数理解析研究所講究録
第694巻 1989年 146-164

Introduction to the chiral anomaly in superfluid ^{3}He-A and boojums* on the Fermi surface

新潟大・教養 田島 慎一
(Shinichi Tajima)

私達の世界にはさまざまな物質があり、その性質も実に多彩である。これらの物質のうちには、私達の日常的な常識をはるかに越えた不思議な振舞いをするものが多くあるという。特に、巨視的量子効果に由来する特異な物性を示すもののうちには数学の対象としてたいへん興味深いものがある。ここでは、Volovik 達による超流動 ^{3}He-A に関する一連の仕事のうちから、その一部を紹介したい。

§1 では超流動 ^{3}He-A 相について大雑把な説明を与える。§2 において ^{3}He-A における mass current の異常項と秩序パラメターの phase の関係を述べる。§3 では ^{3}He-A における mass current の異常項と chiral anomaly の関係を示す。

*) Lewis Carroll's poem "The Hunting of the Snark"

§.1. 超流動 ^{3}He−A と Cooper 対

ヘリウムは閉殻電子をもつ最も単純な元素であり，室温では理想気体に近い振舞いをする。しかし極低温物理の観点からみると，ヘリウムは最も特異で興味ある元素の一つといえる。ヘリウムは質量が小さく原子間引力が弱いために，量子力学的零点振動により，常圧を含む広い圧力範囲にわたって絶対零度まで液体状態にとどまる。ヘリウムの2つの同位元素 ^{4}He，^{3}He のうち ^{3}He は自然界には極めて少なく，トリチウム（三重水素）の β 崩壊を利用して人工的に生産される。その為，^{3}He の研究が実際に可能になったのは第二次世界大戦以後のことであるといわれている。たとえば最初の液化は 1948 年に Sydoriack，Grilly および Hammel らによって行われた。

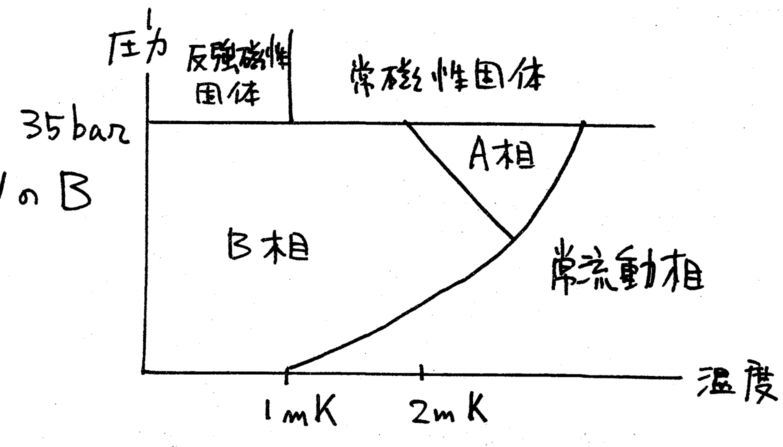
さて，^{4}He の原子核は 2個の陽子と 2個の中性子から成り Bose 粒子であるのに対し，^{3}He 原子核は 2個の陽子と 1個の中性子から成る Fermi 粒子である。この核スピンの差からくる統計性の違いが，両者の低温における振舞いを全く異なるものにする。実際，1972年に Osheroff，Lee，Richardson により ^{3}He が $T_c = 2.7$ mK で超流動状態に転移することが観測されたが，この超流動の

出現機構は ^{4}He の超流動の場合とは全く異なることが明らかにされている。

^{3}He と同じく Fermi 粒子である金属中の伝導電子は、低温においてフォノンとの相互作用をなかだちにして Cooper 対を形成し、それがあたかも Bose 粒子のように振舞う。その Cooper 対たちが、巨視的にもコヒーレントに振舞い超伝導状態が起こる。この 1957年の Bardeen, Cooper, Schrieffer による超伝導理論（BCS理論）の建設直後から ^{3}He の超流動性が予言され、1961年には Anderson と Morel、1963年に Balian と Werthamer により ^{3}He の超流動の基礎理論が作られた。彼らのモデルはそれぞれ ABMモデル、BWモデルと呼ばれている。

