数理解析研究所講究録
第694巻 1989年 107-126

戸田格子ヒエラルヒーと
古典 r 行列

東大理 武部 尚志 (Takashi Takebe)

§0 序

KPヒエラルヒーほど有名にはなっていないようだが、2次元戸田格子から出発した戸田格子ヒエラルヒーが、Ueno-Takasaki [1] で導入され、KPとほぼ平行した議論が展開できることが分っている。つまり：Lax表示とZakharov-Shabat表示の同値性から始まって、線形化，双線形関係式，τ関数とその広田型方程式…等。さらに、その解に条件を課すことで、1次元戸田格子に対応する，1次元戸田格子ヒエラルヒーも定義されている。（2次元系はToda field，1次元系はToda chainと呼ぶこともある。）

一方、OliveとTurokは、[2]，[3]，[4]で，量子逆散乱法の理論から導入された古典 r 行列（[5]，[6] 参照：[Olive-Turok]では、ℙ operatorと呼ばれている。）を活用して，1次元および2次元戸田格子に対して無限個の保存量を構成し、それら

をHamiltonianとする時間発展が互いに可換になることを示した。

ここでは、この無限個の方程式系が、1次元及び2次元の戸田格子ヒエラルヒーに他ならず、独立変数の1次変換の分しか違わないことを示す。

但し、Olive-Turokの議論は、有限階Kac-Moody Lie環を基礎においているので問題はなかったのだが、戸田格子ヒエラルヒーの理論では、$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$行列と形式巾級数を使うので、直接二つの理論を結びつけようとするといろいろなところで発散が起きる。(系の大きさ，つまりsiteの数が無限になるのだから、物理的に考えても発散は避けられない。)ここでは、1次元系については、形式的なHamiltonianから[2]の処方で作ったLax pairを代数的に特徴づけて新らたにヒエラルヒー構造を持つ系を作り、これがUeno-Takasakiの1次元戸田格子ヒエラルヒーと一致することを示す。2次元系については、[3],[4]の結果を、より直接的に(2次元)戸田格子ヒエラルヒーと比較することができる。

尚、OliveとTurokは、量子化を意識した逆散乱法の定式化(cf [5],[6])に沿って議論しているが、[7]では、共役随伴軌道法と中心拡大を巧みに用いて、ヒエラルヒーの「半分」だけを構成している。

記号　行列 $A=(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ に対して．

$$(A_+)_{ij}=\begin{cases} a_{ij} & i<j \\ 0 & \text{その他}\end{cases} \qquad (A_-)_{ij}=\begin{cases} a_{ij} & i>j \\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

$$(A_0)_{ij}=\begin{cases} a_{ij} & i=j \\ 0 & \text{その他}\end{cases} \qquad A_{+,0}:=A_++A_0$$

その他は、[1] と同様の記号を用いる。

§1 戸田格子ヒエラルヒー

1.1. 復習

ここでは、戸田格子ヒエラルヒー（以下 TLH と略す。）についての必要事項を [1] から引用する。

$x=(x_1,x_2,\cdots)$, $y=(y_1,y_2,\cdots)$ を独立変数とする次のような $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 行列値関数を考える：

$$(1.1)\quad \begin{cases} L=\sum_{-\infty<j\le 1}\mathrm{diag}[b_j(s)]\Lambda^j & \text{但し } b_1(s)\equiv 1 \\ M=\sum_{-1\le j<\infty}\mathrm{diag}[c_j(s)]\Lambda^j & \text{但し } c_{-1}(s)\neq 0 \\ B_n=(L^n)_{+,0} \qquad C_n=(M^n)_- & (n=1,2,\cdots)\end{cases}$$

ここで、$b_j(s)=b_j(s;x,y)$, $c_j(s;x,y)$ は x,y の関数であり、$\Lambda=(\delta_{i+1,j})_{ij}$ はシフト行列である。$\mathrm{diag}[a(s)]$ は、$a(s)$ を対角成分とする対角行列を表す。

TLH は、次のような $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 行列値関数 $W^{(\infty)}, W^{(0)}$ に対する線形問題 (1.2) の積分可能条件である。（以下、W 又は $W^{(\infty)}_{(0)}$ と書くときは、$W^{(\infty)}, W^{(0)}$ の両方について成立することを表す。）

$$(1.2)\qquad \begin{aligned} &LW^{(\infty)} = W^{(\infty)}\Lambda && MW^{(0)} = W^{(0)}\Lambda^{-1} \\ &\partial_{x_n} W = B_n W && \partial_{y_n} W = C_n W \end{aligned}$$

