、この一意的な解は (1b) をみたす。従って Ernst 方程式の解を求めるには、次の初期値問題を解けば十分である：

$$\begin{aligned}&\partial_z(\rho\partial_z\tau\cdot\tau^{-1}) + \partial_\rho(\rho\partial_\rho\tau\cdot\tau^{-1}) = 0\\ &\tau(z,\rho)\,\big|_{\rho=0} = \tau(z)\end{aligned} \tag{2}$$

但し、 $\det(\tau(z)) = 1$ かつ ${}^t\tau(z) = \tau(z)$.

さて、 $P = \partial_z\tau\ \tau^{-1}$, $Q = \partial_\rho\tau\ \tau^{-1}$ とおこう。このとき線形微分方程式系

$$D_1\ W = PW\ , \qquad D_2W = QW \tag{3}$$

は involutive である。ここで、$D_1 = \partial_z - \lambda\rho\partial_\rho + 2\lambda^2\partial_\lambda$,
$D_2 = \lambda\rho\partial_z + \partial_\rho$ とおいた.

補題 1 $\tau(z,\rho)$ を Ernst 方程式の解とすると、線型微分方程式系 (3)の解で $z = \rho = 0$, $\lambda = \infty$ の近傍で解析的なものが一意的に存在し、かつ

$$W(z,\rho,\lambda)|_{\rho = 0} = \tau(z)\ [\tau(z + 1/(2\lambda))]^{-1}$$

をみたす。さらに $\tau(z)^{-1}$ が z の m 次多項式のとき W は λ^{-1} の高々 m 次多項式である。

[証明] 前半は[1]の Proposition 2.1 である。後半を示そう。
$W(z,\rho,\lambda) = 1_2 + \sum_{j=1}^{\infty} w_j(z,\rho)\lambda^{-j}$ とおき、 (3) 式に代入すると、

$$\rho\partial_\rho w_j + 2jw_j = \partial_z w_{j-1} - Pw_{j-1} \tag{4-j}$$

$$\rho\partial_z w_j = -\partial_\rho w_{j-1} + Qw_{j-1} \tag{5-j}$$

である。 (4-j+1),(5-j+1)式を用いて w_{j+1} を消去しよう：

$$\begin{aligned}\rho\partial_\rho^2 w_j + (2j+1-\rho Q)\partial_\rho w_j = {} & -\rho\partial_z^2 w_j + \rho P\partial_z w_j \\ & + (\rho\partial_\rho Q + \rho\partial_z P) + (2j+1)w_j\end{aligned} \tag{6-j}$$

ここで等式 $W(z,\rho,\lambda)|_{\rho = 0} = \tau(z)[\tau(z+1/(2\lambda))]^{-1}$ に注意すると

$w_j(z,0) = 0$ が $j \geq m + 1$ で成り立つ。 さて、 $W_j(z,\rho) = 0$, $j \geq m+1$ を示そう。(6-j) の両辺を ρ で r 回微分し、 $\rho = 0$ とおくと

$$(r+2j+1)c_j^{r+1}(z) = (2j+1)c_j^r(z) - r\partial_z^2 c_j(z) + \sum_{k=0}^{r} k\partial_\rho^{k-1}Q|_{\rho=0}\, c_j^{r-k+1}(z) + \sum_{k=0}^{r} k(\partial_\rho^k Q + \partial_\rho^{k-1}\partial_z P)|_{\rho=0}\, c_j^{r-k}(z)$$

を得る。ここで、 $c_j^r = \partial_\rho^r w_j(z,\rho)|_{\rho=0}$ とおいた。特に、$j\geq m+1$ のとき $c_j^0(z) = 0$ であるから、 r に関する帰納法で $c_j^r(z) = 0$ $r\geq 0$, $j\geq m+1$ を得る。従って $w_j(z,\rho) = 0$, $j\geq m+1$ がわかる 。

∎

次に線形微分方程式系 (3) の $z = \rho = \lambda = 0$ の近傍で解析的な解を考えよう。はじめに (3) の形式解 $V(z,\rho,\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} v_j(z,\rho)\lambda^j$ で $V(z,\rho,\lambda)|_{\rho=0} = \tau(z)$ となるものが一意的に存在することを示す.

