数理解析研究所講究録
第 694 巻 1989 年 98-106

高次元可積分系の hierarchy について

数理研・大山 陽介 (Ohyama, Yousuke)

これまでＫＰ方程式系の高次元化を考えてきたが、その時に問題となったのは、得られる発展方程式が一般には有限の閉じた形にならないということである([2])。これは高次元の場合の無限グラスマン多様体上の力学系に付随する様々な発散の困難と関係するものであり、この種の問題には避けることができないものである。そこで、ここでは話を逆にして、発展方程式が閉じた形になる条件について考えてみることにする。結論を先に述べると、得られる方程式は、自己双対Yang-Mills方程式（ＳＤＹＭ）と自己双対Einstein方程式（ＳＤＥ）とを合成した形の方程式になる。このことは、或る意味では新しい方程式が今の枠組からはもう得られないという否定的な結論を意味するが、今まで知られていた高次元可積分系を全ておなじ土俵の上で議論できるわけで、今後新しい方程式を扱う場合の叩き台として参考になると思う。

記号：

$\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\}$ ，自然数の集合

C：標数０の代数的閉体（複素数体$\mathbb{C}$と思ってよい）

$\mathcal{O}=C[[x_0,x_1,\ldots,x_{r-1}]]$,　　以下で基礎になる函数環

$x=(x_0,x_1,\ldots,x_{r-1})$ ，$x'=(x_1,\ldots,x_{r-1})$ とする。

$\mathcal{O}$で議論するのは話を簡単にするためで、収束冪級数環を用いても構わないが、その場合はいちいち収束性を証明しなければならない。

1° 我々は$\mathcal{D}$加群の変形として可積分系を扱う。そこで、まず擬微分作用素について復習しよう。$\mathcal{O}$上の微分作用素の作る環$\mathcal{D}=\mathcal{O}[D_0, D_1, \ldots, D_{r-1}]$の拡大環として、擬微分作用素の作る環$\mathcal{E}$を次のように定める：

$$\mathcal{E}=\mathcal{O}[[D_0^{-1}, D_0^{-1}D_1, \ldots, D_0^{-1}D_{r-1}]][D_0] \quad .$$

高々m階の擬微分作用素の全体を$\mathcal{E}(m)$とすると、$\mathcal{E}$は$\mathcal{E}=\cup\mathcal{E}(m)$というフィルタつき環の構造をもっている。この$\mathcal{E}$のフィルタを考えることにより発展方程式が有限の形で得られる。一般に、$\mathcal{E}$の$\mathcal{O}$部分加群$\mathcal{L}$に対して、$\mathcal{E}$から導かれる$\mathcal{L}$上のフィルタを$\mathcal{L}(m)=\mathcal{L}\cap\mathcal{E}(m)$で定める。

また、$\mathcal{E}$の$\mathcal{O}$部分加群$\mathcal{E}_{\emptyset}$を

$$\mathcal{E}_{\emptyset}=\sum_{\substack{i<0\\ \alpha\in\mathbb{N}^{r-1}}}\mathcal{O}\cdot D_0^i D_{x'}^{\alpha} \quad . \qquad (D_{x'}^{\alpha}=D_{x_1}^{\alpha_1}D_{x_2}^{\alpha_2}\ldots D_{x_{r-1}}^{\alpha_{r-1}})$$

とする。これはKP-hierarchy の時の真空に当るもので、他にも取り方はあるが今は最も簡単な場合についてのみ考察する（他の場合として[1][1']）。また、$P\in\mathcal{E}$に対して、$P_+\in\mathcal{D}$を　$P_+\equiv P \pmod{\mathcal{E}_{\emptyset}}$ で、$P_-\in\mathcal{E}_{\emptyset}$を　$P_-=$(PのD_0-負冪部分)で定める。

$\mathcal{E}$の左$\mathcal{D}$部分加群$\mathcal{I}$について次の splitting condition を満たすものを考える：

$$\mathcal{E}(m)=\mathcal{I}(m)\oplus\mathcal{E}_{\emptyset}(m) \quad , \forall m\in\mathbb{Z} \quad .$$

この時、$m<0$ならば、$\mathcal{E}(m)=\mathcal{E}_{\emptyset}(m)$だから、$\mathcal{I}(m)=0$。また、$m=0$のときに

