数理解析研究所講究録
第 694 巻 1989 年 165-182

微分方程式の局所分類の話

一橋大数共研　真島　秀行　(Hideyuki Majima)

0. 微分方程式の局所不変量による分類について典型的な方程式を取り上げ解説したい。「話」と表題に入れたのは以下でこの問題の雰囲気を伝えることを目的とし要語の定義等を正確に下してない部分があるためである。詳しくは参考文献にある．M.Hukuhara, T.Kimura, T.Matuda, J.Ecalle, B.Malgrange, J.Martinet-J.P.Ramis, F.Pham, D.G.Babbitt-V.S.Varadarajan, Y.Sibuya, W.Balser-W.Jurkat-D.A.Lutz らの論文を参照されたい。§1 で単独1階非線型常微分方程式を，§2 で単独2階斉次線型方程式を漸近展開のみを用いて考察する手法を解説し，§3 で Ecalle の resurgency, alien derivative 入った resurgent equation と §1.§2 の結果との関連を述べた。§1 で扱った方程式に関する resurgent equation 等については [E2] LCNP の Visite aux sources] が良い解説としてあるため，敢えてこの小論の中で再録的なことはしなかった。漸近展開論的手法，線型方程式に関する事柄に力点を置いて述べた。

1. 単独1階非線型常微分方程式の局所分類の話

次のような単独1階非線型常微分方程式を考える。

(1) $\qquad t^2\frac{d}{dt}y + y + b(t,y) = 0.$

ここで，$b(t,y)$は $(t,y)=(0,0)$で正則で

(2) $\qquad b(t,y) = \sum_{m,n} b_{m,n}t^m y^n$

とTaylor展開できるものとし，さらに次をみたすものとする。

(3) $\qquad b_{0,0} = b_{0,1} = 0$

Cauchyの解の存在定理によれば，$t \neq 0$ の近くで正則解のあることが知られるが，それを解析接続したとき，0にtが近づいた時どんな挙動をするかなど何も分らない。

そこで，収束性はさておいて（$h_{0,1}=1$をみたす）

(4) $\qquad y = h(t,Y) = \sum_{j,l} h_{jl}t^jY^l = \sum_l h_{*l}(t)Y^l = \sum_j h_{j*}(Y)t^j$

なる形式変換により（1）がどれくらい簡単な方程式になるか考えると，実は，$h_{*l}(t)$は形式巾級数，$h_{j*}(Y)$は収束巾級数で

(5) $\qquad t^2\frac{d}{dt}Y + (1+\lambda t)Y = 0$

に変換されることが知られている。$\lambda = b_{11} - 2b_{1,0}b_{0,2}$である。(5)は，$ut^{-\lambda}e^{\frac{1}{t}}$（$u$は任意常数）という一般解をもつから(4)に代入して，(1)は

(6) $\qquad \varphi(t,u) = h(t,ut^{-\lambda}e^{\frac{1}{t}}) = \sum_l h_{*l}(t)(ut^{-\lambda}e^{\frac{1}{t}})^l$

という形式解をもつことが分る。形式解が分っただけでは(1)の正則解についての情報はないのであるが，実は十分小さな

扇形（又は角）領域

(7)　S：$\underline{\theta} < \arg t < \overline{\theta}$, $0 < |t| < r$,　$|Y| < R$

に限定すれば、正則変換 $y = h_{S'}(t, Y_s)$ で(1)を(5)に変換するものがあり、形式変換(4)は $h_s(t, Y)$ の(7)における或る種の漸近展開になっていることが知られている。

さて、それで十分かといえばまだ不十分で、角領域を取り換えた時の h_s らの関係，即ち，解析接続の関係が分らなければいけない。

(7)′　S'：$\underline{\theta}' < \arg t < \overline{\theta}'$, $0 < |t| < r'$,　$|Y| < R'$

をもう1つの角領域とし，$S \cap S' \neq \phi$ なるとき

(8)　$Y_s = k_s(t, y)$

をSにおける $y = h_s(t, Y_s)$ の逆変換として，

(9)　$Y_s = k_s(t, h_{s'}(t, Y_{s'}))$

という変換を考えれば、$y = h_s(t, Y_s)$，$y = h_{s'}(t, Y_{s'})$ がそれぞれ S，S' 上で(1)を(5)に変換することから，$S \cap S'$で変換(9)は，(5)を(5)自身に変換することになる。

(10)　$Y_s = h_{ss'}(t, Y_{s'}) = \sum_l h^{ss'}_{*l}(t) Y_{s'}{}^l$

とおき直すと，$h_{ss'}$ は

(11)　$t^2 \frac{d}{dt} h_{ss'} + (1+\lambda t) h_{ss'} - (1+\lambda t) Y_{s'} \frac{\partial}{\partial Y_{s'}} h_{ss'}(t, Y_{s'}) = 0$

をみたす、即ち，$h^{ss'}_{*l}(t)$ は次をみたす。

(12)　$t^2 \frac{d}{dt} h^{ss'}_{*l}(t) + (1-l)(1+\lambda t) h^{ss'}_{*l}(t) = 0$

従って、$A_{1-\ell}$ $(\ell=0,2,3,\cdots)$ を定数として

(13) $\quad h^{ss'}_{x\ell}(t) = (t^{-\lambda}e^{\frac{1}{t}})^{1-\ell}A_{1-\ell}$

が (12) の解であるから，(11) の解である $h_{ss'}$ は

(14) $\quad Y_s = h_{ss'}(t, Y_{s'}) = A_1(t^{-\lambda}e^{\frac{1}{t}}) + Y_{s'} + \sum_{\ell=2}^{+\infty} A_{1-\ell}(t^{-\lambda}e^{\frac{1}{t}})^{1-\ell}Y_{s'}^{\ell}$

という形になる。

ところで，S，S' において h_s, $h_{s'}$ が共に同じ漸近級数をもつことから、$S\cap S'$ において $h_{ss'}$ は恒等変換に漸近的でなくてはならず、$e^{\frac{1}{t}}$ の挙動を考え併せると、

(15.1) $S\cap S'$ が $Re(\frac{1}{t})<0$ の角領域に含まれていれば、
$Y_s = h_{ss'}(t, Y_{s'}) = A_1(t^{-\lambda}e^{\frac{1}{t}}) + Y_{s'}$