外部磁場のない場合には、図に示すように、^{3}He は2つの超流動相 ^{3}He-A と ^{3}He-B を持つことが確かめられている。A相は ABMモデル、B相は BWモデルが対応するとされている。

ABM の A、BW の B と憶えるとよい。



BCS超伝導理論においては Cooper対をなす2つの電子の間に働く引力は、電子－フォノン相互作用をなかだちにしたものであるが、^{3}He-A の場合は ^{3}He原子－paramagnon* 相互作用をなかだちにして Fermi面近くの ^{3}He原子が Cooper対をなすと考えられている。

*) もともと ^{3}He における paramagnon の理論は、液体 ^{3}He の場合、その正常相の比熱が当初 Landau の量子液体の理論から期待されるものと異なる振舞いをすることを説明する上で、Doniach と Engelsberg (1966) らによって導入されたものである。低温においては正常相の ^{3}He の核スピン帯磁率が大きな値を持ち、長波長のスピンのゆらぎが起こっており、液体 ^{3}He はいわば強磁性相への転移に近い状態にあると見做すことができる。これらのゆらぎが比較的長い寿命を持つことから、これをある種の磁気的素励起とみなして、paramagnon と呼んだ。Doniach と Engelsberg は、この paramagnon の仮想放出過程を考慮することにより 100 mK 以下における正常相の比熱に $T^3\log T$ 項があることを説明した。

Layzer と Fay (1971) は ^{3}He原子－paramagnon 相互作用をもとにして ^{3}He原子間に働く力が、singlet対に対しては斥力を、triplet対に対しては引力となることを示

した。更に Anderson - Brinkman (1972) は Berk-Schrieffer や Doniach-Engelsberg らの理論を使って ABM モデルの安定性を論じた。

このように超流動 ^{3}He-A 相の出現機構はかなり複雑であるが、^{3}He-A 相の Cooper 対はスピン 1, 軌道角運動量 1 なる p 波スピン三重項対であると考えられている。その結果、秩序パラメターはスカラー量ではなく、大きな内部自由度を持つことになる (Volovik-Mineev (1977))。

§2. 秩序パラメターの phase と boojums.

この節では、まず最初に超流動 ^{3}He-A 相の秩序パラメターの phase と boojum について説明する。次に $\vec{l}$-texture と mass current の異常項について説明する。最後に、mass current の異常項と boojums の関係、を明らかにした Volovik - Mineev (1982) の論文を紹介する。

超流動 ^{3}He-A 相の秩序パラメターのうち軌道角運動量部分は、互いに直交する 2 つの単位ベクトル Δ_1, Δ_2 を使って、const$\cdot(\Delta_1 + i\Delta_2)$ と表わせる。但し外積 $\Delta_1 \times \Delta_2 = \vec{l}$ は Cooper 対の軌道角運動量の量子化軸の方向を与える単位ベクトルである。

Fermi波数を k_F で表わすと、Fermi準粒子のエネルギースペクトル $E(k)$ は

$$E^2(k) = \varepsilon^2(k) + |\Delta(k)|^2$$

で与えられ、波数 k に依存した形になる。但し

$$\varepsilon(k) = \hbar^2 (k^2/2m - k_F^2/2m)$$

$$\Delta(k) = (\Delta_0/k_F)\, k\cdot(\Delta_1 + i\Delta_2)$$

であり、m は質量、Δ_0 はエネルギーギャップの最大値を表わす。特に Fermi面上の２点、$k = \pm k_F \vec{l}$ (boojum と呼ばれる) においては エネルギーギャップが消えてしまうという性質を持つ。このことが ^3He−A相を特異な超流動相にすることをこれから説明したい。その為に phase について説明する。

$$\arctan\left(\frac{k\cdot\Delta_2}{k\cdot\Delta_1}\right) = \Phi(k)$$

とおくと

$$\Delta(k) = |\Delta(k)|\, e^{i\Phi(k)}$$

となるが、秩序パラメターの各成分に phase factor $e^{i\alpha}$ を乗ずることは $\Phi \longrightarrow \Phi + \alpha$ とおきかえることと同じになることから 上の $\Phi(k)$ は phase of the order parameter と