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E}(0) & = & \mathcal{I}(0) & \oplus & \mathcal{E}_{\emptyset}(0) \\ \Cup & & \Cup & & \Cup \\ 1 & = & W & + & U \end{array}$$

という分解を考えると、この分解で得られた作用素Wにより、$\mathcal{I}=\mathcal{D}W$となることが分かる。逆に、$W_+=1$となる作用素$W\in\mathcal{E}(0)$で生成される$\mathcal{E}$の左$\mathcal{D}$部分加群$\mathcal{I}=\mathcal{D}W$は上の splitting condition を満たす。以後、全て左$\mathcal{D}$加群しか考えないので、単に$\mathcal{D}$加群と呼ぶ。

2° $P\in\mathcal{E}$を時間発展の無限小生成元として、$\mathcal{I}$の時間発展$\mathcal{I}t$を次の微分方程式で定める：

$$\forall V\in\mathcal{I},\quad \frac{\partial V}{\partial t}+VP \;\in\; \mathcal{I}_t \quad . \tag{1}$$

一般には、こうして得られる$\mathcal{I}_t$は splitting condition を満たさないだけでなく、もう$\mathcal{E}$の部分空間にすらならない。実は、$\mathcal{I}_t$は$\mathcal{E}^{\infty}$の$\mathcal{D}^{\infty}$部分加群と考えられるのだが、その点については[2]を参照されたい。この発展方程式(1)について、もし$\mathcal{I}_t$が splitting condition を満足するならば、(1)は次のWに関する方程式に帰着する：

$$\frac{\partial W}{\partial t}+WP=BW,\quad \text{ここで}B=(WPW)_+ \quad . \tag{2}$$

ここで、これまで知られている高次元可積分系について復習しよう。

A) 自己双対Yang-Mills方程式(SDYM) ([4])

$W=\sum_{i\leq 0} w_i(x')D_0^i$ とする。ここで、$w_i\in \mathrm{Mat}(k, C[[x']])$、$w_0=1_k$とする。

$P\in\mathscr{E}$として$P=D_0^n D_j$ $(n\in\mathbb{N}, 0<j<r)$を取る。$WD_jW^{-1}=D_j+\psi_j(x', D_0)$ とおくと、発展方程式(2)の$B=D_0D_j+(\psi_jD_n)_+$ 。 $r=3$, $n=1$の時に本来のSDYMになる。

B) 自己双対Einstein方程式(SDE) ([5])

$G_j=\sum_{i<0} g_{j,i}(x')D_0^i$ とする$(0<j<r)$。ここで、$g_{j,i}\in C[[x']]$。$G=(G_1, G_2, \ldots, G_{r-1})$として、$W=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{r-1}}\frac{1}{\alpha!}G^{\alpha}D_{x'}^{\alpha}$ とする。今度も、$P\in\mathscr{E}$として、

$P=D_0^nD_j$ $(n\in\mathbb{N}, 0<j<r)$を取る。$WD_jW^{-1}=\sum\varphi_{ji}(x', D_0)D_i$ とおくと、この場合には(2)の$B=(\sum\varphi_{ji}(x', D_0)D_0^n)_+D_i$ 。 $r=3$, $n=1$の時に、G_jに適当な条件をかせばSDEになる。

高次元可積分系の例としては、他にWitten型のゲージ方程式が知られている([3])。これは、スペクトルパラメタが複数個ある場合で、この方程式を扱うには上の枠組を少し変形しなければならない($\mathscr{E}$の定義を少し代える必要がある)ので、別の機会に述べることにする。

3° SDYM, SDEの場合でも分かるように、時間発展の生成元としては$C[[x']]D_0^nD_j$の形のものを考えればよい。我々の主定理を述べよう。

定　理1.　splitting condition をみたす$\mathscr{E}$の$\mathscr{D}$部分加群$\mathscr{I}$を、勝手な$P \in \sum_{n,j} C[[x']] D_0^n D_j$を生成元として時間発展させても再び splitting conditionを満たすとする。$\mathscr{I}$の$\mathscr{D}$加群としての生成元Wが、$[W,\ D_0]=0$となるとき、Wは$W=W_E \cdot W_{YM}$と分解できる。ここで、W_EとW_{YM}とは次の形をしている：

$$W_E = \sum_{\alpha \in N^{r-1}} \frac{1}{\alpha\,!} G^{\alpha} D_x^{\alpha}.$$

ここで　$G_j = \sum_{i<0} g_{j,i}(x') D_0^i$ として、$G=(G_1, G_2, \cdots, G_{r-1})$

$$W_{YM} = \sum_{i \leqq 0} w_i(x') D_0^i \quad 、\qquad ここで、w_i \in C[[x']]、w_0 = 1_k\ .$$

