数理解析研究所講究録
第696巻 1989年 77-91

Anosov automorphism の存在問題

名大 理学部　伊藤 清

序

Smale学派によって離散力学系の研究が進められているが構造安定な系の例としてAnosov diffeomorphismが重要視されている([Ni])。Smaleの予想とはAnosov diffeomorphismが位相的共役を除けば代数的例につきるという予想だがその説明と6次元以下での代数的例を分類した筆者の結果[It]を報告する。

§1 Smaleの予想について

Anosov diffeomorphismの定義を述べる。Compact多様体M上のdiffeomorphism $f \in Diff(M)$ がAnosovであるとは接束TMがdfで不変な2つのsubbundle E_s, E_u のWhitney和であり定数 $C>0$, $\lambda>1$ で条件

$$\|df^n v\| \geq C\lambda^n \|v\| \quad v \in E_u$$
$$\|df^n v\| \leq C\lambda^{-n} \|v\| \quad v \in E_s$$

(‖ ‖は接ベクトルの長さ　nは任意の自然数)

を満すものが存在する事である。

次の双曲型 infra-nilmanifold diffeomorphismが中心的な例

である。Nを連結単連結Lie群とし、その左移動と自己同型がなすNのLie変換群 $N \rtimes \mathrm{Aut}(N)$ の離散部分群Γで

- $(\Gamma : \Gamma \cap N) < \infty$, 。$N/\Gamma \cap N$ はcompact
- ΓのNへの作用はfree

を満たすものを考える。そして $g = n \cdot \psi \in N \rtimes \mathrm{Aut}(N)$ で

1) $g \Gamma g^{-1} = \Gamma$

2) $d\psi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{n})$ は双曲型（絶対値1の固有値を持たぬ）

を満たすgが導く Anosov diffeomorphism $\bar{g} \in \mathrm{Diff}(\Gamma \backslash N)$ を双曲型 infranilmanifold diffeomorphism と呼ぶ（双曲型自己同型を持つLie環 $\mathfrak{n}$ は nilpotent である [Bo, P.111]）。

注意1 $g = n \circ \psi \in \mathrm{Diff}(N)$ の不動点 $n_0 \in N$ の存在が知られている（[To, P312]）ので $\bar{g}$ は双曲型nilmanifold diffeomorphism $\hat{g} : \Gamma \backslash N \ni \Gamma' x \to \Gamma' \psi'(x) \in \Gamma' \backslash N$

$$(\Gamma' = n_0 (\Gamma \cap N) n_0^{-1}, \quad \psi'(x) = n \psi(x) n^{-1})$$

によって有限に被覆される（$d\psi'$と$d\psi$の固有値全体は等）。

Smaleの予想とは"任意のAnosov diffeomorphism $f \in \mathrm{Diff}(M)$ に対し、ある双曲型 infranilmanifold diffeomorphism $\bar{g} \in \mathrm{Diff}(\Gamma \backslash N)$ と同相写像 $h : M \to \Gamma \backslash N$ が存在し

$h\circ f = \bar{g}\circ h$ を満すであろう"という予想である。これについて

① Franks-Newhouse の定理 ([Fr], [Ne])
$\dim E_s$ or $\dim E_u = 1 \Rightarrow N = \mathbb{R}^n$ で予想は正

② A. Manning の定理
$M = \Gamma\backslash N$ (infra-nilmanifold) $\Rightarrow$ 予想は正

が知られている主な結果である。

注意2 位相共役だが微分共役ではない① の例が5次元以上の exceptional torus 上で構成されている ([F-J])。

Smale の予想が正しければ, Anosov diffeomorphism の軌道構造を見るには, 双曲型 infra-nilmanifold diffeomorphism のそれを見ておけば十分という事になるし, 反例があるのなら双曲型 infra-nilmanifold diffeomorphism がどれだけあるかをある程度正確に調べる必要がある。何れにせよ, Anosov diffeomorphism を持つ infranilmanifold を特長づける事は重要である。実際 $\Gamma\backslash\mathbb{R}^n$ については Porteous が調べている ([Po])。そこで双曲型 nilmanifold diffeomorphism を持つ nilmanifold がどれだけあるかを以下の節で述べる (cf. 注意1)

