数理解析研究所講究録
第 705 巻 1989 年 28-45

Wreath 積の Robinson-Schensted 対応

東大・理　岡田聡一

半順序集合 P の中の chain，つまり P の元の増大列 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ の個数を数えることは，組合せ論だけでなく他の分野でも重要である．対称群に対する Robinson-Schensted 対応を用いることによって，分割全体が Young 図形の包含関係についてなす半順序集合 Y (Young 束と呼ばれる) の中の chain の個数に関するいくつかの等式に bijective な証明を与えることができる．ここでは，wreath 積に対する Robinson-Schensted 対応を構成し，それを用いて Young 束の直積半順序集合 Y^k の中の chain の個数に関する等式に bijective な証明を与える．また，Robinson-Schensted 対応をまったく用いない Stanley による純代数的な証明も紹介する．

§1. 用語と記号

まず，半順序集合に関する用語と記号をまとめておく．

P を半順序集合とする．$x < y$ であり，かつ $x < z < y$ となる $z \in P$ が存在しないとき，y は x を覆う (y covers x) という．x を覆う (resp. x に覆われる) P の元全体の集合を $C^+(x)$ (resp. $C^-(x)$) と表わす．P の元の増大列 $c = (x_0 < x_1 < \cdots < x_n)$ を x_0 から x_n への chain という．そして，全ての i に対して x_i が x_{i-1} を覆うとき，chain c は saturated であるという．

記号. P を最小元 $\hat{0}$ をもつ半順序集合とする. $x \in P$ に対して, $\hat{0}$ から x への saturated chain 全体の集合を $C_P(x)$ と表わし, その濃度を $e_P(x) = \#C_P(x)$ とおく.

半順序集合 P は次の条件を満たす関数 $\rho : P \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在するとき, 次数つき (graded) であるという.

(a) x が P の極小元ならば, $\rho(x) = 0$.

(b) y が x を覆うとき, $\rho(y) = \rho(x) + 1$.

このとき, $P_i = \rho^{-1}(i) = \{x \in P : \rho(x) = i\}$ とおく. 応用上重要な半順序集合はほとんど全て, 次数つきである.

記号. P を次数つき半順序集合で, 最小元 $\hat{0}$ をもつとする. このとき,

$$
\begin{aligned}
\alpha_P(0 \to n) &= \sum_{x \in P_n} e_P(x) \\
&= \#\{c = (x_0 < x_1 < \cdots < x_n) : x_i \in P_i\}
\end{aligned}
$$

とおく.

次に, tableau について簡単にまとめておく. (詳しくは, 寺田氏の項を参照していただきたい) 分割全体の集合を $\mathcal{P}$ とする. $\lambda \in \mathcal{P}$とする. λ の Young 図形の各箱に 1 つずつ自然数を書き込んで, 各行が左から右に単調非減少となり, 各列が上から下に単調増加となるようにしたものを, shape λ の semi-standard tableau という. $A \subset \mathbb{N}$ $(\#A = |\lambda|)$ に対して, A の元が 1 回ずつ現われる shape λ の semi-standard tableau を, A 上 の shape λ の standard tableau という. A 上の shape λ の standard tableau 全体の集合を $\mathrm{STab}(\lambda; A)$ と表わす. $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ 上の standard tableau を

通常は単に standard tableau という．明らかに，$\#\,\mathrm{STab}(\lambda; A)$ は λ と $\#A$ にしかよらない．さらに，分割の列 $\emptyset = \lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n)} = \lambda$ で，各 i に対して $\lambda^{(i)}$ の Young 図形が $\lambda^{(i-1)}$ の Young 図形に 1 つ箱を付け加えるか，または $\lambda^{(i-1)}$ の Young 図形から 1 つ箱を取り除くかして得られるようなもの全体のなす集合を $\mathrm{UDTab}_n(\lambda)$ とする．

semi-standard tableau T と $r \in \mathbb{N}$ が与えられたとき，T に r を (row) insert して得られる semi-standard tableau を $T \leftarrow r$ と書く．また，A 上の standard tableau T に対して，T の $(1,1)$ の位置に穴をあけ sliding algorithm を施して得られる $A - \{T(1,1)\}$ 上の standard tableau を $\Delta(T)$ とする．

