

Free Regular Bands and Free Regular $*$ -Bands

立命大・理工 中嶋 史国雄 (Sizuo Nakajima)

band B が恒等式 $(xyx = yx, xyx = xy) \quad xyxzx = xyzx$ をみたすとき, (right regular, left regular) regular band という. 最近, Gerhard and Petrich [1] は free band と free $*$ -band の新しい表現を与えた.

本講演の目的はこの方法を用いて, free regular band と free regular $*$ -band を表現し, その構造定理を与える事である.

§1 free regular band の表現

ここでは free (right, left) regular band の表現を考える.

X を集合, $F = F(X)$ を X 上の free semigroup とし, $w \in F$ に対し, $c(w)$ を w の content (w に現われる文字の集合) とする. $w = ux$, $c(w) = c(ux)$, $c(w) \supseteq c(u)$, $x \in X$ と表わせるとき, u を $S(w)$, x を $\sigma(w)$ と表わす.

以下, S, σ を F 上の作用素とみなす. さらに S, σ を

次のように拡張する:

$$S^0(w) = w$$

$$S^{k+1}(w) = S(S^k(w)), \quad \sigma^{k+1}(w) = \sigma(S^k(w)).$$

σ を用いて, $l: F \rightarrow F$ を

$$l(w) = \sigma^{|c(w)|}(w) \sigma^{|c(w)|-1}(w) \cdots \sigma^2(w) \sigma(w)$$

と定義する. l は F 上の自己準同形である. $\delta: F \rightarrow F$ を

$$\delta(x_1 x_2 \cdots x_n) = x_n \cdots x_2 x_1 \quad (x_i \in X)$$

とし, $r: F \rightarrow F$, $k: F \rightarrow F$ をそれぞれ $r = \delta l \delta$, $k(w) = l(w) r(w)$ と定義する. r, k は F 上の自己準同形である.

$L(X) = l(F)$, $R(X) = r(F)$, $K(X) = k(F)$ とおき, 乗法を

それぞれ次のように定義する:

$$u \cdot v = l(uv) \quad (u, v \in L(X))$$

$$u \cdot v = r(uv) \quad (u, v \in R(X))$$

$$u \cdot v = k(uv) \quad (u, v \in K(X)).$$

このとき, free (right, left) regular band の表現を得る.

定理 1 (c.f. Yamada [4])

(1) l は F から $L(X)$ 上への準同形で, $L(X)$ は X 上の free left regular band である.

(2) r は F から $R(X)$ 上への準同形で, $R(X)$ は X 上の free right regular band である.

(3) k は F から $K(X)$ 上への準同形で, $K(X)$ は X 上の free regular band である.

§2. free regular band の構造

中嶋 [2] の方法を用いて, free regular band の構造を記述する.

left regular band の構造定理 (中嶋 [2]):

Y を semilattice とし, 各 $\alpha \in Y$ に対し, L_α を $L_\alpha \cap L_\beta = \emptyset$ if $\alpha \neq \beta$ なる空でない集合とする. $\alpha \geq \beta$ に対して, 次の 3 条件をみたす L_β 上の同値関係 π_β^α が与えられているとする:

- (i) $\pi_\alpha^\alpha = \omega_\alpha$, L_α 上の全関係,
- (ii) $\pi_r^\alpha \subseteq \pi_r^\beta$ ($\alpha \geq \beta \geq r$),
- (iii) $C(\pi_r^\alpha) = \bigcap_{\beta \geq r} C(\pi_r^\alpha | \pi_r^\beta) \neq \emptyset$,

$$\text{ただし, } C(\pi_r^\alpha | \pi_r^\beta) = \{ \mathcal{V} \in C(\pi_r^\alpha) \mid \pi_r^\beta |_{\mathcal{V}} = \pi_r^\alpha |_{\mathcal{V}} \}.$$

さらに, $\alpha \geq \beta$ に対し 次の 3 条件をみたす写像 $f_{\alpha, \beta}: L_\alpha \rightarrow C(\pi_\beta^\alpha)$ が与えられているとする:

- (iv) $f_{\alpha, \alpha} = \mathbb{1}_{L_\alpha}$,
- (v) $f_{\alpha, \beta} f_{\beta, r} \subseteq f_{\alpha, r}$ ($\alpha \geq \beta \geq r$),
- (vi) $f_{\beta, r}$ が $\pi_\beta^\alpha - \pi_r^\alpha$ preserving.