補題 2　線型微分方程式系 (3) の形式解で次の条件を満たすものが存在して一意である：

$$V(z,\rho,\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} v_j(z,\rho)\lambda^j,\quad v_j(z,\rho) \in \mathbb{C}[[z,\rho]] \tag{7}$$

$$V(z,\rho,\lambda)|_{\rho=0} = \tau(z)$$

[証明] 式(7) を (3) に代入しよう：

$$\partial_z v_j - \rho\partial_\rho v_{j-1} + 2(j-1)v_{j-1} = Pv_j \tag{8-j}$$

$$\partial_\rho v_j + \rho \partial_z v_{j-1} = Q v_j \tag{9-j}$$

但し、ここで $v_{-1} = 0$ とおいた。(9-j) 式を初期条件 $v_0(z,0) = \tau(z)$, $v_j(z,0) = 0$, $j \geq 1$ の下で解く。(9-0)式から $\partial_r v_0 = (\partial_\rho \tau\ \tau^{-1}) v_0$ であるから、明らかに $v_0 = \tau(z,\rho)$ である。また

$$v_j(z,\rho) = -\tau(z,\rho) \int r[\tau(z,r)]^{-1} \partial_z v_{j-1}(z,r)\, dr \tag{10}$$

が $j \geq 1$ で成り立つことも直ちにわかる。従って我々の条件を満たす $V(z,\rho,\lambda)$ は存在すれば一意的である。(10) 式で定まる $v_j(z,\rho)$ が (8-j) を満たすことを証明しよう。 j に関する帰納法で示す。
$v_0(z,\rho) = \tau(z,\rho)$ であるから、明らかに (8-0) 式は成り立つ。
(8-j) 式の成立を仮定しよう。 (8-j) 及び (9-j) から v_{j-1} を消去すると

$$\rho(\partial_z^2 v_j + \partial_\rho^2 v_j) - (2j-1)\partial_\rho v_j + 2jQv_j - \rho P \partial_z v_j - \rho Q \partial_\rho v_j = 0 \tag{11}$$

である。さて、 (10) 式から

$$\partial_z v_{j+1} = -\partial_z \tau \int r\tau^{-1} \partial_z v_j\, dr - \tau \int r \partial_z(\tau^{-1}) \partial_z v_j\, dr$$
$$- \tau \int r\tau^{-1} \partial_z^2 v_j\, dr$$

であるから、 (11) 式を用いて求める結論を得る。

■

系 3 補題 2 と同じ条件のもとで、

$$v_j(z,\rho) = \rho^{2j}\hat{v}_j \ , \ \hat{v}_j \in \mathbb{C}[[z,\rho]]$$

がなりたつ。

[証明] (10)式から直ちに従う。

■

さて、$\mathbb{C}[[z,\rho,\lambda,\lambda^{-1}]]$ の元 $u(z,\rho,\lambda)$ を

$$u(z,\rho,\lambda) = W^{-1}\ V$$

で定義する。系3 に注意すれば $u(z,\rho,\lambda)$ が $\mathbb{C}[[z,\rho,\lambda,\lambda^{-1}]]$ の元として定義されることがわかる。明らかに、$u(z,\rho,\lambda)$ は同次方程式

$$D_1 u = 0, \qquad D_2 u = 0$$

を満たしている。 $u(z,\rho,\lambda) = \tau(-\rho^2\lambda/2 + z + 1/(2\lambda))$ であることを示そう。 $u(z,0,\lambda) = \tau(z+1/(2\lambda))$ であることを注意しておく。

$u(z,\rho,\lambda) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j(z,\rho)\lambda^j$ とおくと、補題1 の場合と同様にして

$$\partial_\rho\ u_{j+1} = -\rho\partial_z u_j \tag{12}$$

$$\partial_z u_{j+1} = \rho\partial_\rho u_j - 2ju_j$$

この式から u_{j+1} を消去して

$$\rho(\partial_z^2 + \partial_\rho^2)u_j + (1-2j)\partial_\rho u_j = 0 \tag{13}$$

を得る。 $j \leq 0$ のとき (13) の解 $u_j(z,\rho)$ は $u_j(z,0)$ の値から一意的に定まることが容易に示される。従って (12) 式に注意すれば $u(z,\rho,\lambda)$ は $u(z,0,\lambda)$ の値で一意的に定まることが示される。一方、$\tau(-\rho^2\lambda/2 + z + 1/(2\lambda))$ は $D_1 u = 0$, $D_2 u = 0$ をみたし、$\rho = 0$ のとき、$\tau(z+1/(2\lambda))$ であるから一意性より結論を得る。以上で次の命題が示された 。