§2. Young 束と Robinson-Schensted 対応

まず，対称群に対する Robinson-Schensted 対応 (以下，R-S 対応と略す)

$$\begin{array}{ccccccc} (P,Q): & \mathfrak{S}_n & \xrightarrow{\sim} & \displaystyle\coprod_{\lambda \vdash n} & \mathrm{STab}(\lambda;[n]) & \times & \mathrm{STab}(\lambda;[n]) \\ & w & \longmapsto & & (\,P(w) & , & Q(w)\,) \end{array}$$

と Young 束との関係を見ておこう．

分割全体の集合 $\mathcal{P}$ に次のような順序を入れたものを **Young 束** (Young's lattice) といい，Y と表わす: $\lambda, \mu \in Y$ に対して，

$$\lambda \geq \mu \Longleftrightarrow \lambda_i \geq \mu_i \quad (i \geq 1).$$

つまり，λ の Young 図形が μ の Young 図形を含むとき，$\lambda \geq \mu$ である．$\rho(\lambda) = |\lambda|$ とおくことにより，Y は次数つき半順序集合となり，

$$Y_n = \{\lambda \in Y : \lambda \text{ は } n \text{ の分割 }\}$$

また，Y は最小元 $\emptyset = (0, 0, \ldots)$ を持つ．

$\lambda \in Y_n$ に対して，$\emptyset$ から λ への saturated chain ($\emptyset = \lambda^{(0)} < \lambda^{(1)} < \cdots < \lambda^{(n)} = \lambda$) ($\lambda^{(i)} \in Y_i$) は skew diagram $\lambda^{(i)} - \lambda^{(i-1)}$ の箱に数字 i を書き込んだ shape λ の standard tableau と同一視できる．例えば

$$(\,\emptyset < \ydiagram{1} < \ydiagram{2} < \ydiagram{2,1}\,) \in C_Y((2,1)) \leftrightarrow \begin{ytableau} 1 & 2 \\ 3 \end{ytableau} \in \mathrm{STab}((2,1))$$

と同一視する．よって，R-S 対応は次のように言いかえられる．

定理 2.1. 全単射

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{S}_n & \xrightarrow{\sim} & \coprod_{\lambda \vdash n} C_Y(\lambda) & \times & C_Y(\lambda) \\ w & \longmapsto & (\, c_1(w) & , & c_2(w)\,) \end{array}$$

が存在して

$$c_1(w^{-1}) = c_2(w), \quad c_2(w^{-1}) = c_1(w) \tag{1}$$

従って，$I(\mathfrak{S}_n) = \{x \in \mathfrak{S}_n : x^2 = 1\}$，$i(\mathfrak{S}_n) = \# I(\mathfrak{S}_n)$ とおくと，

命題 2.2.

(a) $\sum_{\lambda \in Y_n} e_Y(\lambda)^2 = n!$

(b) $\sum_{\lambda \in Y_n} e_Y(\lambda) = i(\mathfrak{S}_n)$

証明: (a) は R-S 対応から明らかである．(1) により，R-S 対応を制限すると全単射

$$\begin{array}{ccc} I(\mathfrak{S}_n) & \xrightarrow{\sim} & \{(c,c) : c \in C_Y(\lambda), \lambda \in Y_n\} \\ & & \\ w & \longmapsto & (c_1(w), c_1(w)) \end{array}$$

が引き起こされるので，(b) がわかる．

これから，$\alpha(0 \to n) = \sum_{\lambda \vdash n} e_Y(\lambda)$ の母関数は次のようになる．

命題 2.3.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_Y(0 \to n) \frac{z^n}{n!} = \exp\left(z + \frac{1}{2}z^2\right)$$