即ち、WはＳＤＥとＳＤＹＭのときに現れた生成元の積の形で表される。　□

なお、この定理で述べた生成元Wの全体Υは群をなす。更に、ＳＤＹＭのときのW_{YM}全体の作る群はΥの正規部分群になる。従って、定理で述べた分解の順序を逆にしても構わない。また、発展方程式はW_Eに関する部分を分離することができるので、ＳＤＥの hierarchy を真に含むが、対応する時間発展の生成元は同じにはならない（雑にいうとW_{YM}でひねったものになる）。定理の証明は次節で述べる行列係数の場合と全く同じであるのでそこで述べる。

4゜　前節では１成分の話に限ったが、ＳＤＹＭのWは行列の形をしていたので、行列係数の場合に拡張しよう（研究会で間違えた部分）。　2゜で述べた時間発展の話は１成

分の場合と同じで、Mat(k, $\mathscr{E}$)のMat(k, $\mathscr{D}$)部分加群の変形を考えればよい。

定　理2.　splitting condition をみたすMat(k, $\mathscr{E}$)のMat(k, $\mathscr{D}$)部分加群$\mathscr{I}$を、勝手な$P\in\sum_{n,j}C[[x']]D_0^nD_j$を生成元として時間発展させても再び splitting condition を満たすとする。$\mathscr{I}$の$\mathscr{D}$加群としての生成元Wが$[W,\ D_0]=0$となるとき、Wは$W=W_E\cdot W_{YM}$と分解できる。ここで、W_EとW_{YM} とは次の形をしている：

$$W_E=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{r-1}}\frac{1}{\alpha\,!}G^{\alpha}D_{x'}^{\alpha},$$

ここで　$G_j=\sum_{i<0}g_{j,i}(x')D_0^i$ として、$G=(G_1,G_2,\cdots,G_{r-1})$、$g_{j,i}\in\mathrm{Mat}(k,C[[x']])$であるが、$[G_a,G_b]=0$.

$$W_{YM}=\sum_{i\leqq 0}w_i(x')D_0^i$$
、ここで、$w_i\in\mathrm{Mat}(k,C[[x']])$, $w_0=1_k$. □

定理1と定理2とはほとんど同じ形をしているが、行列係数の場合にはW全体は群にはならないし、分解の積の順序も交換できない。

定理2の証明.　　行列であることを明記するのは面倒なので、Mat(k, $\mathscr{E}$)などを単に$\mathscr{E}$と書くことにする。時間発展によって splitting condition が保たれることから

$$WD_0^nD_j,\ Wx_iD_0^nD_j\quad\in\mathscr{D}W+\mathscr{E}(0)\quad(i,j=1,2,\ldots,r-1)$$

となる。以下、勝手な$P \in \mathcal{E}$に対して、$\widetilde{P} = WPW^{-1}$と書くことにすると、全ての$n \in \mathbb{N}$について、$(D_0^n \widetilde{D}_j)_-$, $(\widetilde{x}_i D_0^n \widetilde{D}_j)_- \in \mathcal{E}(0)$。従って、

$$\widetilde{D}_j = \Sigma \widetilde{\varphi}_{ji}(x', D_0) D_i + \widetilde{\psi}_j(x', D_0) \quad .$$

$$\text{ここで} \quad \widetilde{\varphi}_{ji} \in 1_k \cdot \delta_{ji} + \mathcal{E}_{\emptyset}(0) \quad , \quad \widetilde{\psi}_j \in \mathcal{E}_{\emptyset}(0) \qquad .$$

$$\widetilde{x}_i = x_i + G_i(x', D_0) \qquad , \quad G_i \in \mathcal{E}(0) \qquad .$$