呼ばれている。しかしこの phase $\Phi(k)$ は Fermi 面上の2点、$k = \pm k_F \vec{l}$ において定義されず、多価函数となる。k が boojum のまわりを一周すると 2π ほど値がかわることになる。

さて、秩序パラメターの local symmetry axis $\vec{l}$ が空間的に一様である場合には supercurrent velocity v_s は phase Φ を使って $v_s = \frac{\hbar}{2m} \nabla\Phi$ で表わせる。従ってこの場合には phase Φ は He II 等の通常の Bose 凝縮相における phase と同じ役割を果たしているといってもよい。しかしながら、$\vec{l}$ が空間的に一様でなく、位置 r に依存している場合、すなわち $\vec{l}$-texture（織目構造）が存在する場合には Mermin-Ho (1976) が示したように一般には $\mathrm{rot}\, v_s \neq 0$ であり、phase Φ の gradient として v_s を表示することはできない。実際、v_s と $\vec{l}$ との間には

$$\nabla_i v_{s_j} - \nabla_j v_{s_i} = \frac{\hbar}{2m} \vec{l} \cdot (\nabla_i \vec{l} \times \nabla_j \vec{l})$$

なる関係があるという。このことからもわかるように、$\vec{l}$-texture の存在は超流動 ^{3}He-A の基本的性質と係わる。

次に、$\vec{l}$-texture のもとでの mass current の異常項について説明する。

通常のhydrodynamicsの範囲では ^{3}He-Aのmass currentは ρ を密度とおくと

$$\rho v_s + \frac{1}{2} \mathrm{rot}\left(\rho \frac{\hbar}{2m} \vec{l}\right)$$

で与えられる。この形ならばGalilean invarianceが成立する(たとえばWölfle(1979))。しかしながらCross(1975), Mermin-Ho(1976), Mermin-Muzikar(1980)らによると，実際の ^{3}He-Aにおける巨視的mass currentは

$$j = \rho v_s + \frac{1}{2} \mathrm{rot}\left(\rho \frac{\hbar}{2m} \vec{l}\right) - \frac{\hbar}{2m} C_0 \vec{l}\,(\vec{l} \cdot \mathrm{rot}\, \vec{l})$$

により与えられるという(係数 C_0 についてはMermin-Muzikarをみよ)。この式の第三項はGalilean invarianceを破るので異常項と呼ばれている.

Volovik-Mineev(1982)はこの異常項

$$j_{anom} = -\frac{\hbar}{2m} C_0 \vec{l}\,(\vec{l} \cdot \mathrm{rot}\, \vec{l})$$

とboojumsとの関係をミクロな議論を使って明らかにした。1982年の彼らの論文の内容をこれから紹介する。

まず彼らは Green 関数に対する Gor'kov 方程式を考え、それを gradient expansion 近似することにより、mass current について次のミクロな関係を得た。

$$j = \frac{1}{2}\sum k\left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial k}\frac{\partial n_k}{\partial r} - \frac{\partial n_k}{\partial k}\frac{\partial \Phi_k}{\partial r}\right)$$

ここに n_k は準粒子の分布関数を ** する。次に部分積分をすることにより

$$(\#)\quad j = \frac{1}{2}\sum n_k \nabla \Phi_k + \frac{1}{2}\nabla_i\left(\sum k\, n_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial k_i}\right) - \frac{1}{2}\sum k\, n_k\left(\nabla\frac{\partial}{\partial k} - \frac{\partial}{\partial k}\nabla\right)\Phi_k$$

と変形する（彼らの記号は注意しないと誤解しやすいと思うが、原論文のままの記号を使う）。上の式に

$$\Phi_k = \mathrm{arctg}\left(\frac{\Delta_2\cdot k}{\Delta_1\cdot k}\right)$$

を代入して計算を実行する。

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial k} = \frac{\vec{l}\times k}{|\vec{l}\times k|^2}$$

$$\frac{\hbar}{2m}\nabla\Phi_k = v_s + \frac{\hbar}{2m}(k\cdot\vec{l})\frac{(k\times\vec{l})\cdot\nabla\vec{l}}{|k\times\vec{l}|^2}$$