証明: 命題 2.2 により，$\alpha_Y(0 \to n) = i(\mathfrak{S}_n)$ である．$x \in \mathfrak{S}_n$ に対して，$x^2 = 1$ となるためには x の cycle type が $(1^k 2^l)$ となることが必要十分である．よって，

$$i(\mathfrak{S}_n) = \sum_{k+2l=n} \frac{n!}{1^k k! 2^l l!}$$

となるから，

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} i(\mathfrak{S}_n) \frac{z^n}{n!} &= \sum_{k \geq 0, l \geq 0} \frac{1}{1^k k! 2^l l!} z^{k+2l} \\ &= \left(\sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!}\right) \left(\sum_{l \geq 0} \frac{z^{2l}}{2^l l!}\right) \\ &= \exp z \cdot \exp \frac{z^2}{2} \end{aligned}$$

§3. Young 束の直積と wreath 積

§2 の結果を Young 束の直積に拡張する.

Young 束 Y の k 個の直積半順序集合を Y^k とする. つまり, Y^k は集合としては $\mathcal{P}$ の k 個の直積であり, その順序は

$$(\lambda^1, \dots, \lambda^k) \geq (\mu^1, \dots, \mu^k) \Longleftrightarrow \lambda^i \geq \mu^i \quad (i = 1, \dots, k)$$

で与えられる. $\rho(\lambda^1, \dots, \lambda^k) = |\lambda^1| + \cdots + |\lambda^k|$ によって, Y^k は次数つき半順序集合であり,

$$(Y^k)_n = \{(\lambda^1, \dots, \lambda^k) \in Y^k : |\lambda^1| + \cdots + |\lambda^k| = n\}$$

また, Y^k は最小元 $\widehat{0} = (\emptyset, \dots, \emptyset)$ を持つ. $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^1, \dots, \lambda^k) \in (Y^k)_n$ に対して, $\widehat{0}$ から $\boldsymbol{\lambda}$ への saturated chain 全体の集合

$$C_{Y^k}(\boldsymbol{\lambda}) = \{\widehat{0} = \boldsymbol{\lambda}^{(0)} < \boldsymbol{\lambda}^{(1)} < \cdots < \boldsymbol{\lambda}^{(n)} = \boldsymbol{\lambda} : \boldsymbol{\lambda}^{(i)} \in (Y^k)_i\}$$

の濃度は

$$(2) \qquad e_{Y^k}(\boldsymbol{\lambda}) = \# C_{Y^k}(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{n!}{|\lambda^1|! \cdots |\lambda^k|!} e_Y(\lambda^1) \cdots e_Y(\lambda^k)$$

さて, Γ を任意の有限群とする. Γ の対称群 $\mathfrak{S}_n$ による wreath 積とは, 次のように定義される群 $\Gamma \wr \mathfrak{S}_n$ のことである. 集合としては, $\Gamma \wr \mathfrak{S}_n$ は, 0 または Γ の元を成分とする $n \times n$ 行列 $X = (x_{ij})$ で, 0 でない成分 (Γ の元) が各行各列に 1 つずつ現われるもの全体からなる. そして, その積は普通の行列の積によって定義される. $\Gamma \wr \mathfrak{S}_n$ の位数は $(\#\Gamma)^n n!$ である. 例えば, Γ が位数 2 の巡回群のとき $\Gamma \wr \mathfrak{S}_n$ は B_n 型 Weyl 群である.