具体的に書けば、TLHとは次のような方程式系である。

$$(1.3L)\quad \left\{ \begin{aligned} &\partial_{x_n} L = [B_n, L] && \partial_{x_n} M = [B_n, M] \\ &\partial_{y_n} L = [C_n, L] && \partial_{y_n} M = [C_n, M] \end{aligned} \right.$$

$$(1.3ZS)\quad \left\{ \begin{aligned} &[\partial_{x_n} - B_n, \partial_{x_m} - B_m] = \partial_{x_m} B_n - \partial_{x_n} B_m + [B_n, B_m] = 0 \\ &[\partial_{y_n} - C_n, \partial_{y_m} - C_m] = \partial_{y_m} C_n - \partial_{y_n} C_m + [C_n, C_m] = 0 \\ &[\partial_{x_n} - B_n, \partial_{y_m} - C_m] = \partial_{y_m} B_n - \partial_{x_n} C_m + [B_n, C_m] = 0 \end{aligned} \right.$$

(1.1) の形の下では、(1.3L) と (1.3ZS) は同値である。

(1.2) には、次の形の解（波動行列）が存在し、双線形関係式 (1.5) を満たす：

$$(1.4)\quad \begin{aligned} W^{(\infty)}(x,y) &= \hat{W}^{(\infty)}(x,y)\exp\xi(x,\Lambda) \\ W^{(0)}(x,y) &= \hat{W}^{(0)}(x,y)\exp\xi(y,\Lambda^{-1}) \end{aligned}$$

ここで、

$$\hat{W}^{\binom{0}{\infty}}(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{diag}\,[\hat{w}_j^{\binom{0}{\infty}}(s;x,y)]\,\Lambda^{\pm j}$$

但し、 $\hat{w}_0^{(0)}(s;x,y) \neq 0$, $\hat{w}_0^{(\infty)}(s;x,y) \equiv 1$

$$\xi(x,\Lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \Lambda^n \quad \text{等}$$

双線形関係式：すべての x, x', y, y' について、

$$(1.5)\qquad W^{(\infty)}(x,y)\,W^{(\infty)}(x',y')^{-1} = W^{(0)}(x,y)\,W^{(0)}(x',y')^{-1}$$

逆に、$W^{(\infty)}, W^{(0)}$ が (1.4) の形を持ち、(1.5) を満たしているならば、

$$(1.7)\qquad \begin{aligned} L &:= W^{(\infty)} \Lambda W^{(\infty)-1} \quad (= \hat{W}^{(\infty)} \Lambda \hat{W}^{(\infty)-1}) \\ M &:= W^{(0)} \Lambda^{-1} W^{(0)-1} \quad (= \hat{W}^{(0)} \Lambda^{-1} \hat{W}^{(0)-1}) \end{aligned}$$

とおいて、(1.1)のように B_n, C_m を作れば、それらは (1.2), (1.3)を満たす。

(1.5) は、形式的には、

$$W^{(0)}(x,y)^{-1} W^{(\infty)}(x,y) = A = \text{定数行列}$$

と書き直せるので、$GL(\infty)$のRiemann-Hilbert分解を与えていると見なすことができる。

$\hat{W}^{(0)}_0 = \mathrm{diag}[e^{u(s)}]$, つまり、$u(s) = \log \hat{w}^{(0)}_0(s)$ で u を導入すれば、(1.3ZS)$m=1$ の $[\partial_{x_1} - B_1, \partial_{y_1} - C_1] = 0$ は、もとの2次元戸田格子：

$$\partial_{x_1}\partial_{y_1} u(s;x,y) = e^{u(s)-u(s-1)} - e^{u(s+1)-u(s)} \qquad (s \in \mathbb{Z})$$

を再現する。

1.2. gauge 変換

ここでは、§1.1で述べたTLHについて、後の議論（§1.3及び§3）に都合のよい新しいgaugeを導入する。

$g := \mathrm{diag}[e^{\frac{u(s)}{2}}]$ とおき、L, M, B_n, C_m 等を次のように変換する。

$$(1.8)\qquad \begin{aligned} & L^g := g^{-1} L g \qquad M^g := g^{-1} M g \\ & B_n^g := g^{-1} B_n g + \partial_{x_n} g^{-1} \cdot g \\ & C_m^g := g^{-1} C_m g + \partial_{y_m} g^{-1} \cdot g \\ & W^g := g^{-1} W \qquad \hat{W}^g := g^{-1} \hat{W} \end{aligned}$$

さらに、x, y を光錐座標と考え、時空座標を、

$$z_n = \frac{1}{2}(x_n + y_n) \qquad t_n = \frac{1}{2}(x_n - y_n)$$

で導入すれば、(1.2) は次のようになる：

$$\begin{aligned} &L^g W^{(\infty)g} = W^{(\infty)g}\Lambda && M^g W^{(0)g} = W^{(0)g}\Lambda^{-1} \\ (1.9) \qquad &\partial_{z_n} W^g = Q_n W^g && Q_n = B_n^g + C_n^g \\ &\partial_{t_n} W^g = X_n W^g && X_n = B_n^g - C_n^g \end{aligned}$$