§2. Anosov automorphism の定義と存在の為の必要条件

nilmanifold N/Γ に対し、$\mathbb{Q}$ 上の nilpotent Lie 環が対応する事と、N/Γ が Anosov diffeomorphism を持つかどうかが その $\mathbb{Q}$ 上の Lie 環が Anosov automorphism を持つ事が同値である事、そして比較的調べやすい存在条件について述べる。

双曲型 nilmanifold diffeomorphism $\bar{\varphi} \in Diff(N/\Gamma)$ ($\varphi \in Aut(N)$) が在ったとする。微分同相である指数写像 $\exp : \mathfrak{n} \longrightarrow N$ を使って $\mathfrak{n}$ 上で考えると

$$d\varphi(\exp^{-1}\Gamma) = \exp^{-1}\Gamma, \quad d\varphi \in Aut(\mathfrak{n})$$

である。ここで $\exp^{-1}\Gamma$ の $\mathbb{Q}$-linear span を $\mathfrak{n}_{\mathbb{Q}}$ と書くと $[\mathfrak{n}_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{n}_{\mathbb{Q}}] \subset \mathfrak{n}_{\mathbb{Q}}$ である事、$\exp^{-1}\Gamma$ の $\mathbb{Z}$-linear span L は $\mathfrak{n}$ の格子をなす事が知られている ([Mal], [Ra])。$d\varphi L = L$ だから一般の $\mathbb{Q}$ 上の nilpotent Lie 環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$ に対し次の定義を行う

<u>定義</u> $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$ の双曲型自己同型 ($\mathbb{Q}$ 上の) φ が $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$ のある格子 L (rank $L = \dim \mathfrak{g}$ なる加群) を保つ時、φ を $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$ の Anosov 自己同型と呼ぶ。

逆に $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$ の Anosov automorphism φ と $\varphi L = L$ なる L に対し、

G：$\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ に対する連結単連結Lie群

Γ：$\exp L$ から生成される G の部分群

ψ：$d\psi = \varphi \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ なる $\psi \in \mathrm{Aut}\, G$

とすれば $\overline{\psi} \in \mathrm{Diff}(G/\Gamma)$ は双曲型 nilmanifold diffeomorphism である。

2つの nilmanifold $M_i = G_i/\Gamma_i$ $(i=1,2)$ に対しある nilmanifold M_3 と有限被覆写像 $p_i : M_3 \to M_i$ $(i=1,2)$ が存在する時、M_1 と M_2 は commensurable と呼ばれる。自然な全単射対応

$$\{\text{nilmanifold の commensurable class}\} \rightleftarrows \{\mathbb{Q}\text{ 上の nilpotent Lie 環の同型類}\}$$

が成立つ。[Moo, Theorem 2] と [It, Remark 1.4] から

<u>命題1</u> nilmanifold G/Γ が Anosov diffeo を持つ事は commensurable な nilmanifold G'/Γ' が持つ事と同値で、更に対応する $\mathbb{Q}$ 上の nilpotent Lie 環が Anosov automorphism を持つ事と同値である。

が導ける。

以下簡単の為 Lie環 $\mathfrak{g}$, subalgebra $\mathfrak{h}$, 自己同型写像 φ 等は特に記さぬ限り $\mathbb{Q}$ 上のものとする。

L を $\mathfrak{g}$ の格子とすると $\mathfrak{g}$ の任意の部分空間 $\mathfrak{h}$ に対し $L\cap\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{h}$ の $p(L)$ は $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ の格子である。

<u>注意2</u> もし $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}\otimes\mathbb{R}$ が irrational な部分空間だと（例 平面における傾きが無理数の直線）$L\cap\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{h}$ の格子とはならぬ。

従って次の補題が成立する

<u>補題3</u> $\mathfrak{h}\supset\mathfrak{h}'$: $\mathfrak{g}$ の特性 subalgebra.
（任意の自己同型で保たれる ideal）

$\varphi\in\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ が Anosov $\Rightarrow$ $\varphi|_{\mathfrak{h}}$ は $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}'$ の Anosov automorphism を導く。