命題 4

$$W^{-1}V = \tau(-\rho^2\lambda/2 + z + 1/(2\lambda)) \tag{14}$$

が $\mathbb{C}[[z,\rho,\lambda,\lambda^{-1}]]$ の元として成り立つ。特に $\tau(z)$, $\tau(z)^{-1}$ が z の多項式の とき V, W は各々 λ, λ^{-1}の $\mathbb{C}[[z,\rho]]$係数多項式である。

[証明] 前半の等式は 既に示した。後半を示そう。 $\tau(z)^{-1}$ が z の多項式のとき、補題1から W は$\mathbb{C}[[z,\rho]]$係数のλ^{-1}の多項式である。一方、$V = W\tau(-\rho^2\lambda/2 + z + 1/(2\lambda))$ から $\tau(z)$ が z の多項式のとき V は $\mathbb{C}[[z,\rho]]$係数の z の多項式であることが直ちにわかる。

∎

系 5 初期条件 $\tau(z,\rho)|_{\rho=0} = \tau(z)$ に対応する解は次のように表示される：

$$\tau(z,\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j(z,\rho)\chi_j(z,\rho) \tag{15}$$

但し、ここで $\tau(-\rho^2\lambda/2 + z + 1/((2\lambda)) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \chi_j(z,\rho)\lambda^j$ とおいた。

注意： $j \geq 0$ のとき $\chi_j(z,\rho) = \rho^{2j}\tilde{\chi}_j(z,\rho)$, $\tilde{\chi}_j \in \mathbb{C}[[z,\rho]]$ であるから、(15)式は $\mathbb{C}[[z,\rho]]$ の元として意味を持つ。

以下、初期値 $\tau(z)$ は次の条件を満たすものとする：

$\det(\tau(z)) = 1$, $z(z)$ は z の m 次多項式.

このとき、$\tau(z)^{-1}$ も z の m 次多項式である。W はこのとき λ^{-1} の m 次多項式になる。(14)式を用いて $W = 1_2 + \sum_{j=1}^{m} w_j(z,\rho)\lambda^{-j}$ を求めよう。V はλの多項式であるから、特にλの負べきを含まない。よって

$$\chi_k + \sum_{j=1}^{m} w_j\chi_{j+k} = 0, \qquad -1\leq k\leq -m \tag{16}$$

が成り立つ。ここで

$$W = (w_1, w_2, \ldots, w_m) \quad , \quad X = (\chi_{j+k})_{\substack{k=-1,\ldots,-m \\ j=1,\ldots,m}}$$

$$b = {}^t(-\chi_{-1}, \ldots, -\chi_{-m})$$ とおこう。

このとき、$W X = b$ が成立ち、

$$X|_{z=\rho=0} = \begin{bmatrix} \tau(0) & \ddots & * \\ 0 & & \tau(0) \end{bmatrix}$$

であるから、 X は $z=\rho=0$ の近傍で可逆でありその逆行列の各成分は z と ρ の有理関数である。従って $W = b\ X^{-1}$ で W の各成分も z と ρ の有理関数となる。以上をまとめて次の定理を得る。

定理6　$\tau(z)$ を$\mathbb{C}$係数の z の m 次多項式で、$\det(\tau(z)) = 1$ を満たすものとする。このとき、初期値問題(2)の解 $\tau(z,\rho)$ は z と ρ の有理関数であり、$\tau(z,\rho) = \sum_{j=0}^{m} w_j(z,\rho)\chi_j(z,\rho)$ と表される。ここで $\tau(-\rho^2\lambda/2 + z + 1/((2\lambda)) = \sum_{j=-m}^{m} \chi_j(z,\rho)\lambda^j$ で $w_j(z,\rho)$ は方程式(16)の解である。

この定理より直ちに次の結論を得る：

系7 a, b を z の多項式とし、次の条件を満たすものとする：

$a(0) \neq 0$, $a \mid 1+b^2$.

このとき、Ernst方程式の解 f と e で $f(z,0) = 1/a(z)$, $e(z,0) = b(z)/a(z)$ を満たすものは、z と ρ の有理関数である。

[証明]

$$\tau(z) = \begin{bmatrix} \frac{1+b^2}{a} & b \\ b & -a \end{bmatrix}$$

に対して定理6を適用すればよい。

参考文献：

[1] K.Nagatomo : The Ernst equation as amotion on a universal Grassmann manifold, to appear in Commun. math. Phys.

[2] V.A. Belinsky, V.E. Zahkarov: Stationary gravitational solitons with axial symmetry, Sov. Phys. J. E. T. P. 50, 1-9(1979)

[3] I. Hauser,F.J. Ernst: Proof of a Gerouch conjecture, J. Math. Phys. 22, 1151-1163(1981)