ここで、$0 = [x_a, \widetilde{x_b}] = [\widetilde{x}_a, \widetilde{x}_b] = [G_a, G_b] = 0$ だから、G_jはお互いに可換である。ここでW_Eを

$$W_E = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{r-1}} \frac{1}{\alpha !} G^{\alpha} D_{x'}^{\alpha} \qquad , \quad G = (G_1, G_2, \cdots, G_{r-1})$$

で定めると、$W_E^{-1} \widetilde{x}_j W_E = x_j$ 。このW_Eを用いて

$$W_E^{-1} \widetilde{D}_j W_E^{-1} = \Sigma \varphi_{ji}(x', D_0) D_i + \psi_j(x', D_0) \quad .$$

と書き直して、$W'_{YM} = \sum_{i \leqq 0} w'_i(x') D_0^i$ を次の線形微分方程式で定める：

$$\sum_{0<i<r} \varphi_{ji} \frac{\partial W'_{YM}}{\partial x_i} + \psi_j W'_{YM} = 0 \quad .$$

この連立方程式は、$\Sigma \varphi_{ji} D_i + \psi_j$ が決め方から互いに可換になるので、compatible になり、W_{YM}は右から定数係数の作用素を掛ける操作を除いて一意に決まる。そして、

$W_{YM}^{-1}(\Sigma \varphi_{ji} D_i + \psi_j) W_{YM} = \Sigma W_{YM}^{-1} \varphi_{ji} W_{YM} D_i$ となる。

このW$_{YM}$を用いて、勝手な$P \in \mathcal{E}$に対して、$P^{\#} = W_{YM}^{-1} W_E^{-1} P W_E W_{YM}$と書くことにすると、$W_{YM}$が$x_j (0<i<r)$と可換であることから

$$D_0^{\#} = D_0 \ , \ D_i^{\#} = \Sigma \varphi'_{ij}(x', D_0) D_j \ (0<i<r) \ , \quad x_i^{\#} = x_i \ (0 \leqq i<r) \ .$$

ここで、 $0<i, j<r$のとき

$$\delta_{ij} = [D_i, x_j]^{\#} = [\Sigma \varphi'_{ij}(x', D_0) D_j \ , x_j] = \varphi_{ij}$$

であるから、$D_j^{\#} = D_j$ 。従って、$x_0^{\#} = x_0 + F$ （$F \in \mathcal{E}(-1)$）については$0<j<r$の時

$$0 = [x_0, x_j]^{\#} = [x_0 + F, x_j] = [F, x_j] \quad ,$$

$$0 = [x_0, D_j]^{\#} = [x_0 + F, D_j] = [F, D_j]$$

となり、$F=F(D_0)$。 W_{YM}には右から定数係数の作用素を掛ける自由度があったので

それをうまく取ると、$F=0$とできる。従って、#をほどこす作用は$\mathcal{S}$上恒等写像になるので、$W = W_E \cdot W_{YM}$。 □

5゜ スカラーの場合の変換群は、$\mathcal{D}(1) \otimes C[\lambda, \lambda^{-1}]$になる。但し、この$\mathcal{D}$はr-1変数の微分作用素の作る環で、$\lambda$は$D_0$を表す。$\mathcal{D}(1)$の１階作用素がＳＤＥ、０階作用素がＳＤＹＭの変換群になる。行列係数の場合、$\mathcal{D}(1)$の１階作用素の部分がスカラーであれば Lie環 になり、これは metric とＳＤＹＭ場とを合わせた空間の上に作用する変換群を表す。

文 献

1] 中屋敷 厚： Structure of Baker-Akhiezer module of principally polarized Abelian varieties and associated integrable systems, RIMS-preprint650

1'] 中屋敷： in this volume.

2] 大 山 ： Ｄ加群とグラスマン多様体II (数研講究録640・Ｄ加群と非線形可積分系 35-47, I は存在しない)

3] N.Suzuki：Witten's gauge field equations and an infinite Grasmann manifold. Commun.Math.Phys. 113,155-172 (1987)

4] K.Takasaki：A new approach to the self-dual Yang-Mills equations. Commun.Math.Phys. 94, 34-59 (1984)

5] K.Takasaki：Aspects of integrabilitity in self-dual Einstein metrics and related equations. Publ.RIMS 22, 949-990 (1986)