そこで $\mathcal{C}$ を任意の特性 subalgebra より成る有限集合族とすると, $\varphi\in\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ が Anosov なら φ は実代数群

$$SA(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}) = \{\varphi\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}) \mid (\det\varphi|_{\mathfrak{h}})^2=1 \text{ for } \mathfrak{h}\in\mathcal{C}\}$$

に含まれている事が判る。実代数群の連結成分が有限

な事([Mos])と，簡単な考察より次の命題が導ける

命題4 ([It]) $\mathfrak{g}$ の微分環 Der $\mathfrak{g}$ の subalgebra $SD(\mathfrak{g})$ を

$$SD(\mathfrak{g}) = \{D \in \mathrm{Der}\,\mathfrak{g} \mid \mathrm{Tr}(D|\mathfrak{h}) = 0 \ \text{for}\ \mathfrak{h} \in \mathcal{L}\}$$

で定義する。2つの特性 subalgebra $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{h}'$ から生ずる $SD(\mathfrak{g})$ の $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}'$ への自然な表現を ρ と記すと ρ か $-{}^t\rho$ が $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}'$ 上に(同時)固有ベクトルを持てば $\mathfrak{g}$ は Anosov automorphism を持たぬ。ただし"t"は $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}'$ の適当な基底に対する ρ の行列表示の転置を表す。

注意5 nilpotent Lie環 $\mathfrak{g}$ の特性 sub algebra の例としては $\mathfrak{g}$ との交換子環を取る事で生ずる lower central series の外に次の2系列 $\{\mathfrak{h}_i\}$ がある。

$$\mathfrak{d} = \mathrm{ad}\,\mathfrak{g} \ \text{or}\ \{D \in \mathrm{Der}\,\mathfrak{g} \mid \mathrm{Tr}\,DD' = 0 \ \text{for}\ {}^\forall D' \in \mathrm{Der}\,\mathfrak{g}\}$$

$$\mathfrak{h}_1 = \{X \in \mathfrak{g} \mid DX = 0 \ \text{for}\ {}^\forall D \in \mathfrak{d}\}$$

$$\mathfrak{h}_{i+1} = p_i^{-1}\{X + \mathfrak{h}_i \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}_i \mid DX \in \mathfrak{h}_i \ \text{for}\ {}^\forall D \in \mathfrak{d}\}$$

$$(p_i : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}_i).$$

$\mathfrak{d} = \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ でない方に対する ascending central series に

合わせて $\mathfrak{g}$ の basis を選ぶと（$\mathbb{Q}$上定義された）実代数群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}\otimes\mathbb{R})$ の Chevalley 分解を自然に（ブロック diagonal な部分群が極大完約部分群 F）得れる。$\mathfrak{g}$ が Anosov automorphism を持つ事と $F\cap GL(n,\mathbb{Z})$ が双曲型の元を持つ事は同値である。（Chevalley 分解については[Ra, p11]を参照）

§3. 具体例.

この節でも何も記さなければ基礎体は $\mathbb{Q}$ とする。Anosov automorphism を持つ Lie 環の例を2種挙げる。

オ一は $\mathbb{Q}^n$ $(n\geq 2)$ の拡張で，free な k-step nilpotent Lie 環 $\mathfrak{n}_k(\mathbb{Q}^n)$ $(k.\ n\in\mathbb{N},\ k<n)$ である。ただし $\mathfrak{n}_k(\mathbb{Q}^n)$ は $\mathbb{Q}^n$ の basis $\{e_1,\cdots e_n\}$ に対する長さ k 以下の words $[e_{i_1},[e_{i_2},\cdots[e_{i_{j-1}},e_{i_j}]\cdots]]$ $(j\leq k)$ から張られるベクトル空間にブラケットを

◦歪対称　◦Jacobi恒等式　◦$k+1$回以上は0

のみを交換関係とするよう定義した Lie 環である。Hirsch の補題（[F-J, Lemma 1]）を使って具体的に

words の $\mathbb{Z}$-span がなす格子を不変にする Anosov automorphism の存在を示せる。

注意1　論文 [A-S] では $\mathfrak{n}_k(\mathbb{Q}^n)$ が k-step nilpotent Lie環全体の中で "universality" を持つ事を用いて幾らかの定理を示しているが、check すべき条件が多く、具体的な計算は困難と思える。なお $\mathfrak{n}_k(\mathbb{Q}^n)$ $(k \geq n)$ は Anosov automorphism を持たぬ。([It, Proposition 3.1])