(15.2) $S\cap S'$ が $Re(\frac{1}{t})>0$ の角領域に含まれていれば、
$Y_s = h_{ss'}(t, Y_{s'}) = Y_{s'} + \sum_{\ell=2}^{+\infty} A_{1-\ell}(t^{-\lambda}e^{\frac{1}{t}})^{1-\ell}Y_{s'}^{\ell}$,
ただし、$\sum_{\ell=2}^{+\infty} A_{1-\ell}y^{\ell}$ は収束半径が0でない級数。

(15.3) $S\cap S'$ が $Re(\frac{1}{t})=0$ の方向を含んでいれば、
$Y_s = h_{ss'}(t, Y_{s'}) = Y_{s'}$

となることが分る。

また、3つの角領域 S, S', S'' があって $S\cap S'\cap S''\neq\phi$ のとき，$h_{ss'}$, $h_{s's''}$, $h_{s''s}$ は定義より次の式をみたす。

(16) $\quad Y_s = h_{ss'}(t, h_{s's''}(t, h_{s''s}(t, Y_s))) = Y_s$.

これはある種のいわゆる 1-コサイクル条件であり，解析接続の情報 $\{h_{ss'}; S, S'\}$ がある被覆のある層に値をとる 1-コサイ

クルで，その層に値をもつ1次コホモロジー・クラスの代表を表しているとみなせることを示している。

実際，$\mathbb{C}$の原点Oに向かう向きの全体の集合として円周S^1をみなし，S^1の連結部分開集合Uに対し角領域

$$(17)\quad S(U,r,R)=\{(t,y)\mid \tfrac{t}{|t|}\in U,\ 0<|t|<r,\ |y|<R\}$$

を考え，

(18) $\Lambda_{1,\lambda}(U,r,R)=\{$変換 $(t,y)\mapsto(t,h(t,y))$ で，hは$S(U,r,R)$に応じて(15.1)，(15.2)，(15.3)で決まるもの$\}$

とおく。$\Lambda_{1,\lambda}(U,r,R)$の演算は変換の合成としておく。

$$(19)\quad \operatorname*{dir\,lim}_{r\to 0,\,R\to 0}\Lambda_{1,\lambda}(U,r,R)\equiv\Lambda_{1,\lambda}(U)$$

とし，$\Lambda_{1,\lambda}(U)$らとそれらの間の自然な制限写像を考えれば，S^1上の準層が得られ，それから導かれる層を$\Lambda_{1,\lambda}$とする。

(20) $\mathcal{E}_{1,\lambda}=\{$(1)型の方程式で形式変換(4)により(5)型になるもの$\}$

（ここで，λは1つ固定した。）

を考えると，先にみたことは，$\mathcal{E}_{1,\lambda}$から$H^1(S^1,\Lambda_{1,\lambda})$へ自然な写像があるということである。実は次が成立する。

定理．$\mathcal{E}_{1,\lambda}/\sim\ \approx H^1(S^1,\Lambda_{1,\lambda})$．ここで，$\mathcal{E}_{1,\lambda}$に含まれる2つの方程式$(eq)_1$，$(eq)_2$が同値$(eq)_1\sim(eq)_2$であるとは正則変換$(t,y)\mapsto(t,h(t,y))$により$(eq)_1$が$(eq)_2$に変換されることとする。

(1)型の方程式でとくに形式変換(4)で(5)（λは固定）になる

方程式の全体を局所正則変換で分類すると，その分類空間が $H^1(S^1, \Lambda_{1,\lambda})$ と一致するのである。先に云ったように $\mathcal{E}_{1,\lambda}$ から分類空間 $H^1(S^1, \Lambda_{1,\lambda})$ への写像があることは漸近展開可能な変換の存在によるから以前から知られていたことになるが、全射性は比較的新しい結果で，ある種の消滅定理によって証明されるものである。

さて，我々は (1) の解を知ろうとし，解析接続の情報を上のように $H^1(S^1, \Lambda_{1,\lambda})$ の元としてとらえることになったのだが，具体的にそれを表さないと解が分った気にならない。しかし，具体的に計算できるのは，(1) が斉次又は非斉次線型であるとか Riccati 型である条件をみたすときぐらいではとんど不可能のように思われる。だからこそ $H^1(S^1, \Lambda_{1,\lambda})$ と表しておく意義があるのかもしれない。実は，(15.1)−(15.3) とある程度具体的に $\Lambda_{1,\lambda}(U)$ の元が記述されるから，もう少し具体的に分類空間を表示できる。それでもやはり計算が難しいところは依然そのままであると思う。

もう少し具体的な表示と云ったものを以下で見よう。S^1 の被覆として，$\{U_0 = \{e^{i\theta}; \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})\},\ U_1 = \{e^{i\theta}; \theta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})\}\}$ をとろう。この被覆についてはトコチェインはすべてトコサイクルで，トコバウンダリーは (15.3) より自明なものしかなく，

$$(21) \qquad H^1(S^1, \Lambda_{1,\lambda}) \simeq H^1(\{U_0, U_1\}, \Lambda_{1,\lambda}) \simeq C^1(\{U_0, U_1\}, \Lambda_{1,\lambda})$$

となる。また，$U_0\cap U_1=\{t\in S^1;\mathrm{Re}\,t>0\}\sqcup\{t\in S^1;\mathrm{Re}\,t<0\}$ となることと(15.1)(15.2)より，

$$(22)\qquad H^1(S^1,\Lambda_{1,\lambda})\simeq\{(t,y)\mapsto(t,y+A_1t^{-\lambda}e^{\frac{1}{t}});A_1\in\mathbb{C}\}$$
$$\times\{(t,y)\mapsto(t,y+\sum_{l=2}^{+\infty}A_{1-l}(t^{-\lambda}e^{\frac{1}{t}})^{1-l}y^l;\ \overline{\lim_{l\to+\infty}}\sqrt[l]{|A_{1-l}|}<+\infty\}$$
$$\simeq\mathbb{C}\times\{c\to c+\sum_{l=2}^{+\infty}A_{1-l}c^l;\ \overline{\lim_{l\to+\infty}}\sqrt[l]{|A_{1-l}|}<+\infty\}.$$