B_n^g, C_n^g, Q_n, X_n は、それぞれ $B_n, C_n, B_n+C_n, B_n-C_n$ という gauge potential を g によって gauge 変換したものになっている。特に、Q_1, X_1 は、次のように古くから知られている形になる。(cf [8])

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & & 0 \\ \ddots & \frac{1}{2}\partial_{t_1}u(-1) & e^{\frac{u(0)-u(-1)}{2}} & & & \\ & e^{\frac{u(0)-u(-1)}{2}} & \frac{1}{2}\partial_{t_1}u(0) & e^{\frac{u(1)-u(0)}{2}} & & \\ & & e^{\frac{u(1)-u(0)}{2}} & \frac{1}{2}\partial_{t_1}u(1) & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & & 0 \\ \ddots & \frac{1}{2}\partial_{z_1}u(-1) & e^{\frac{u(0)-u(-1)}{2}} & & & \\ & -e^{\frac{u(0)-u(-1)}{2}} & \frac{1}{2}\partial_{z_1}u(0) & e^{\frac{u(1)-u(0)}{2}} & & \\ & & -e^{\frac{u(1)-u(0)}{2}} & \frac{1}{2}\partial_{z_1}u(1) & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

この gauge での、双線形関係式による TLH の特徴づけは、次のようになる。

命題 1.1

$\hat{W}^{(\infty)g}_{(x,y)}$を下三角行列，$\hat{W}^{(0)g}_{(x,y)}$を上三角行列として，対応する対角成分が互いに逆数になっているとする。その時，

$$W^{(\infty)g}(x,y)=\hat{W}^{(\infty)g}\exp\xi(x,\Lambda),\quad W^{(0)g}=\hat{W}^{(0)g}\exp\xi(y,\Lambda^{-1})$$

とおいて，それらが任意のx,x',y,y'について，

$$W^{(\infty)g}(x,y)\,W^{(\infty)g}(x',y')^{-1}=W^{(0)}(x,y)\,W^{(0)g}(x',y')^{-1}$$

を満たすならば，これらは上のgaugeでのTLHの波動行列である。

証明は，g^2が$\hat{W}^{(0)}$の対角線部分であることと，もとのgaugeでの双線形関係式から直ちに従う。

1.3 1次元戸田格子ヒエラルヒー

1次元TLHは，次のような同値な条件をもとの(2次元)TLHに課すことで得られる。(cf [1])：

- $L+L^{-1}=M+M^{-1}$
- $\partial_{z_n}\hat{V}=0\quad(n=1,2,3,\cdots)$

ここで，

$$\hat{V}^{(\infty)}(x,y)=\hat{W}^{(\infty)}\exp(-\xi(y,\Lambda^{-1}))$$
$$\hat{V}^{(0)}(x,y)=\hat{W}^{(0)}\exp(-\xi(x,\Lambda))$$

(1.8)と同様に$\hat{V}^{g}:=g^{-1}\hat{V}$とおけば，上の条件が，

(1.10) $\bullet\ \partial_{z_n}\hat{V}^{g}=0\qquad(n=1,2,3,\cdots)$

と同値であることは容易に分かる。したがって、

$$V^{\binom{0}{\infty}}(t) := \hat{V}^{\binom{0}{\infty}g}(t)\, \exp\left(\xi(t,\Lambda) - \xi(t,\Lambda^{-1})\right) \tag{1.11}$$
$$= W^{\binom{0}{\infty}g}(z,t)\, \exp\left(-\xi(z,\Lambda) - \xi(z,\Lambda^{-1})\right)$$

とすると、[1] Proposition 1.17 と同様に、次の命題が分かる。

（この V は、[1]の V と gauge 変換の分だけ異なる。）

命題 1.2

(i) 1次元TLHの L^g, M^g, Q_n, X_n は t のみに依存する。

(ii) 同じ仮定の下で、

$$\begin{aligned} Q_1 V(t) &= V(t)(\Lambda + \Lambda^{-1}) \\ \partial_{t_n} V(t) &= X_n V(t) \end{aligned} \tag{1.12}$$

この方程式の積分可能条件として Lax 表示：

$$\partial_{t_n} Q_1 = [X_n, Q_1]$$

が得られる。

特に、$\partial_{t_1} Q = [X_1, Q_1]$ は、Flaschka によって初めて得られた戸田格子の Lax 表示である。

τ関数 (cf [1]) を使って計算すれば、新しく定めた gauge では、次のように対称性が良くなっていることが分かる。

命題 1.3

1次元TLHについて、

$${}^tQ_n = Q_n \qquad {}^t\hat{V}^{(\infty)g} = (\hat{V}^{(0)})^{-1} \qquad {}^tV^{(\infty)} = V^{(0)\,-1}$$