より (#) の右辺の第一項と第二項の和は

$$\rho v_s + \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\left(\rho\cdot\frac{\hbar}{2m}\vec{l}\right)$$

となることが確かめられる。次に(#)の右辺の第三項を考える。Φ_k が boojums において特異性を持つためにそこでは

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial k}-\frac{\partial}{\partial k}\frac{\partial}{\partial r}\right)\Phi_k(r) = 2\pi\,(\vec{l}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{l})\,(\hat{k}\cdot\vec{l})\,\delta(k_\perp)$$

但し $k_\perp = k - \vec{l}\,(k\cdot\vec{l})$ となりδ−函数が表われる。この為に(#)の第三項が消えず j_{anom} を与える

§3 Bogolyubov 方程式と chiral anomaly

前節で紹介したVolovikらの結果により，^3He-A の anomalous current は Fermi面上にエネルギー・ギャップの消えてしまう点（boojums）があることに由来することが明らかにされた。1985年に発表された論文でVolovikは，$\mathrm{rot}\,\vec{l} \parallel \vec{l}$ の場合を例にとり，^3He-A における anomalous current が chiral anomaly と類似した仕組みによるものであることを示し，anomalous current が生じる機構をミクロな立場から明らかにした。この結果は Volovik−

Mineev (1981) らが、現象論的立場から主張していた仮説が正しいことを立証する。

この節では Volovik (1985) の論文を紹介する。記号等は原論文に従うことにしたので、前節のものとは若干異なる。

まず triplet 対に対する BCS Hamiltonian を BCS factorization 近似した effective Hamiltonian を考える。次に、それに Bogolyubov 変換を施し、次の Bogolyubov 方程式を導く。

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \dfrac{\hat{p}^2}{2m} - \mu & \dfrac{1}{2k_F}(\vec{\Delta}\hat{p} + \hat{p}\vec{\Delta}) \\ \dfrac{1}{2k_F}(\vec{\Delta}^*\hat{p} + \hat{p}\vec{\Delta}^*) & \mu - \dfrac{\hat{p}^2}{2m} \end{pmatrix}$$

但し

$\hat{p} = \frac{1}{i}\nabla$, μ は化学ポテンシャル.

wave function $\psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ は Bogolyubov quasiparticle,

$\vec{\Delta} = \Delta_0(e_1(r) + ie_2(r))$ において e_1, e_2 は

$|e_1| = |e_2| = 1$, $e_1 \perp e_2$, $e_1 \times e_2 = \vec{l}$

をみたすものである。

$\mathrm{rot}\,\vec{l} \parallel \vec{l}$ なる場合を考えているので，秩序パラメター を原点の近くで（一次の項まで）展開したとき

$$e_1(r) + i e_2(r) = \hat{x} + i\hat{y} - i\hat{z}Bx$$

の形をしていると仮定する。 但し $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ はそれぞれ x軸，y軸，z軸方向の単位ベクトルを表わす。 このとき $\mathrm{rot}\,\vec{l}$ は z軸方向を向いており，$\vec{l}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{l} = B$ となっていることに注意する。

Pauli 行列 $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ を使うと

$$\hat{H} = \sigma_3\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} - \mu\right) + \frac{\Delta_0}{k_F}\left(\sigma_1 \hat{p}_x - \sigma_2\left(\hat{p}_y - \hat{p}_z Bx\right)\right)$$

と表わせるので

$$\psi = e^{i k_z z + i k_y y}\,\Phi(x)$$

とかくと Φ に対する方程式

$$\left\{\sigma_3 \varepsilon + \frac{\Delta_0}{k_F}\left(\sigma_1 \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x} - \sigma_2\left(k_y - k_z Bx\right)\right)\right\}\Phi = E\Phi$$

を得る。 ここで $\varepsilon \fallingdotseq \dfrac{k_z^2}{2m} - \mu$ と考えてよい。

この方程式は"磁場"のもとでの Dirac 型の方程式と

同等である。 さてこの方程式のスペクトルは "Landau level" n を使って

$$E_{n,k_z} = \left\{ \varepsilon^2 + 2n\,|Bk_z|\left(\frac{\Delta_0}{k_F}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign}\varepsilon$$