最後のものは，複素多様体の芽$(\mathbb{C},0)$からそれ自身への Id に1次接触の同型写像の全体になっている。前にも述べたが，こう表しても，$A_1,A_{-1},A_{-2},\cdots$を具体的に計算することはいくつかの場合（線型，Riccati 型）を除くと極めて難しいと思われる。また，今の場合S^1の被覆を簡単で分りやすくとれたが一般的にはこのようなことは期待できないであろう。そこで，$H^1(S^1,\Lambda_\lambda)$という表示に安住するということにもなる。

最後になったが形式解(6)の係数のみたす方程式を導いておこう。(1)に $y=\tilde{Y}-b_{1,0}t$ という変換をしておくと

$$(23)\qquad t^2\frac{d}{dt}\tilde{Y}+(1+\lambda t)\tilde{Y}+\sum_{m=2}^{+\infty}\tilde{b}_{m,0}t^m+\sum_{m=2}^{+\infty}\tilde{b}_{m,1}t^m\tilde{Y}+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\tilde{b}_{m,n}t^m\tilde{Y}^n=0$$

となることに注意し(23)に対する形式解 $\phi(t,u)=\sum_{l=0}^{+\infty}g_{*l}(t)(ut^{-\lambda}e^{\frac{1}{t}})^l$ の係数 $g_{*l}(t)$ のみたす方程式を導く。(23)を次のように書く。

$$(23)'\qquad t^2\frac{d}{dt}\tilde{Y}+(1+\lambda t)\tilde{Y}+\sum_{n=0}^{+\infty}b_{*n}(t)\tilde{Y}^n=0.$$

このとき，$g_{*l}(t)\ (l=0,1,2,\cdots)$は，

$$(24)\qquad t^2\frac{d}{dt}g_{*l}(t)-(l-1)(1+\lambda t)g_{*l}(t)+\sum_{n=0}^{+\infty}\tilde{b}_{*n}(t)\sum_{k_1+\cdots+k_n=l}g_{*k_1}(t)\cdots\cdots g_{*k_n}(t)=0$$

をみたす。

2. 単独2階斉次線型常微分方程式の局所分類の話

次のような単独2階斉次線型常微分方程式を考える。

(1) $(\alpha_2+\frac{\beta_2}{z}+\frac{\gamma_2(z)}{z^2})\frac{d^2}{dz^2}x+(\alpha_1+\frac{\beta_1}{z}+\frac{\gamma_1(z)}{z^2})\frac{d}{dz}x+(\alpha_0+\frac{\beta_0}{z}+\frac{\gamma_0(z)}{z^2})x=0$

ここで，$\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\beta_0,\beta_1,\beta_2$ は定数で，$\alpha_2\neq0$，$\alpha_0\neq0$，$\gamma_0(z)$，$\gamma_1(z)$，$\gamma_2(z)$ は $z=\infty$ で正則であるものとする。さらに，

(2) $\alpha_2\lambda^2+\alpha_1\lambda+\alpha_0=0$

の2つの解 λ_1,λ_2 は相異なると仮定する。このとき，(1)は

(3) $x(z,u_1,u_2)=u_1e^{\lambda_1 z}z^{\tau_1}\phi^{\langle1\rangle}(z)+u_2e^{\lambda_2 z}z^{\tau_2}\phi^{\langle2\rangle}(z)$

という形の形式解を持つ。ここで，u_1,u_2 は任意常数，τ_i は

(4) $(2\lambda_i\alpha_2+\alpha_1)\tau_i+(\lambda_i^2\beta_2+\lambda_i\beta_1+\beta_0)=0\quad(i=1,2)$

で決まる定数で，$\phi^{\langle i\rangle}(z)$ は $\frac{1}{z}$ に関する形式巾級数であり、

(5)
$$\begin{aligned}&(\alpha_2+\frac{\beta_2}{z}+\frac{\gamma_2(z)}{z^2})\frac{d^2}{dz^2}\phi\\&+\{(\alpha_1+\frac{\beta_1}{z}+\frac{\gamma_1(z)}{z^2})+2(\lambda_i+\frac{\tau_i}{z})(\alpha_2+\frac{\beta_2}{z}+\frac{\gamma_2(z)}{z^2})\}\frac{d}{dz}\phi\\&+\{(\alpha_0+\frac{\beta_0}{z}+\frac{\gamma_0(z)}{z^2})+(\alpha_1+\frac{\beta_1}{z}+\frac{\gamma_1(z)}{z^2})(\lambda_i+\frac{\tau_i}{z})+(\alpha_2+\frac{\beta_2}{z}+\frac{\gamma_2(z)}{z^2})((\lambda_i+\frac{\tau_i}{z})^2-\frac{\tau_i}{z^2})\}\phi\\&=0\quad,\quad\phi(\infty)\neq0\end{aligned}$$

をみたす $(i=1,2)$。十分小さな任意の角領域（頂点は ∞）

(6) $S:\ \underline{\theta}<\arg z<\overline{\theta}\quad |z|>\rho$

に対し，その上で $\phi^{\langle i\rangle}(z)$ を漸近級数とする正則な(5)の解 $\phi_S^{\langle i\rangle}(z)$ が存在し，従って(1)は S 上で正則な

(7) $x_S(z,u_1,u_2)=u_1e^{\lambda_1 z}z^{\tau_1}\phi_S^{\langle1\rangle}(z)+u_2e^{\lambda_2 z}z^{\tau_2}\phi_S^{\langle2\rangle}(z)$

という解をもつことが分る。S' をもう1つの角領域であっ

て，$S\cap S'\neq\phi$ をみたすものとすれば，

(8) $$\left(e^{\lambda_1 z}z^{\tau_1}\phi_{s'}^{\langle 1\rangle}(z),\ e^{\lambda_2 z}z^{\tau_2}\phi_{s'}^{\langle 2\rangle}(z)\right) = \left(e^{\lambda_1 z}z^{\tau_1}\phi_{s}^{\langle 1\rangle}(z),\ e^{\lambda_2 z}z^{\tau_2}\phi_{s}^{\langle 2\rangle}(z)\right)\begin{pmatrix} c_{11}^{ss'}, & c_{12}^{ss'} \\ c_{21}^{ss'}, & c_{22}^{ss'} \end{pmatrix}$$