さらに、1次元TLHを特徴づける双線形関係式は、Vとtで記述されることが分かる。

定理1.4

(i) 1次元TLHにおいて、任意のt, t'に対して、

$$V^{(\infty)}(t)\,V^{(\infty)}(t')^{-1} = V^{(0)}(t)\,V^{(0)}(t')^{-1}$$

(ii) 逆に、可逆下三角行列$\hat{V}(t)$に対して、

$$V^{(\infty)}(t) = \hat{V}(t)\exp(\xi(t,\Lambda) - \xi(t,\Lambda^{-1}))$$

$$V^{(0)}(t) = {}^{t}V^{(\infty)}(t)^{-1}$$

とおき、これらが次を満たすとする：

$$(1.13)\quad \begin{aligned} V^{(\infty)}(t)\,V^{(\infty)}(t')^{-1} &= V^{(0)}(t)\,V^{(0)}(t')^{-1} && (\forall t, t') \\ V^{(\infty)}(t)\,(\Lambda+\Lambda^{-1})\,V^{(\infty)}(t)^{-1} &= V^{(0)}(t)\,(\Lambda+\Lambda^{-1})\,V^{(0)}(t)^{-1} && (\forall t) \end{aligned}$$

この時$V(t)$は1次元TLHの波動行列である。

形式的には、

$${}^{t}(V^{(0)-1}V^{(\infty)}) = {}^{t}V^{(\infty)}\,{}^{t}V^{(0)-1} = V^{(0)-1}V^{(\infty)}$$

であるから、1次元TLHは、対称行列のRiemann-Hilbert分解と対応していることが分かる。

§2 1次元系と保存則

2.1 古典r行列とLax pair

ここでは、[2], [9]から、古典r行列によるHamilton系とLax pairの関連づけについて引用する。

ある力学系における観測可能量の時間変化が、Poisson 括弧 $\{,\}$ と Hamiltonian H によって、

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\}$$

のように与えられているとする。今、次のような性質を持つ行列値関数 $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ があると仮定する。

$$\text{(i)} \quad \{A \overset{\otimes}{,} A\} := (\{a_{ij}, a_{kl}\})_{ik,jl} = [r, A\otimes 1 + 1\otimes A]$$

$$\text{(ii)} \quad H = \frac{1}{N}\mathrm{Tr}\,A^N$$

ここで、r は $n^2\times n^2$ 定数行列で、古典 r 行列と呼ばれる。

(i)から、次が成立することが分かる。

$$(2.1) \qquad \{\mathrm{Tr}\,A^m, A\} = [m\,\mathrm{Tr}_1((A^{m-1}\otimes 1)r), A]$$

ここで、Tr_1はテンソル積の第1成分についてのTrであり、左辺のPoisson括弧は、Aの各成分毎にとっている。上式より、

$$(2.2) \qquad \{\mathrm{Tr}\,A^k, \mathrm{Tr}\,A^l\} = 0 \qquad (\forall k, l)$$

が成り立つことが分かる。(2.1)と(ii)から、Aの時間変化はLax表示

$$(2.3) \qquad \frac{dA}{dt} = [B, A] \qquad B = \mathrm{Tr}_1((A^{N-1}\otimes 1)r)$$

で表わされ、(2.2)より、$H_m = \frac{1}{m+1}\mathrm{Tr}\,A^{m+1}$は、互いに可換な保存量になる。そこで、時間変数$t_m$に対して Hamiltonian H_mを対応させることによって、発展方程式系：

$$(2.4)\qquad \frac{\partial A}{\partial t_m} = [B_m, A] \qquad B_m = Tr_1((A^m \otimes 1)\, r)$$

が得られる。

戸田分子(=有限長自由端戸田格子)に対しては、§1にあるように、

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & O \\ \ddots & \frac{1}{2}\partial_t u(s) & e^{\frac{u(s+1)-u(s)}{2}} & & \\ & e^{\frac{u(s+1)-u(s)}{2}} & \frac{1}{2}\partial_t u(s+1) & \ddots & \\ O & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

とおき、さらに

$$H = H_1 = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\, A^2, \qquad r = \sum_{i>j}(E_{ij}\otimes E_{ji} - E_{ji}\otimes E_{ij})$$

とおけばよい。

無限長の戸田格子の場合、Aが無限行列となるので、Trは発散する。しかし、上の議論を形式的に適用して、(2.4)の形の発展方程式を得ることができる。つまり、無限個の時間変数t_mと、それに対応するHamiltonian H_mを持つ系として、(2.4) $(m = 1, 2, \cdots)$が考えられる。