今，$\{\eta_1, \ldots, \eta_k\}$ を Γ の複素既約指標の全体とし，η_i の次数を d_i とおく．このとき，$\Gamma \wr \mathfrak{S}_n$ の既約表現は $(Y^k)_n$ の元でパラメトライズされる．$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^1, \ldots, \lambda^k) \in (Y^k)_n$ に対応する $\Gamma \wr \mathfrak{S}_n$ の既約指標を $\chi^{\boldsymbol{\lambda}}$ とするとその次数は

$$\chi^{\boldsymbol{\lambda}}(1) = e_{Y^k}(\boldsymbol{\lambda}) \prod_{i=1}^{k} d_i^{|\lambda^i|} \tag{3}$$

で与えられる．従って，

命題 3.1. Γ が位数 r の可換群のとき，$\chi^{\boldsymbol{\lambda}}(1) = e_{Y^r}(\boldsymbol{\lambda})$ となるから，

$$\sum_{\boldsymbol{\lambda} \in (Y^r)_n} e_{Y^r}(\boldsymbol{\lambda})^2 = r^n n!$$

一般に，有限群 G に対して

$$I(G) = \{x \in G : x^2 = 1\}, \quad i(G) = \# I(G)$$

とおく．

命題 3.2.

$$\sum_{n=0}^{\infty} i(\Gamma \wr \mathfrak{S}_n) \frac{z^n}{n!} = \exp\left(i(\Gamma) z + \frac{1}{2}(\#\Gamma) z^2 \right)$$

証明: $X = (x_{ij}) \in \Gamma \wr \mathfrak{S}_n$ が $X^2 = 1$ を満たすためには，その 0 でない成分 $x_{ij} \in \Gamma$ が全て $x_{ij} x_{ji} = 1$ を満たせばよい．従って，

$$i(\Gamma \wr \mathfrak{S}_n) = \sum_{k+2l=n} \frac{n!}{1^k k! 2^l l!} i(\Gamma)^k (\#\Gamma)^l$$

となるから，命題 2.3 の証明と同様にして $i(\Gamma \wr \mathfrak{S}_n)$ の母関数が計算できる.

注意. より一般に，$i_k(G) = \#\{x \in G : x^k = 1\}$ とおくと

$$\sum_{n=0}^{\infty} i_k(\Gamma \wr \mathfrak{S}_n)\frac{z^n}{n!} = \prod_{d|k} \exp\left(\frac{(\#\Gamma)^{d-1} i_{k/d}(\Gamma)}{d} z^d\right)$$

一方，$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^1, \ldots, \lambda^k) \in (Y^k)_n$ のとき，(2) と命題 2.3 から

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\boldsymbol{\lambda}\in(Y^r)_n} e_{Y^r}(\boldsymbol{\lambda})\right) = \left(\exp(z + \frac{1}{2}z^2)\right)^r \tag{4}$$

$$= \exp\left(rz + \frac{1}{2}rz^2\right)$$

となる．これを命題 3.2 と比較すると，

命題 3.3. Γ が位数 2 の巡回群の直積で，Γ の位数が r であるとき

$$\sum_{\boldsymbol{\lambda}\in(Y^r)_n} e_{Y^r}(\boldsymbol{\lambda}) = i(\Gamma \wr \mathfrak{S}_n)$$

命題 3.1 と命題 3.2 は Young 束だけに関する主張であり，対称群 (R-S 対応) を用いないで直接これらを証明することもできる．これについては，§5 で述べる．次節では，wreath 積 $\Gamma \wr \mathfrak{S}_n$ に対する R-S 対応を構成し，それを用いて命題 3.1, 命題 3.3 を示す.

また，有限群 G の複素既約指標の次数の総和を $d(G)$ とすると，(3) と命題 2.3 より，

$$\sum_{n\geq 0} d(\Gamma \wr \mathfrak{S}_n)\frac{z^n}{n!} = \exp\left(d(\Gamma)z + \frac{1}{2}(\#\Gamma)z^2\right)$$

これを (4) と比べると，

命題 3.4. Γ が位数 r の可換群のとき，

$$\sum_{\boldsymbol{\lambda}\in(Y^r)_n} e_{Y^r}(\boldsymbol{\lambda}) = d(\Gamma \wr \mathfrak{S}_n)$$