という可逆定数行列 $C_{ss'}=(c_{ij}^{ss'})_{i,j=1,2}$ が存在する。$\phi_s^{\langle i\rangle}$，$\phi_{s'}^{\langle i\rangle}$ が，$S\cap S'$ 上で同じ漸近級数 $\phi^{\langle i\rangle}$ をもつ $(i=1,2)$ ことから，

(9) $$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 z}z^{\tau_1}, & 0 \\ 0, & e^{\lambda_2 z}z^{\tau_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11}^{ss'}, & c_{12}^{ss'} \\ c_{21}^{ss'}, & c_{22}^{ss'} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 z}z^{-\tau_1}, & 0 \\ 0, & e^{-\lambda_2 z}z^{-\tau_2} \end{pmatrix}$$

は単位行列に $S\cap S'$ 上で漸近展開可能である。従って

(10) $$c_{11}^{ss'}=c_{22}^{ss'}=1$$

(11.1) $S\cap S'$ が $\mathrm{Re}(\lambda_1-\lambda_2)z>0$ なる角領域に含まれれば，

$c_{12}^{ss'}=0$ ，$c_{21}^{ss'}$ は必ずしも0でない

(11.2) $S\cap S'$ が $\mathrm{Re}(\lambda_1-\lambda_2)z<0$ なる角領域に含まれれば，

$c_{12}^{ss'}$ は必ずしも0でないが，$c_{21}^{ss'}=0$、

(11.3) $S\cap S'$ が $\mathrm{Re}(\lambda_1-\lambda_2)z=0$ なる方向を含めば，

$c_{12}^{ss'}=c_{21}^{ss'}=0$ 、

となる。また，$S\cap S'\cap S''\neq\phi$ なるとき，

(12) $$C_{ss'}C_{s's''}C_{s''s}=I_d=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

であるから $\left\{\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 z}z^{\tau_1}, & 0 \\ 0, & e^{\lambda_2 z}z^{\tau_2} \end{pmatrix} C_{ss'}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 z}z^{\tau_1}, & 0 \\ 0, & e^{\lambda_2 z}z^{\tau_2} \end{pmatrix}^{-1};\ s,s'\right\}$

は，ある被覆のある層に値をとる1-コサイクルで，その層に値をもつ1次コホモロジー・クラスを代表しているとみなせる。

実際、$\mathbb{C}$ の ∞ に向かう向きの全体の集合として円周 S^1 をみれば，それ上に

$$(13)\qquad \frac{d}{dz}\begin{bmatrix}p_{11}, & p_{12}\\ p_{21}, & p_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1+\frac{\tau_1}{z}, & 0\\ 0 & \lambda_2+\frac{\tau_2}{z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11}, & p_{12}\\ p_{21}, & p_{22}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}p_{11}, & p_{12}\\ p_{21}, & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1+\frac{\tau_1}{z}, & \\ & \lambda_2+\frac{\tau_2}{z}\end{bmatrix}$$

の解 $\begin{bmatrix}p_{11}, & p_{12}\\ p_{21}, & p_{22}\end{bmatrix}$ で I_d に漸近展開可能な行列関数の芽の層を定めることができ、それを $\Lambda(\lambda_1,\lambda_2,\tau_1,\tau_2)$ で表せば、上のものは、$H^1(S^1, \Lambda(\lambda_1,\lambda_2,\tau_1,\tau_2))$ の元を定めることになる。

複素平面 $\mathbb{C}$ の無限遠点 ∞ で有理型な関数係数の線型常微分方程式系

$$(14)\qquad \frac{d}{dz}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = A(z)\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

で、形式変換

$$(15)\qquad \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = P(z)\begin{bmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\end{bmatrix},\quad P(z)=\begin{bmatrix}p_{11}(z), & p_{12}(z)\\ p_{21}(z), & p_{22}(z)\end{bmatrix}\in GL(2,\mathbb{C}[[\tfrac{1}{z}]])$$

により、

$$(16)\qquad \frac{d}{dz}\begin{bmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1+\frac{\tau_1}{z}, & 0\\ 0, & \lambda_2+\frac{\tau_2}{z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\end{bmatrix}$$

となる方程式系の全体の集合を $\mathcal{E}(\lambda_1,\lambda_2,\tau_1,\tau_2)$ と書き表し、$\mathcal{E}(\lambda_1,\lambda_2,\tau_1,\tau_2)$ に含まれる方程式 (E) と (E) を (16) に変換する形式変換行列 P との組の全体の集合を $\mathcal{E}(\lambda_1,\lambda_2,\tau_1,\tau_2;Trans)$ と書き表しておく。$\mathcal{E}(\lambda_1,\lambda_2,\tau_1,\tau_2;Trans)$ の2つの元 $((E)_1,P_1)$ と $((E)_2,P_2)$ とが同値 $((E)_1,P_1)\sim((E)_2,P_2)$ とは $P_2^{-1}P_1$ が正則関数係数可逆行列になり、それによる変換で $(E)_1$ が $(E)_2$ に変換されることをいうこととすると次が成立する。

定理. $\sim\backslash\mathcal{E}(\lambda_1,\lambda_2,\tau_1,\tau_2;Trans) \approx H^1(S^1,\Lambda(\lambda_1,\lambda_2,\tau_1,\tau_2))$.