以下では(2.4)を出発点として考える。

2.2 r行列型1次元戸田格子ヒエラルヒー

ここでは、§2.1で述べた観点から、1次元TLHを構成する。§1で述べた1次元TLHと区別するために、新しいヒエラル

と−を「r行列型」と呼ぶことにする。

$t=(t_1, t_2, \cdots)$を独立変数とする関数を要素とする対称3重対角行列：

$$(2.5)\qquad \begin{aligned} Q &= \mathrm{diag}[a(s)]\Lambda + \mathrm{diag}[b(s)] + \Lambda^{-1}\mathrm{diag}[a(s)] \\ a(s) &= a(s;t) \neq 0, \quad b(s) = b(s;t) \end{aligned}$$

を考える。また、

$$(2.6)\qquad Y_n := (Q^n)_+ - (Q^n)_- \qquad (n=1,2,\cdots)$$

とする。r行列型1次元TLHとは、連立方程式：

$$(2.7)\qquad \frac{\partial Q}{\partial t_n} = [Y_n, Q] \qquad (n=1,2,\cdots)$$

のことである。これは§2.1で、

- $A = Q$ 但し $a(s) = e^{\frac{u(s+1)-u(s)}{2}}$ $\quad b(s) = \frac{1}{2}\partial_{t_1} u(s)$
- $H_n = \frac{1}{n+1}\mathrm{Tr}\, Q^{n+1}$, $B_n = Y_n$
- $r = \sum_{i>j}(E_{ij}\otimes E_{ji} - E_{ji}\otimes E_{ij})$

としたものに相当する。(2.7) $n=1$が、もとの戸田格子である。

以下[1] §1と平行して議論を進めることができる。

命題 2.1

Захаров - Шабат

r行列型1次元TLH (2.7)は、Zakharov-Shabat表示：

$$(2.8)\qquad \frac{\partial Y_n}{\partial t_m} - \frac{\partial Y_m}{\partial t_n} + [Y_n, Y_m] = 0$$

と同値である。

命題 2.2

(i) $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 行列値関数 $V(t)$ に関する線形問題：

$$(2.9)\qquad \begin{aligned} Q\,V(t) &= V(t)\,(\Lambda+\Lambda^{-1}) \\ \frac{\partial}{\partial t_n} V(t) &= Y_n\, V(t) \qquad (n=1,2,\cdots) \end{aligned}$$

は次の形の解を持つ。

$$(2.10)\qquad V^{(\infty)}(t) = \hat{V}(t)\exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty} t_n\varphi_n(\Lambda)\Big)$$

ここで、

$$\hat{V}(t) = \sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{diag}\,[\,\hat{v}_j(s;t)\,]\,\Lambda^{-j},\quad \hat{v}_0(s)\neq 0$$

$$\varphi_n(\Lambda) = (\Lambda+\Lambda^{-1})^n_+ - (\Lambda+\Lambda^{-1})^n_- = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{sgn}(2k-n)\binom{n}{k}\Lambda^{2k-n}$$

(ii) この時、$V^{(0)} = {}^t(V^{(\infty)})^{-1} = {}^t\hat{V}(t)^{-1}\exp\big(\sum_{n=1}^{\infty} t_n\varphi_n(\Lambda)\big)$ も (2.9) の解である。

§1 と同様に、r 行列型 1 次元 TLH も、この波動行列 $V^{(\infty)}$ の双線形関係式で完全に特徴づけられる。

定理 2.3

(i) 命題 2.2 の $V^{(\infty)}(t)$ は、次式を満足する。

$$(2.11)\qquad V^{(\infty)}(t)\,V^{(\infty)}(t')^{-1} = V^{(0)}(t)\,V^{(0)}(t')^{-1} \qquad (\forall t, t')$$

(ii) 逆に (2.10) の形の $V^{(\infty)}(t)$ と、$V^{(0)}(t) = {}^tV^{(\infty)}(t)^{-1}$ について (2.11) が成り立ち、更に、

$$(2.12)\qquad (Q:=)\ V^{(\infty)}(t)\,(\Lambda+\Lambda^{-1})\,V^{(\infty)}(t)^{-1} = V^{(0)}(t)\,(\Lambda+\Lambda^{-1})\,V^{(0)}(t)^{-1}$$

となるならば、Q は r 行列型 1 次元 TLH の解を与え、$V^{(\infty)}(t)$ はその波動行列となる。

2.3 §1との比較

§1では、[1] の1次元TLHの解は、次の波動行列とその双線形関係式で決定されることを述べた。

(I) 可逆下半三角行列 $\hat{V}(t)$

(II) $V^{(\infty)}(t) = \hat{V}(t) \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n (\Lambda^n - \Lambda^{-n})\right)$, $V^{(0)}(t) = {}^t V^{(\infty)}(t)^{-1}$