で与えられ、対応する波動関数 Ψ_n は、 $B>0$ とすると、

$k_z < 0$ のとき

$$\Psi_n = \begin{pmatrix} u_m f_m(\tilde{x}) \\ i v_m f_{m-1}(\tilde{x}) \end{pmatrix}$$

$k_z > 0$ のとき

$$\Psi_n = \begin{pmatrix} u_m f_{n-1}(\tilde{x}) \\ i v_m f_n(\tilde{x}) \end{pmatrix}$$ で与えられる。

但し

$\tilde{x} = x - {k_y}/{Bk_z}$, $f_{-1} \equiv 0$.

f_m は調和振動の eigenfunction .

$2u_m^2 = 1 + \dfrac{\varepsilon}{E_n}$, $2v_m^2 = 1 - \dfrac{\varepsilon}{E_n}$ である。

ここで $m=0$ とおくと $E_0 = \varepsilon$ となり、$v_m = 0$ を得る。従って $k_z > 0$ に対しては $n=0$ の状態が存在しないことがわかる。 $n \neq 0$ は superfluid 成分、$n=0$ は normal 成分に対応する。

"磁場"の方向であるz軸方向のcurrentを考えると non zero Landau levelsからの寄与はない。zero Landau levelの状態密度$\nu(\varepsilon)$はεに依らず$|B|/2\pi^2$であるとすると"磁場"方向のcurrent jは

$$j = e\int_{k_z<0} k_z\,\nu(\varepsilon)\,d\varepsilon = -e\frac{k_F^3}{6\pi^2}B$$

$$= -\frac{\hbar}{2m}\cdot\mathrm{const}\cdot\vec{l}\,(\vec{l}\,\mathrm{rot}\,\vec{l}\,)$$

となる。

従ってj_{anom}は、場の理論におけるchiral anomalyと類似した機構によって生じることが示された。結局$\vec{l}$-textureが存在するときは$\mathrm{rot}\,\vec{l}$が"磁場"の役割をなし、chiral currentが生じるといえる。

^{3}He-Aにおけるanomalous currentについてもっと詳しい議論や、その後の進展についてはBalatskii-Volovik-Konyshev (1986), Volovik (1987), Balatskii-Konyshev (1987)の論文がある。またGarg-Nair-Stone (1987), Stone-Gaitan (1987)らの興味深い研究がある。

文献

A. Abouelsaood (1985): Relation between the chiral anomaly and the quantized Hall effect. Phys Rev. Lett 54, 1973–1975

D. Bailin & A. Love (1986): Introduction to Gauge Field Theory. Adam Hilger.

A. V. Balatskii, G. E. Volovik & V. A. Konyshev (1986): On the chiral anomaly in superfluid ^3He-A. Sov Phys JETP 63. 1194–1204.

A. B. Balatskii & V. A. Konyshev (1987): The anomalous superfluid current in ^3He-A and the index theorem. Sov. Phys. JETP 65, 474–483.

R. Combescot & T. Dombre (1983): Superfluid current in ^3He A at T=0. Phys Rev. B 28, 5140–5149. (1986) Twisting in superfluid ^3He-A and consequences of hydrodynamics at T=0. Phys Rev. B 33, 79–90.

T. Dombre & R. Combescot (1984): Excitation spectrum and superfluid density of ^3He-A at T=0: Phys Rev B 30, 3765–3769.

A. Garg & V. P. Nair & M. Stone (1987): Non-Abelian Bozonization and topological aspects of BCS systems: Anals of Phys. 173, 149–162.

真木和美 (1986): 超流動ヘリウム3 —最近の話題, 超低温の物性物理, 6章, 阿部・斯波共編, 培風館.