また、(16) をそれ自身に変換する形式変換は、$\begin{bmatrix}\mu & 0\\ 0 & \nu\end{bmatrix}$ $(\mu\nu\neq 0,\ \mu,\nu\in\mathbb{C})$ という形の定数行列によるものであることを

考慮すれば，同じ方程式(E)で2つP_1, P_2と(16)に変換する行列をもてば，$P_1 = P_2 \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{bmatrix}$ となることがわかる。さらに，$H^1(S^1, \Lambda(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2))$ が線型空間 $\mathbb{C}^{Irr(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2)}$ に同型であることが知られている。ここで，$Irr(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2)$は線型常微分方程式系(13)のMalgrangeの意味の不確定度であって，今の場合は2に等しい。$H^1(S^1, \Lambda(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2))$の2つの元$[(P_{ss'})]$, $[(Q_{\tilde{s}\tilde{s}'})]$に対して，それらが同値$[(P_{ss'})] \underset{H}{\sim} [(Q_{\tilde{s}\tilde{s}'})]$ということを，それぞれに対して決まる形式変換行列$P$, Qの間に$P = Q \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{bmatrix}$となることと定め、$\mathcal{E}(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2)$の2つの元$(E)_1$, $(E)_2$が同値$(E)_1 \underset{eq}{\sim} (E_2)$とは正則変換で$(E)_1$から$(E)_2$へ変換するものがあることと定義すると次のことが成り立つ。

定理 $\underset{eq}{\sim} \backslash \mathcal{E}(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2) \approx H^1(S^1, \Lambda(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2)) / \underset{H}{\sim}$.

さて，(10), (11)を考慮して$H^1(S^1, \Lambda(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2))$をもう少し具体的に表そう。$\arg(\lambda_1 - \lambda_2) \equiv \omega \frac{\pi}{2}$とし，$V_0 = \{e^{i\theta}; -\omega - \pi < \theta < -\omega + \pi\}$ $V_1 = \{e^{i\theta}; -\omega < \theta < -\omega + 2\pi\}$とすると$S^1 = V_0 \cup V_1$であり，$V_0 \cap V_1 = \{e^{i\theta}; Re(\lambda_1 - \lambda_2)e^{i\theta} > 0\} \sqcup \{e^{i\theta}; Re(\lambda_1 - \lambda_2)e^{i\theta} < 0\}$となることから，次のようであることがわかる。

(17) $H^1(S^1, \Lambda(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2)) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_{21} & 1 \end{pmatrix}; c_{21} \in \mathbb{C} \right\} \times \left\{ \begin{pmatrix} 1 & c_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; c_{12} \in \mathbb{C} \right\}$

(18) $H^1(S^1, \Lambda(\lambda_1, \lambda_2, \tau_1, \tau_2)) / \underset{H}{\sim} \simeq \{(c_{12}, c_{21}) \in \mathbb{C}^2\} / \underset{2}{\sim}$

$\left[\text{但し、} (c_{12}, c_{21}) \underset{2}{\sim} (d_{12}, d_{21}) \Leftrightarrow \begin{matrix} c_{12}\mu\nu^{-1} = d_{12} \\ c_{21}\mu^{-1}\nu = d_{21} \end{matrix} \right]$

微分方程式(1)または(14)が与えられたとき，それに応ずるC_{12},

C_{21} を具体的に求めることは一般的には難しく、また(16)に応ずるものがより複雑になったときの線型常微分方程式を考える場合に被覆がそれほどうまく取れないで複雑になることなどの理由により, $H^1(S^1, \Lambda(\lambda_1,\lambda_2,\tau_1,\tau_2))$ という表現の意義深さが生まれてくるように思われる。尚, 合流型超幾何方程式 Bessel 方程式などについては, C_{12}, C_{21} を具体的に計算できる。

ところで, $S(U_j, R)$ における (1) の基本解を

(19) $$(\phi_j^{\langle1\rangle}(z), \phi_j^{\langle2\rangle}(z))\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 z}z^{\tau_1}, & 0 \\ 0, & e^{\lambda_2 z}z^{\tau_2}\end{pmatrix}$$

とする ($j=0,1$)。このとき、次の関係式が成り立っている。

(20.1) $-\omega<\arg z<-\omega+\pi$ のとき, $Re(\lambda_1-\lambda_2)z<0$ で

$$(\phi_0^{\langle1\rangle}(z), \phi_0^{\langle2\rangle}(z))\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 z}z^{\tau_1}, & 0 \\ 0, & e^{\lambda_2 z}z^{\tau_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & C_{12} \\ 0, & 1\end{pmatrix} = (\phi_1^{\langle1\rangle}(z), \phi_1^{\langle2\rangle}(z))\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 z}z^{\tau_1}, & 0 \\ 0, & e^{\lambda_2 z}z^{\tau_2}\end{pmatrix}$$

(20.2) $-\omega-\pi<\arg z<-\omega$ のとき, $Re(\lambda_1-\lambda_2)z>0$ で

$$(\phi_0^{\langle1\rangle}(z), \phi_0^{\langle2\rangle}(z))\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 z}z^{\tau_1}, & 0 \\ 0, & e^{\lambda_2 z}z^{\tau_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ C_{21}, & 1\end{pmatrix} = (\phi_1^{\langle1\rangle}(ze^{2\pi i}), \phi_1^{\langle2\rangle}(ze^{2\pi i}))\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 z}z^{\tau_1}, & 0 \\ 0, & e^{\lambda_2 z}z^{\tau_2}\end{pmatrix}$$

(20.3) $-\omega+\pi<\arg z<-\omega+2\pi$ のとき, $Re(\lambda_1-\lambda_2)z>0$ で

$$(\phi_0^{\langle1\rangle}(ze^{-2\pi i}), \phi_0^{\langle2\rangle}(ze^{-2\pi i}))\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 z}z^{\tau_1} & 0 \\ 0 & , e^{\lambda_2 z}z^{\tau_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ C_{21}, & 1\end{pmatrix} = (\phi_1^{\langle1\rangle}(z), \phi_1^{\langle2\rangle}(z))\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 z}z^{\tau_1}, & 0 \\ 0, & e^{\lambda_2 z}z^{\tau_2}\end{pmatrix}.$$

これらの式から、

(21.1) $\phi_0^{\langle1\rangle}(z)=\phi_1^{\langle1\rangle}(z)$ $(-\omega<\arg z<-\omega+\pi)$ を解析接続してえられる解析関数を $\tilde{\varphi}^{\langle1\rangle}(z)$

(21.2) $\phi_0^{\langle2\rangle}(z)=\phi_1^{\langle2\rangle}(ze^{2\pi i})$ $(-\omega-\pi<\arg z<-\omega)$ を解析接続してえられる解析関数を $\tilde{\varphi}^{\langle2\rangle}(z)$