(III) $V^{(\infty)}(t) V^{(\infty)}(t')^{-1} = V^{(0)}(t) V^{(0)}(t')^{-1} \quad (\forall t, t')$

(IV) $V^{(\infty)}(t) (\Lambda + \Lambda^{-1}) V^{(\infty)}(t)^{-1} = V^{(0)}(t) (\Lambda + \Lambda^{-1}) V^{(0)}(t)^{-1} \quad (\forall t)$

§2では、Y行列型1次元TLHの解も、同様に次のデータで決定されることを示した。(上と区別するために、時間変数を $s = (s_1, s_2, \cdots)$ で表す。)

(I)′ 可逆下半三角行列 $\hat{V}(s)$

(II)′ $V^{(\infty)}(s) = \hat{V}(s) \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} s_n \varphi_n(\Lambda)\right)$, $V^{(0)}(s) = {}^t V^{(\infty)}(s)^{-1}$

(III)′ $V^{(\infty)}(s) V^{(\infty)}(s')^{-1} = V^{(0)}(s) V^{(0)}(s')^{-1} \quad (\forall s, s')$

(IV)′ $V^{(\infty)}(s) (\Lambda + \Lambda^{-1}) V^{(\infty)}(s)^{-1} = V^{(0)}(s) (\Lambda + \Lambda^{-1}) V^{(0)}(s)^{-1} \quad (\forall s)$

これで明らかな通り，上の二つの1次元TLHは、次のように時間変数を同一視すれば、実は同じものである：

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n (\lambda^n - \lambda^{-n}) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \varphi_n(\lambda)$$

$$\varphi_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{sgn}(2k-n) \binom{n}{k} \lambda^{2k-n}$$

つまり、t と s は互いに相手の1次結合で表され、

$\mathbb{t} = {}^t(t_1, t_2, \cdots)$, $\mathbb{s} = {}^t(s_1, s_2, \cdots)$ とすれば、

$$\mathbb{t} = C \mathbb{s} \qquad C = (C_{nm})_{n,m \in \mathbb{N}}$$

$$C_{nm} = \begin{cases} \binom{m}{\frac{m+n}{2}} & n \leqq m \text{ かつ } n \equiv m \pmod 2 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

という関係になる。

したがって、$\vec{\partial}_t = (\partial_{t_1}, \partial_{t_2}, \cdots)$, $\vec{\partial}_s = (\partial_{s_1}, \partial_{s_2}, \cdots)$ に対して、

$$\vec{\partial}_s = \vec{\partial}_t \cdot C$$

r 行列型の方は、作り方から、$\partial_{s_n} = \{H_n, \cdot\}$ という対応があったので、時間 t_n に対応する(形式的な) Hamiltonian $\tilde{H}_n$ は、

$$(\tilde{H}_1, \tilde{H}_2, \cdots) = (H_1, H_2, \cdots)\, C^{-1}$$

$$H_n = \frac{1}{n+1} \operatorname{Tr} Q(s)^{n+1} = \frac{1}{n+1} \operatorname{Tr} Q_1(t)^{n+1}$$

で与えられることがわかる。

以上が、1次元系についての結果である。

§3 2次元系と保存則

ここでは、Olive と Turok が [3], [4] で、2次元戸田格子の保存量を Hamiltonian として構成した発展方程式系が、TLH と一致することを示す。

[3], [4] では有限階 Kac-Moody Lie 環を基礎としているので、まずそれを $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 行列(つまり A_∞ 型)について読みかえる作業から始める。

$u(s; z_0, t_0)$ を $s\in\mathbb{Z}$, z_0, t_0 を変数とする関数とし、$v = \frac{\partial u}{\partial t_0}$ との間に正準交換関係があるとする:

$$\{u(s;z_0,t_0),\ v(s';z_0',t_0)\} = \delta_{ss'}\,\delta(z_0-z_0')$$

行列Aを,

$$A = \mathrm{diag}[e^{\frac{u(s+1)-u(s)}{2}}]\Lambda + \mathrm{diag}[\tfrac{1}{2}v(s)] + \Lambda^{-1}\mathrm{diag}[e^{\frac{u(s+1)-u(s)}{2}}]$$

で定めると,

(3.1) $\{A(z_0,t_0)\overset{\otimes}{,}A(z_0',t_0)\} = [r,\ A(z_0,t_0)\otimes 1 + 1\otimes A(z_0',t_0)]\,\delta(z_0-z_0')$

が成立する。但しrは次のどちらでもよい。

(3.2)
$$r_+ = \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{Z}} E_{ii}\otimes E_{ii} + \sum_{i>j} E_{ij}\otimes E_{ji}$$
$$r_- = -\frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{Z}} E_{ii}\otimes E_{ii} - \sum_{i<j} E_{ij}\otimes E_{ji} = -{}^t r_+$$