オ二の例は Borel-Smale の例 ([Sm, p.762]) の一般化 ([It, Proposition 3.2]) である。この構成法で得られる例は素数でない次元においては豊富にあるのであるが、$(\mathfrak{n}^3 \otimes \mathbb{R}) \oplus (\mathfrak{n}^3 \otimes \mathbb{R})$ の非自明な $\mathbb{Q}$ 構造 ($\mathbb{R}$ へ係数拡大して与えられた実Lie環となるような $\mathbb{Q}$ 上の Lie環) が例である事に限って説明する。ただし $\mathfrak{n}^3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle_{\mathbb{Q}}$ は

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_i, e_3] = 0 \quad (i=1,2)$$

で決まる3次元 Heisenberg Lie環である。

Kを実2次 Galois 拡大とする。既ち

$$K = \mathbb{Q}(\sqrt{m}) \qquad (m \in \mathbb{N},\ \text{平方因子を持たぬ})$$

と書ける。Kの代数的整数全体 $\mathcal{O}_K$ は

$$\mathcal{O}_K = \left\{ \frac{a+b\sqrt{m}}{2} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z},\ a-b \equiv 0 \bmod 2 \right\} \cdots\cdots m \equiv 1 \pmod 4$$

$$\mathcal{O}_K = \{ a+b\sqrt{m} \mid a, b \in \mathbb{Z} \} \cdots\cdots\cdots\cdots m \equiv 2 \text{ or } 3 \pmod 4$$

である。$\mathfrak{n}^3 \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} K \supset \mathfrak{n}^3_{\mathbb{Z}} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathcal{O}_K$ $(\mathfrak{n}^3_{\mathbb{Z}} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle_{\mathbb{Z}})$ であるが

$$\dim \mathfrak{n}^3 \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} K = 6, \quad \operatorname{rank} \mathfrak{n}^3_{\mathbb{Z}} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathcal{O}_K = 6$$

なので、Kの Galois 変換σ $(\sigma \neq 1)$ を使い diagonal に $(\mathfrak{n}^3 \otimes \mathbb{R}) \oplus (\mathfrak{n}^3 \otimes \mathbb{R})$ の中に次のように埋め込む。

$$\mathfrak{g}' = \left\{ (X, X^{\sigma}) \,\middle|\, X = \sum^{3} (a_i + b_i\sqrt{m}) e_i \ (a_i, b_i \in \mathbb{Q}) \right\}$$

$$L' = \left\{ (X, X^{\sigma}) \,\middle|\, X = \sum x_i e_i\ (x_i \in \mathcal{O}_K) \right\}$$

すると L'は $(\mathfrak{n}^3 \otimes \mathbb{R}) \oplus (\mathfrak{n}^3 \otimes \mathbb{R}) = \mathfrak{g}' \otimes \mathbb{R}$ において格子である事が（$K/\mathbb{Q}$の判別式を D_K とすると $\sqrt{D_K} \neq 0$ により）判る。

一方 Dirichret の単数定理より単数群 $\mathcal{O}_K^{\times}$ の rank は 1 であり K上の Lie 環 $\mathfrak{n}^3 \otimes K$ の双曲型自己同型

$$\varphi = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_1\eta_2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{n}^3 \otimes K) \cap GL(3, \mathcal{O}_K)$$

が十分存在し φ^{σ}も同様の性質を持つ。そこで

$$\varphi' = (\varphi, \varphi^\sigma)$$

とすれば φ' は L' を保つ Anosov automorphism である。

注意2. 一般の nilpotent Lie環 $\mathfrak{g}$ に対しては この構成法の仮定が満されぬ場合がある。例ば $\mathfrak{g}$ が特性巾零（[Bo, P110]）なら双曲型自己同型を持たない。しかし，$\mathrm{Der}(\mathfrak{g}\otimes\mathbb{R})$ が $\mathbb{Q}$ 上対角化される非退化行列を持てば全ての $d \geq 2$ に対し $\underbrace{\mathfrak{g}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}}_{d個}$ は Anosov automorphism を持つ事が容易に判る。この条件は筆者の知る大部分の nilpotent Lie環で満されている。