と定義すれば、次の式が成立する。

(22.1) $$\tilde{\varphi}^{\langle1\rangle}(ze^{2\pi i})-\tilde{\varphi}^{\langle1\rangle}(z)=\tilde{\varphi}^{\langle2\rangle}(z)\,e^{(\lambda_2-\lambda_1)z}z^{\tau_2-\tau_1}C_{21}$$

(22.2) $$\tilde{\varphi}^{\langle2\rangle}(ze^{-2\pi i})-\tilde{\varphi}^{\langle2\rangle}(z)=\tilde{\varphi}^{\langle1\rangle}(z)\,e^{(\lambda_1-\lambda_2)z}z^{\tau_1-\tau_2}C_{12}.$$

3. Ecalle の alien derivative, resurgent equations の話。

第1節における(1)の形式解の係数 $h_{\times l}(t)$, 従って(2)の対する $g_{\times l}(t)$, また, 第2節における(1)の形式解の係数 $\phi^{(j)}(z)$は漸近展開論的観点から1-summable であることが知られている([MR], [RS])。形式巾級数 $\hat{f}(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n t^n$ が 1-summable であるとは, S^1の有限部分集合 $\Sigma(\hat{f})$ があって, $S^1-\Sigma(\hat{f})$ のすべての元, すなわち向き α に対して, αを中心とするπの開き $[\alpha-\frac{\pi}{2},\alpha+\frac{\pi}{2}]$ を含む向きの集合 V_α があって, $S(V_\alpha,r)$上に$\hat{f}$を漸近級数とする正則関数 f_α があって、任意の閉部分角領域 $S'\Subset S(V_\alpha,r)$ に対して、定数 $C_{S'}, A_{S'}$ があり, すべての自然数nについて, 次が成立することをいう。

$$(1)\qquad \sup_{t\in S'} |f^{(n)}(t)| \le C_{S'}(n!)^{1+\frac{1}{1}} A_{S'}^{\,n}.$$

実はEcalle [E1,2] によりもっと精密なことが示された。Ecalleの結果を述べるためにBorel変換等の言葉を用意する。$t=0$ を中心にするやり方もあるが, $z=\frac{1}{t}=\infty$を中心として話す。

形式巾級数 $\phi(z)=\sum_{j=0}^{+\infty}\phi_j z^{-j-1}$ に対し, そのBorel変換を

$$(2)\qquad \varphi(\zeta)\equiv(B\phi)(\zeta)=\sum_{j=0}^{+\infty}\phi_j\frac{\zeta^j}{j!}$$

で定義する。次の公式が成立する。

$$(3)\qquad (-\zeta)\varphi(\zeta)=(-\zeta)(B\phi(\zeta))=(B(\tfrac{d}{dz}\phi))(\zeta)$$

$$(4)\qquad \varphi(\zeta)*\psi(\zeta)=\int_0^\zeta\varphi(\zeta-s)\psi(s)\,ds=B(\phi\times\psi)(\zeta)$$

(収束しない場合でも形式的に成立する。)

ϕ が収束級数のとき，$\hat{\phi}=B\phi$ は $|\hat{\phi}(\zeta)| \leqq Const.\, e^{\rho|\zeta|}$ $(\rho>0)$ の評価をもつ整関数で，ϕ が 1-summable のとき，(1)よりとくに

(5) $$|\phi_j| \leqq C\, j!\, A^j$$

が成立するから，$\hat{\phi}=B\phi$ は0でない有限な収束半径をもつ。このとき，$\hat{\phi}$ を解析接続しようとすると特異点に必ず出会うはずだが，常微分方程式の形式解に現れる形式巾級数のBorel変換はそれほど特異点をもっていないというのがEcalleの結果の1つである。

第2節の $\phi^{<1>}, \phi^{<2>}$ については次のようである。$\omega^{<1>}=\lambda_1-\lambda_2$, $\omega^{<2>}=\lambda_2-\lambda_1$ とおく。$\widetilde{\mathbb{C}-\{\omega^{<j>}\}}$ を $\mathbb{C}-\{\omega^{<j>}\}$ の普遍被覆空間とする。

定理．($\phi^{<j>}$ − 定数)のBorel変換は $\widetilde{\mathbb{C}-\{\omega^{<j>}\}}$ 上の解析関数に解析接続される。$(j=1,2)$．(それを便宜上 $\hat{\phi}^{<j>}$ と書く。)

このことを見るには次のような議論をすればよい。

第2節の(5)で求めた式に $\lambda_1, \lambda_2, \omega^{<j>}$ を代入して，$\phi^{<j>}$ $(j=1,2)$ のみたす方程式を書くと

$(6)_j$ $$\left(\alpha_2+\frac{\beta_2}{z}+\frac{\gamma_2(z)}{z^2}\right)\frac{d^2\phi}{dz^2}+\left(\omega^{<j>}\alpha_2+\frac{\beta_1'}{z}+\frac{\gamma_1'(z)}{z^2}\right)\frac{d\phi}{dz}+\frac{\gamma_0'(z)}{z^2}\phi=0.$$

となる。$(6)_j$ の代わりにパラメーター ε の入った方程式

(7) $$\alpha_2\frac{d^2\phi}{dz^2}+\alpha_2\omega^{<j>}\frac{d\phi}{dz}=-\varepsilon\left\{\left(\frac{\beta_2}{z}+\frac{\gamma_2(z)}{z^2}\right)\frac{d^2\phi}{dz^2}+\left(\frac{\beta_1'}{z}+\frac{\gamma_1'(z)}{z^2}\right)\frac{d\phi}{dz}+\frac{\gamma_0'(z)}{z^2}\phi\right\}$$

を考え、その解を $\phi(z,\varepsilon)=\sum_{m=1}^{+\infty}\phi_m(z)\varepsilon^m$ の形に求める。

(7.1) $$\alpha_2\frac{d^2\phi_1}{dz^2}+\alpha_2\omega^{<j>}\frac{d\phi_1}{dz}=0,$$