このAを、$\exp(\pm\frac{u}{2})$ $(u=\mathrm{diag}[u(s)])$でgauge変換すると、次の形を持つ$A^{\lessgtr}$になる:

(3.3)
$$A^{<} := e^{\frac{u}{2}} A e^{-\frac{u}{2}} + \partial_{z_0} e^{\frac{u}{2}} e^{-\frac{u}{2}}$$
$$= \Lambda + \frac{1}{2}(\partial_{z_0}+\partial_{t_0})u + \mathrm{diag}[e^{u(s)-u(s-1)}]\Lambda^{-1}$$

(3.4)
$$A^{>} := e^{-\frac{u}{2}} A e^{\frac{u}{2}} + \partial_{z_0} e^{-\frac{u}{2}} e^{\frac{u}{2}}$$
$$= \Lambda^{-1} + \frac{1}{2}(\partial_{t_0}-\partial_{z_0})u + \mathrm{diag}[e^{u(s+1)-u(s)}]\Lambda$$

ここで次の周期性の仮定を置く:

ある$N_0\in\mathbb{N}$, $L>0$に対して,

(3.5) $u(s;z_0,t_0) = u(s+N_0;z_0,t_0) = u(s;z_0+2L,t_0)$

この時, 下三角行列$\omega^{<}$及び上三角行列$\omega^{>}$:

(3.6)
$$\omega^{\lessgtr} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{diag}[\omega_j^{\lessgtr}(s;z_0,t_0)]\Lambda^{\mp j}$$

但し $\omega_0^{\lessgtr}\equiv 1$, 各$\omega_j^{\lessgtr}$は(3.5)の周期性を持つ.

が存在して、$A^{\lessgtr}$を$\omega^{\lessgtr}$によってgauge変換すると次の形になる。

$$(3.7)\quad a^{\lessgtr}(z_0,t_0) := (\omega^{\lessgtr})^{-1}A^{\lessgtr}\omega^{\lessgtr} - (\omega^{\lessgtr})^{-1}\partial_{z_0}\omega^{\lessgtr} = \Lambda^{\pm 1} + \sum_{j=0}^{\infty} c_j^{\lessgtr}(z_0,t_0)\Lambda^{\mp j}$$

ここで、$c_0^< = c_0^> = \left(\sum_{s=1}^{N_0}\frac{1}{2}v(s)\right)/N_0$ =(平均運動量)/2である。

[3],[4]にしたがって議論すれば、

$$H_m^{\lessgtr} := \int_{-L}^{L} c_m^{\lessgtr}\, dz_0$$

として, $H_m^< \cdot \sum_{\mathbb{Z}} 1$ [resp. $H_m^> \cdot \sum_{\mathbb{Z}} 1$] をHamiltonianとする運動方程式は、時間変数を x_n [resp. y_n] とすると、次のように、積分可能条件(=曲率0条件=Zakharov-Shabat表示)で表されることが分かる:

$$(3.8)\quad [\partial_{z_0} - A,\ \partial_{x_n} - A_n^<] = 0$$
$$\left[\text{resp.}\quad [\partial_{z_0} - A,\ \partial_{y_n} - A_n^>] = 0\right]$$

但し、$A_n^{\lessgtr}$ は、Tr_2 をテンソル積の第2成分についての Tr として、

$$A_n^< = \mathrm{Tr}_2\left((1 \otimes (e^{-\frac{u}{2}}\omega^<)\Lambda^n (e^{-\frac{u}{2}}\omega^<)^{-1}) r_+ \right)$$
$$\left[\text{resp.}\quad A_n^> = \mathrm{Tr}_2\left((1 \otimes (e^{\frac{u}{2}}\omega^>)\Lambda^{-n} (e^{\frac{u}{2}}\omega^>)^{-1}) r_- \right)\right]$$

$H_n^{\lessgtr}$ は1 siteあたりの平均Hamiltonian、$c_m^{\lessgtr}$ はHamiltonian 密度と解釈できる。

$r_\pm$ が古典Young-Baxter方程式を満たすので、$A_n^{\lessgtr}$ 間での曲率0条件が成り立つことも示されている。(cf [4])

$$[\partial_{x_n} - A_n^<,\ \partial_{x_m} - A_m^<] = 0$$
$$(3.9)\quad [\partial_{y_n} - A_n^>,\ \partial_{y_m} - A_m^>] = 0$$
$$[\partial_{x_n} - A_n^<,\ \partial_{y_m} - A_m^>] = 0$$