§4. 低次元における分類

§3の才一の例で $\mathbb{Q}^n$ $(n\geq 2)$ 以外の Lie環が表れるのは $\dim n_k(\mathbb{Q}^n) \geq \dim n_2(\mathbb{Q}^3) = 6$, 才二の例でも非自明 nilpotent Lie環の次元最小のものが3次元 Heisenberg Lie環 n^3 である事から6次元以上となってしまう。そこで6次元以下の nilpotent Lie環で Anosov automorphism を持つものがどれだけあるかが問題となるが，§3で述べ

たものにつきるというのが[It]の結果である。即ち

<u>命題1</u> 5次元以下のinfra-nilmanifold Γ\G で Anosov diffeo を持つものは $G = \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ に限る。(従って[Po, §8]に述べられているものに限る。特に3次元まではtorus しかない)

<u>定理2</u> 6次元のnilmanifold でAnosov diffeomorphism を持つものは対応するLie環で述べると

$\mathbb{Q}^6$
$\mathfrak{n}_2(\mathbb{Q}^3)$
$\mathfrak{g}'(m)$ $(m = 2, 3, 5, 6 \cdots$ 平方因子を持たぬ自然数$)$

に限る。そしてそれらは互いにcommensurable ではない。$(m \neq m' \Rightarrow \mathfrak{g}'(m) \not\simeq \mathfrak{g}'(m'))$

証明は、lower central series の次元に対する考察と0でない交換関係が少くなるような basis を使っての Derivation algebra の決定の後に §2.命題4を適用するという方針で行う。

<u>注意3</u> 特性subalgebra $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{h}'$ で $\dim \mathfrak{h}/\mathfrak{h}' = 1$ を満すものがあれば §2,補題2より $\mathfrak{g}$ は Anosov

automorphism を持たない事が判る。この事でかなりの nilpotent Lie環が除外される。

注意4　注意3によって特性 subalgebra を多数持つとAnosov automorphism は存在しにくい。実際7次元でも Anosov automorphism を持つ $\mathfrak{g}$ は 2-step で $\dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 2$ or 3 で非自明特性部分環が $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ のみである事が必要とされる。

References.

[A-S] : L. Auslander and J. Scheuneman, On certain automorphisms of nilpotent Lie groups Proc. Symp. pure Math. 14 (1970) 9-15

[Bo] : N. Bourbaki, 原論. リー環 (1巻) 東京図書 1960

[F-J] : F.T. Farrel and L.E. Jones, Anosov diffeomorphisms constructed from $\pi_i \mathrm{Diff}(S^n)$, Topology 17 (1978), 273-282

[Fr] : J. Franks, Anosov diffeomorphisms, Proc. symp. pure Math. 61-93

[It] : K. Ito, Classification of nilmanifolds M^n $(n \leq 6)$ admitting Anosov diffeomorphisms, to appear.

[Mal] : A. Malčev, On a class of homogeneous spaces, Amer. Math. Soc. Transl. ser. 1. vol. 9 (1962) 276-307.

[Man] : A. Manning, There are no new Anosov diffeomorphisms on tori, Amer. J. Math. 96 (1974), 422-429.

[Moo] : C.C. Moore, Decomposition of unitary representations defined by discrete subgroups of nilpotent groups, Ann. of Math. (2) 82 (1965) 146-182

[Mos] : G.D. Mostow, Fundamental groups of homogeneous spaces, Ann. of Math. 66 (1957), 249-255

[Ne] : S.E. New house, On codimension one Anosov diffeomorphisms, Amer. J. Math. 92 (1970), 761-770.

[Ni] : Z. Nitecki, Differential Dynamics, The M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1971

[Po] : H.L. Porteous, Anosov diffeomorphisms of flat manifolds, Topology 11 (1972) 307-315

[Ra] : M.S. Raghunathan, Discrete subgroups of Lie groups, Springer 1972.

[To]: P. Tomter, Anosov flows on infra homogeneous spaces, Proc. Symp. pure Math 14 (1970) 299-327