N. D. Mermin & Tin-Lun Ho (1976): Circulation and angular momentum in the A phase of superfluid Helium 3. Phys Rev. Lett 36 594–597

N. D. Mermin & P. Muzikar (1980): Cooper pairs versus Bose condensed molecules; The ground-state current in superfluid ^{3}He-A. Phys Rev B 21, 980–989

M. M. Salomaa & G. E. Volovik (1987): Quantized vortices in superfluid ^{3}He. Rev. Mod. Phys 59, 533–613.

M. Stone (1985): Elementary derivation of one-dimensional fermi-number fractionalization. Phys Rev B 31. 6112–6115

M. Stone, A. Garg & P. Muzikar (1985): Possible resolution of the angular momentum paradox: fractional charge, twist, and topology in ^{3}He-A, Phys. Rev. Lett 55, 2328–2331.

M. Stone & F. Gaitan (1987): Topological charge and chiral anomalies in Fermi superfluids. Anals of Phys. 178, 89–109

G. E. Volovik, V. P. Mineev (1981): Orbital angular momentum and orbital dynamics: ^{3}He-A and the Bose liquid. Sov Phys JETP 54, 524–530, (1982): Current in superfluid Fermi liquids and the structure of vortex cores. Sov. Phys

JETP 56, 579-586.

G. E. Volovik (1984): Superfluid properties of ^{3}He-A. Sov. Phys. Usp 27, 363-384. (1985): Normal Fermi liquid in a superfluid ^{3}He-A at $T=0$ and the anomalous current. JETP. Lett 42, 363-367. (1987): Peculiarities in the dynamics of superfluid ^{3}He-A: analog of chiral anomaly and of zero-charge. Sov. Phys. JETP. 65, 1193-1201.

G. E. Volovik & A. V. Balatski (1985): Boojums on the Fermi surface in ^{3}He-A and Hamiltonian dynamics of the orbital momentum. J. Low Temp. Phys. 58. 1-10.

———　———　———

アブリコソフ. ゴリコフ. ジャロシンスキー. 場の量子論の方法. 東京図書.

P. W. Anderson & G. Toulouse (1977): Phase slippage without vortex cores: vortex textures in superfluid ^{3}He. Phys. Rev. Lett 38, 508-511

P. W. Anderson. W. F. Brinkman (1978) Theory of anisotropic superfluidity in ^{3}He. The Physics of Liquid and Solid Helium. Part II. (ed. K. H. Benneman. J. B. Ketterson) Wiley.

R. Balian & N. R. Werthamer (1963). Superconductivity with pairs in a relative p wave. Phys. Rev 131, 1553-1564

J. Bardeen, L. N. Cooper & J. R. Schrieffer (1957): Theory of superconductivity. Phys Rev. 108, 1175–1204.

A. L. Fetter & J. D. Walecka (1971). Quantum theory of many particle systems. McGraw-Hill.

R. P. Feynman & A. R. Hibbs (1965): Quantum Mechanics and Path Integrals. McGraw-Hill.

M. Göckeler & T. Schücker (1987): Differential Geometry, gauge theories, and gravity. Cambridge Univ Press.

L. P. Gor'kov (1958): On the energy spectrum of superconductors. Sov Phys JETP 34, 505–508

ハーケン：固体の場の量子論 上・下 吉岡書店.

A. J. Legget (1975): A theoretical description of the new phases of liquid ^{3}He: ~~Phys~~ Rev. Mod. Phys 47, 331–414

N. D. Mermin (1977): Games to play with ^{3}He-A. Physica 90B 1–10, (1979): The topological theory of defects in ordered media. Rev. Mod. Phys 51, 591–648. (1981): E. Pluribus boojum: the physicist as neologist. Phys Today, April 46–53.

D. R. Tilley & J. Tilley (1986) Superfluidity and superconductivity (second ed) Adam Hilger.

G. E Volovik & V. P. Mineev (1977): Investigation of singularities in superfluid ^3He in liquid crystals by the homotopic topology methods. Sov Phys. JETP 45, 1186–1196.

P. Wölfle (1979): Low-temperature properties of liquid ^3He Rep. Prog. Phys 42, 269–346.

M. C. Cross (1975): A generalized Ginzburg-Landau approach to the superfluidity of Helium 3. J. Low. Temp. Phys 21, 525–534.

V. Ambegaokar. P. G. de Gennes & D. Rainer. (1974): Landau-Ginsburg equations for an anisotropic superfluid. Phys Rev A 9, 2676–2685