(7.m) $$\alpha_2\left(\frac{d^2}{dz^2}+\omega^{<j>}\frac{d}{dz}\right)\phi_m=-\left\{\left(\frac{\beta_2}{z}+\frac{\gamma_2(z)}{z^2}\right)\frac{d^2}{dz^2}+\left(\frac{\beta_1'}{z}+\frac{\gamma_1'(z)}{z^2}\right)\frac{d}{dz}+\frac{\gamma_0'(z)}{z^2}\right\}\phi_{m-1}\quad(m\geqq 2)$$

を $\phi_1(z), \phi_2(z), \cdots$ がみたすから、形式巾級数解として

(8.1) $\phi_1(z) =$ 定数

(8.m) $\phi_m(z) = \frac{1}{z^{m-1}}$ の項から始まる形式巾級数 $(m \geqq 2)$

となることが分る。一方，(7)の両辺にBorel変換を施して

(9.m) $\alpha_2(-\zeta)(-\zeta+\omega^{\langle j\rangle})\hat{\phi}_m(\zeta) = \left(\begin{matrix}\text{指数関数的評価をもつ}\\ \text{整関数}\end{matrix}\right) * \hat{\phi}_{m-1}(\zeta)$ $(m \geqq 2)$

となるから，$\hat{\phi}_m(\zeta)$ $(m \geqq 2)$ は $\zeta = \omega^{\langle j\rangle}$ 以外に特異点のない関数となることが分る。$\sum_{m=2}^{+\infty} \hat{\phi}_m(\zeta)\varepsilon^m$ $(0<\varepsilon\leqq 1)$ が $\omega^{\langle j\rangle}$ を除いた所で広義一様収束なことを云って，とくに，$\varepsilon = 1$ として定理を得る。

上の $\hat{\phi}^{\langle j\rangle}(\zeta)$ は $\arg\zeta = \theta$ (一定) $\neq \arg\omega^{\langle j\rangle}$ では

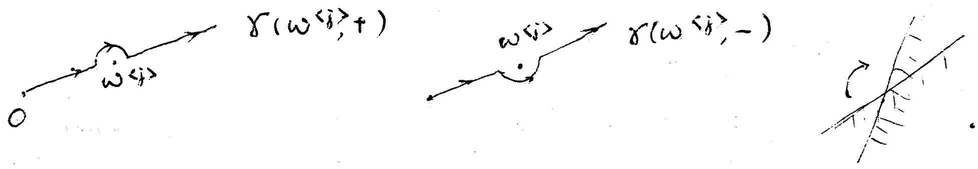
(10) $|\hat{\phi}^{\langle j\rangle}(\zeta)| \leqq Ce^{\rho|\zeta|}$ $(C>0, \rho>0)$

という評価をもつから，θ 方向のLaplace変換

(11) $(\mathcal{L}^{\theta}\hat{\phi}^{\langle j\rangle})(z) = \int_0^{+\infty e^{i\theta}} e^{-\zeta z}\hat{\phi}^{\langle j\rangle}(\zeta)d\zeta$

は，$\mathrm{Re}\, ze^{i\theta} > \rho$ なる半平面で正則で又その中で∞に近づくとき、$\phi^{\langle j\rangle}(z)$ (−定数) を漸近級数とするから，$\Sigma(\phi^{\langle j\rangle}) = \{-\arg\omega^{\langle j\rangle}\}$ として 1-summable になる。

$\arg\omega^{\langle j\rangle}$ 方向に特異点 $\omega^{\langle j\rangle}$ があるが，それを時計回りに半周よけて進む積分路を $\gamma(\omega^{\langle j\rangle},+)$，それを反時計回りに半周よけて進む積分路を $\gamma(\omega^{\langle j\rangle},-)$ としよう。



(12) $\displaystyle\int_{\gamma(\omega^{\langle 1\rangle},-)} e^{-\zeta z}\hat{\phi}^{\langle 1\rangle}(\zeta)\,d\zeta = \tilde{\phi}^{\langle 1\rangle}(z)$

は，$\arg\omega^{\langle 1\rangle}-2\pi < \theta < \arg\omega^{\langle 1\rangle}$ に対する $\mathcal{L}^{\theta}\phi^{\langle 1\rangle}(z)$ に解析接続されていき，次のものになる。

(13) $\displaystyle\int_{\gamma(\omega^{\langle 1\rangle}e^{-2\pi i},+)} e^{-\zeta z}\hat{\phi}^{\langle 1\rangle}(\zeta)\,d\zeta = \tilde{\phi}^{\langle 1\rangle}(ze^{2\pi i})$

この差

(14) $\displaystyle\tilde{\phi}^{\langle 1\rangle}(ze^{2\pi i}) - \tilde{\phi}^{\langle 1\rangle}(z) = \int_{\gamma(\omega^{\langle 1\rangle})} e^{-\zeta z}\hat{\phi}^{\langle 1\rangle}(\zeta)\,d\zeta$

は，また $(6)_1$ の解であるから $e^{(\lambda_2-\lambda_1)z}z^{\tau_2-\tau_1}\phi^{\langle 2\rangle}(z)$ に漸近的な $(6)_1$ の解となっているはずである。

(15) $\displaystyle\int_{\gamma(\omega^{\langle 1\rangle}e^{-\pi i},-)} e^{-\zeta z}\hat{\phi}^{\langle 2\rangle}(\zeta)\,d\zeta = \tilde{\phi}^{\langle 2\rangle}(z)$

とおくとき，定数 C_{21} があって（第2節(2.1)と同じく）

(16) $-\tilde{\phi}^{\langle 1\rangle}(ze^{2\pi i}) + \tilde{\phi}^{\langle 1\rangle}(z) = -C_{21}\,e^{(\lambda_2-\lambda_1)z}z^{\tau_2-\tau_1}\tilde{\phi}^{\langle 2\rangle}(z)$

となる。一方，$\hat{\phi}^{\langle 1\rangle}(\zeta-\omega^{\langle 1\rangle}+\omega^{\langle 1\rangle})$ は $\omega^{\langle 1\rangle}$ で特異で，

(17) $\hat{\phi}^{\langle 1\rangle}(\zeta-\omega^{\langle 1\rangle}+\omega^{\langle 1\rangle}) - \hat{\phi}^{\langle 1\rangle}((\zeta-\omega^{\langle 1\rangle})e^{-2\pi i}+\omega^{\langle 1\rangle})$

は，$e^{(\lambda_2-\lambda_1)z}z^{\tau_2-\tau_1}\phi^{\langle 2\rangle}(z)$ をBorel変換したものの定数倍に等しいはずである。(12)−(16)より次のようになるはずである。

(18) $\hat{\phi}^{\langle 1\rangle}(\zeta-\omega^{\langle 1\rangle}+\omega^{\langle 1\rangle}) - \hat{\phi}^{\langle 1\rangle}((\zeta-\omega^{\langle 1\rangle})e^{-2\pi i}+\omega^{\langle 1\rangle}) = -C_{21}\mathcal{B}(e^{(\lambda_2-\lambda_1)z}z^{\tau_2-\tau_1}\phi^{\langle 2\rangle}(z))(\zeta)$.