このとき, $L = \bigcup_{\alpha \in Y} L_\alpha$ 上に乗法を

$$a_\alpha a_\beta = (a_\alpha f_{\alpha, \beta}) \cap (a_\beta f_{\beta, \alpha}) \pi_{\alpha\beta}^\alpha$$

と定義すると, L は left regular band である. 逆に, すべての left regular band はこんな風にして得られる.

上の left regular band L を $L = L[f_{\alpha, \beta} : \pi_{\beta}^{\alpha}, L_{\beta} : Y]$ と表わす. 双対的に, right regular band $R = R[g_{\alpha, \beta} : \tau_{\beta}^{\alpha}, R_{\beta} : Y]$ も定義できる. regular band K は $K = L \bowtie R$ と表わせる.

free left (right) regular band $L(X)$ ($R(X)$) をこの構造定理によって記述する.

Y を X 上の free semilattice (すなわち, $Y = \{A \in 2^X \mid 0 < |A| < \infty\}$ $A \cdot B = A \cup B$) とする. $A \in Y$ に対し, $P_A = \{w \in F \mid l(w) = w, c(w) = A\}$ とおくと, P_A は A 上の permutable word の全体である. $A, B \in Y, A \subseteq B$ に対し, P_B 上の同値関係 π_B^A を

$$u \pi_B^A v \iff u \setminus A = v \setminus A$$

ただし $u \setminus A$ は u から A の文字を除いた語

と定義する. $C(\pi_B^A) = \{u P_{BA}, P_{BA} u \mid u \in P_A\}$ で,

$$f_{A,B} : P_A \rightarrow C(\pi_B^A), u \mapsto u P_{BA} \quad (g_{A,B} : P_A \rightarrow C(\pi_B^A), u \mapsto P_{BA} u)$$

と定義すると, $\{\pi_B^A, f_{A,B}\}$ ($\{\pi_B^A, g_{A,B}\}$) は条件 (i) ~ (vi) をみたす. 従って, 次の定理を得る.

定理 2 $L(X) \cong L[f_{A,B} : \pi_B^A, P_B : Y].$

$$R(X) \cong R[\mathcal{I}_{A,B}; \pi_B^A, P_B : Y] \cong L(X)^d$$

$$K(X) \cong L(X) \bowtie L(X)^d$$

§3 free regular $*$ -band の構成.

involution $*$ をもつ半群を involutorial 半群という. さらに regular band B が involutorial 半群で $x = xx^*x$ をみたすとき regular $*$ -band という.

free regular $*$ -band の表現の基礎は free involutorial 半群 $F^* = F^*(X)$ である. $I = X \cup X^*$ (ただし, X と X^* は $x \mapsto x^*$ により 1対1対応している) とする. I 上の free semigroup $F(I)$ 上に $*$ 演算を次のように入れる:

$$(i_1 i_2 \cdots i_n)^* = i_n^* \cdots i_2^* i_1^* \quad (i_1 i_2 \cdots i_n \in F(I))$$

$$\text{ただし } i^* = \begin{cases} x^* & (i = x \in X) \\ x & (i = x^* \in X^*) \end{cases}$$

$(F(I), *)$ は X 上の free involutorial 半群である.

§1 の analogy を用いて, free regular $*$ -band の表現を与える.