TLHの波動行列$W^{(\infty)}$との関係を見るために、z_0については周期性を持たない次の三角行列を考える：

(3.10) $$\tilde{\omega}^{\lessgtr} := \omega^{\lessgtr} \exp\int_0^{z_0}\left(\sum_{j=1}^{\infty} c_j^{\lessgtr}\Lambda^{\mp j}\right)dz_0'$$

（expの中は、対角成分が0の三角行列なので、$\tilde{\omega}^{\lessgtr}$はwell-definedである。）この$\tilde{\omega}^{\lessgtr}$で$A^{\lessgtr}$をgauge変換すれば、

(3.11) $$\Lambda^{\pm 1} + c_0^{\lessgtr} = (\tilde{\omega}^{\lessgtr})^{-1}A^{\lessgtr}\tilde{\omega}^{\lessgtr} - (\tilde{\omega}^{\lessgtr})^{-1}\partial_{z_0}\tilde{\omega}^{\lessgtr}$$

となる。

したがって、全運動量＝0（$c_0^{<} = c_0^{>} = 0$）という条件下では、以上はTLHと次のような対応がつく。

$$\begin{array}{rcl}
\text{上の } x_n & \longmapsto & \text{TLH の } x_n \\
y_n & \longmapsto & -y_n \\
z_0, t_0 & \longmapsto & z_1, t_1 \\
u & \longmapsto & u \\
e^{-\frac{u}{2}}\tilde{\omega}^{<} & \longmapsto & \hat{W}^{(\infty)g} \\
e^{\frac{u}{2}}\tilde{\omega}^{>} & \longmapsto & \hat{W}^{(0)g} \\
A_n^{<} & \longmapsto & B_n^g = g^{-1}B_n g + \partial_{x_n}g^{-1}\cdot g \\
A_n^{>} & \longmapsto & (-C_n)^g = g^{-1}(-C_n)g + \partial_{(-y_n)}g^{-1}\cdot g \\
\text{つまり、} \partial_{x_n} - A_n^{<} & \longmapsto & \partial_{x_n} - B_n^g \\
\partial_{y_n} - A_n^{>} & \longmapsto & \partial_{(-y_n)} - (-C_n)^g \\
A & \longmapsto & Q_1
\end{array}$$

(3.5)の仮定があるため、対応するTLHのL, M, W, B_n, C_n等は周期行列になる。（すなわち、対角線方向にN_0ずらしても同じ行列である。）さらに、L, M, B_n, C_nはz_1について$2L$の周期を持つ。

ここでは触れなかったが、H_n^sはτ関数で表すことができ、logτは、Hamiltonian密度の母関数となる。(但しC_n^sとは異なるHamiltonian密度について。) また、[7]では共役随伴軌道法を使用して、上と同じHamiltonianに対して、B_n (B_n^sではなく)を導いている。

以上が2次元系についての結果である。

詳しい証明等は[10]を御参照下さい。

参考文献

[1] Ueno, K., Takasaki, K.: Toda Lattice Hierarchy, in *Group Representations and Systems of Differential Equations*, Adv. Stud. in Pure Math. 4, (1984) Kinokuniya, Tokyo 1-95.

[2] Olive, D. Turok, N.: Algebraic Structure of Toda Systems, Nucl. Phys. B220[FS8] (1983), 491-507.

[3] Olive, D. Turok, N.: Local Conserved Densities and Zero-Curvature Conditions for Toda Lattice Field Theories,

Nucl. Phys. B257[FS14] (1985), 277-301.

[4] Olive, D., Turok, N.: The Toda Lattice Field Theory Hierarchies and Zero-Curvature Conditions in Kac-Moody Algebras, *Nucl. Phys.* B265[FS15] (1986), 469-484.

[5] Faddeev, L.D.: Integrable Models in (1+1)-Dimensional Quantum Field Theory, in *Développements Récents en Théorie des Champs et Mécanique Statistique*, Les Houches Summer School Session XXXIX, (1984) North Holland, Amsterdam, 561-608.

[6] Faddeev, L.D., Takhtajan, L.A.: Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons, (1986) Nauka, in Russian; Engl. transl. (1987) Springer

[7] Reyman, A.G., Semenov-Tian-Shansky, M.A.: Hamiltonian structure of equations of *Kadomtsev-Petviashvili type*, *Zap. Nauchn. Semi.* LOMI 133 (1984) 212-227; Engl. transl. in *J. Sov. Math.* 31 (1985) 3399-3410.

[8] Mikhailov, A.V., Olshanetsky, M.A., Perelomov, A.M.: Two-Dimensional Generalized Toda Lattice, Commun. Math. Phys. 79 (1981) 473-488.

[9] 小寺武康：戸田格子とLie代数，「リー環と微分方程式」所収，上智大学数学講究録23 (1986)

[10] 武部尚志：東京大学修士論文(1988年度)；英語版 Toda Lattice Hierarchy and Conservation Laws 準備中