Ecalleは，$\hat{\phi}^{\langle j\rangle}$ が定理にいう性質をもつことから，prolongeable "partout sans coupures" であるといい，そのとき，$\phi^{\langle j\rangle}$ は fonction resurgente であると名付け，(16), (17)を

(19) $\Delta_{\omega^{\langle 1\rangle}}\phi^{\langle 1\rangle} = -C_{21}\,e^{(\lambda_2-\lambda_1)z}z^{\tau_2-\tau_1}\phi^{\langle 2\rangle}$

と表す。ここの $\Delta_{\omega^{\langle 1\rangle}}$ を $\omega^{\langle 1\rangle}$ における alien derivative，この方

équation résurgente とよんでいる。今の場合 $\Delta_{\omega\langle 1\rangle}$ は、Borel変換さらにLaplace変換をとって得られる関数の境界値の差となっている。

第1節(24)を、$z=\frac{1}{t}$ に書き換えると

$$(20)\quad \frac{d}{dz}\phi_\ell(z)+(\ell-1)\left(1+\frac{\lambda}{z}\right)\phi_\ell(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_{*n}(z)\sum_{k_1+\cdots+k_\ell=\ell}\phi_{k_1}(z)\cdots\phi_{k_n}(z)$$

という形の方程式になる（$\phi_\ell(z)=g_{*\ell}\left(\frac{1}{z}\right)$, $a_{*n}(z)=\hat{b}_{*n}\left(\frac{1}{z}\right)$）。

この解 $\phi_\ell(z)$ も fonction résurgente になる。

定理. $S=\{-1,-2,\cdots\}$ とおくとき、すべての $\ell=0,1,2,\cdots$ に対して、$\dot{\phi}_\ell$ は $\mathbb{C}-S$ の普遍被覆空間 $\widetilde{\mathbb{C}-S}$ 上の解析関数である。ここで、$\hat{\phi}_\ell=B(\phi_\ell-\text{定数})$, $\dot{\phi}_\ell(\zeta)=\hat{\phi}_\ell(\zeta+\ell)$。

これを見るにも、前と同様にパラメーター ε の入った方程式

$$(21)\quad \frac{d}{dz}\phi_\ell(z,\varepsilon)+(\ell-1)\left(1+\frac{\lambda\varepsilon}{z}\right)\phi_\ell(z,\varepsilon)=\varepsilon\sum_{n=0}^{+\infty}a_{*n}(z)\sum_{k_1+\cdots+k_\ell=\ell}\phi_{k_1}(z,\varepsilon)\cdots\phi_{k_\ell}(z,\varepsilon)$$

の解 $\phi_\ell(z,\varepsilon)=\sum_{m=1}^{+\infty}\phi_{\ell,m}(z)\varepsilon^m$ を考え、帰納的 $\phi_{\ell,m}$, $\hat{\phi}_{\ell,m}$ を解析し、特異性が S 上にしかないことを示し、$\sum_{m=1}^{+\infty}\hat{\phi}_{\ell,m}\varepsilon^m$ が $\widetilde{\mathbb{C}-S}$ の上で広義一様収束することを云うと、$\varepsilon=1$ として定理がいえる。

これらについても、alien derivative の入った équation résurgente があるが、それと第1節で述べた(22)との関係を明らかに出来なかったので私の解説としてはここで終わりとする。[E1,2] (CNP), [MR]等を参照されたい。

参考文献.

[BV] Babbitt, D. G. and Varadarajan, V. S., Local moduli for meromorphic differential equations, Bull. A.M.S., 12, (1985), 95–98

[BJL] Balser, W. - Jurkat, W. - Lutz, D.A., A general theory of invariant for meromorphic differential equations, Part II, Func. Ekva. 22 (1979), 257–283.

[CNP] Candelpergher, B. - Nosmas, C. - Pham, F., Résurgence et développments semi-classiques

[E1] Ecalle, J., Les fonction résurgentes Tome 1. 2 3, Pub. Math. Orsay 1981-05, 1981-06, 1985-

[E2] ______, Cinq applications des fonctions resurgentes, preprint 84T62 Orsay

[HKM] Hukuhara, M. - Kimura, T - Matuda, T., Equations differentielles ordinaires du premier ordre dans le champ complexe, Pub. Math. Soc. Jap. (1961)

[M1] Malgrange, B., Remarques sur les équations differentielles à point singulier irréguliers, in Lect. Note in Math. 712 springer Verlag 1979

[M2] ______, Travaux d'Ecalle et de Martinet-Ramis sur les systèmes dynamiques, Sem. Bourbaki, n° 582, nov 1981.

[M3] ______, Introduction aux travaux de J. Ecalle, l'enseign. Math. (1985) - .

[MR] Martinet, J. - Ramis, J.-P., Problèmes de modules pour des équations differentielles non-linéaires du premier ordre, Pub. Math. I.H.E.S. 55 (1982) 63–164.

[P] Pham, F., Resurgence, Quantized Canonical Transformations and Multi-Instanton Expansions, Algebraic Analysis, Vol II., Academic Press 1988, 699–726.

[RS] Ramis, J.P. - Sibuya, T., Hukuhara's domains and fundamental existence and uniqueness theorems for asymptotic solutions of Gevrey type, Math. Rep. 84-135, Univ. Minnesota

[S] Sibuya, Y., Stokes phenomena, Bull. A.M.S. 83 (1977), 1075–1077.