$w \in F^* = F(I)$ に対し, $C_X(w) = \{x \in X \mid C(w) \cap \{x, x^*\} \neq \emptyset\}$ とおく. $w = uip$, $C_X(w) = C_X(ui)$, $C_X(w) \neq C_X(u)$, $i \in I$ と表わせるとき, u を $S_X(w)$, i を $\sigma_X(w)$ と書く. S_X, σ_X を $S_X^0(w) = w$, $S_X^{k+1}(w) = S_X(S_X^k(w))$, $\sigma_X^{k+1}(w) = \sigma_X(S_X^k(w))$

と拡張し, $l^*: F^* \rightarrow F^*$ を

$$l^*(w) = \sigma_x^{|c_x(w)|} \sigma_x^{|c_x(w)|-1}(w) \cdots \sigma_x^2(w) \sigma_x(w),$$

$k^*: F^* \rightarrow F^*$ を $k^*(w) = l^*(w)[l^*(w^*)]^*$ と定義する. l^*, k^*

は F^* の自己 $*$ -準同形である.

$K^* = K^*(X) = k^*(F^*)$ とおき, K^* 上に演算を

$u \cdot v = k^*(uv)$ で定義すると, free regular $*$ -band の表現が得られる.

定理 3. k^* は F^* から K^* 上への $*$ -準同形で, K^* は X 上の free regular $*$ -band である.

K^* と $k(F(I))$ の関係

次の図式は可換である:

$$\begin{array}{ccc} F^* = (F(I), *) & \xrightarrow{k^*} & K^* = (k^*(F^*), *) \\ k \downarrow & & \uparrow k|_{k(F(I))} \\ (k(F(I)), *) & \xrightarrow{k^*} & \end{array}$$

k は $*$ -演算を保存し, $k|_{k(F(I))}$ は K^* の上への $*$ -準同形であり、これより導かれる合同は $\{u, uu^*u \mid u \in k(F(I))\}^\#$ である.

regular $*$ -band の構造 (Scheiblich [3])

$L = L[f_{\alpha, \beta} : \pi_{\beta}^{\alpha}, L_{\beta} : Y]$ を left regular band とし,
 $L \boxtimes L^d$ 上に $*$ -演算を $(a, b)^* = (b, a)$ と定義すると,
 $(L \boxtimes L^d, *)$ は regular $*$ -band になる. 逆に, すべての
regular $*$ -band はこんな風にして得られる.

この $L \boxtimes L^d$ を $K^*[f_{\alpha, \beta} : \pi_{\beta}^{\alpha}, L_{\beta} : Y]$ と書く. ここで,
free regular $*$ -band の構造定理を与える.

Y を X 上の free semilattice とする. $A \in Y$ に対し,
 $P_A^* = \{w \in F^* \mid l^*(w) = w, c_X(w) = A\}$ とおく. $A, B \in Y$
 $A \subseteq B$ に対し, P_B^* 上の同値関係 π_B^A を

$$u \pi_B^A v \iff u \setminus A \cup A^* = v \setminus A \cup A^*$$

で定義する. $C(\pi_B^A) = \{u P_{BA}^*, P_{BA}^* u \mid u \in P_A^*\}$ である.

$f_{A, B}^* : P_A^* \rightarrow C(\pi_B^A)$ を $u \mapsto u P_{BA}^*$ と定義すると, $\{\pi_B^A, f_{A, B}^*\}$
は条件 (i) ~ (vii) をみたす. 従って, 次の定理を得る.

定理 4.

$\chi^* : F^* \rightarrow W \mapsto (l^*(w), [l^*(w^*)]^*) \in K^*[f_{A, B}^* : \pi_B^A, P_B^* : Y]$ は
上への $*$ -準同形で, $\chi^* \circ \chi^{*-1} = k^* \circ k^{*-1}$. 従って,

$$K^*(X) \cong K^*[f_{A, B}^* : \pi_B^A, P_B^* : Y].$$

参考文献

- [1] J. A. Gerhard and M. Petrich, Free bands and Free $*$ -bands, Glasgow Math. J. 28 (1986) 161-179.
- [2] S. Nakajima, Some results on right inverse semi-groups, Proc. 9th Symposium on Semigroups, Naruto Univ., (1985) 24-27.
- [3] H. E. Scheiblich, Projective and Injective Bands with Involution, J. Algebra 109, (1987) 281-291.
- [4] M. Yamada, The structure of separative bands, Doctoral Dissertation, Univ. of Utah, 1962.