この命題は，次の事実からもわかる．$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^1, \ldots, \lambda^k)$ に対応する $\Gamma \wr \mathfrak{S}_n$ の既約指標 $\chi^{\boldsymbol{\lambda}}$ を部分群 $\Gamma \wr \mathfrak{S}_{n-1} = \{X = (x_{ij}) : x_{nn} = 1\}$ に制限すると

$$\chi^{\boldsymbol{\lambda}}\downarrow_{\Gamma\wr\mathfrak{S}_{n-1}} = \sum_{i=1}^{k} d_i \sum_{\lambda^i \text{は} \mu^i \text{を覆う}} \chi^{(\lambda^1,\ldots,\mu^i,\ldots,\lambda^k)} \tag{5}$$

のように分解する．

§4. wreath 積の Robinson-Schensted 対応

有限群 Γ を固定し，$\Gamma \wr \mathfrak{S}_n$ に対する R-S 対応を構成する．そのために，R-S 対応の行き先として

$$\mathcal{T}_{\Gamma,n} = \coprod_{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{\lambda}} \prod_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{STab}(\boldsymbol{\lambda}(\gamma); \boldsymbol{B}(\gamma)) \times \mathrm{STab}(\boldsymbol{\lambda}(\gamma); \boldsymbol{A}(\gamma))$$

とおく．ただし，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{\lambda}$ は次を満たす写像 $\boldsymbol{A}: \Gamma \to 2^{[n]}$, $\boldsymbol{B}: \Gamma \to 2^{[n]}$ ($2^{[n]}$ は $[n]$ の部分集合全体のなす集合を表わす)，$\boldsymbol{\lambda}: \Gamma \to Y$ 全体を走る．

$$\coprod_{\gamma \in \Gamma} \boldsymbol{A}(\gamma) = \coprod_{\gamma \in \Gamma} \boldsymbol{B}(\gamma) = [n] \quad \text{(disjoint union)},$$

$$\#\boldsymbol{A}(\gamma) = \#\boldsymbol{B}(\gamma) = |\boldsymbol{\lambda}(\gamma)| \quad (\gamma \in \Gamma).$$

そして，$\Gamma \wr \mathfrak{S}_n$ から $\mathcal{T}_{\Gamma,n}$ への対応を次のように構成する．$X = (x_{ij}) \in \Gamma \wr \mathfrak{S}_n$ とする．$\gamma \in \Gamma$ に対して，X の成分のうち γ に等しいものを1で，そうでないものを0で置き換えてえられる $(0,1)$-行列を X_γ と表す．そして，行列 X_γ に Knuth 対応を施して得られる semi-standard tableau の対を $(P_\gamma(X), Q_\gamma(X))$ とする．つまり，X_γ の 0 でない成分が p_i 行, q_i 列 $(1 \le i \le k)$ にあるとし，$q_1 < q_2 < \cdots < q_k$ とするとき，

$$P_\gamma(X) = \emptyset \leftarrow p_1 \leftarrow p_2 \leftarrow \cdots \leftarrow p_k$$

であり，$Q_\gamma(X)$ は tableau $\emptyset \leftarrow p_0 \leftarrow \cdots \leftarrow p_{i-1}$ に p_i を insert したときに増えた箱に数字 q_i を書き込んで得られる tableau である．このとき，$(P_\gamma(X), Q_\gamma(X))_{\gamma \in \Gamma} \in \mathcal{T}_{\Gamma,n}$ となる．

例． Γ として，位数 3 の巡回群 $Z_3=\{1,\omega,\omega^2\}$ $(\omega^3=1)$ をとり，

$$X=\begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in Z_3 \wr \mathfrak{S}_7$$

を考える．すると，X_γ は次のようになる．(ただし，0 でない成分のある行と列のみを取り出して表している．)

$$X_1=\begin{array}{c} \\ 2 \\ 6 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 4 & 7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad X_\omega=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix} \end{array}, \quad X_{\omega^2}=\begin{array}{c} \\ 3 \\ 7 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \end{array}$$

これらの行列に，Knuth 対応を施すと

$$(P_1(X),Q_1(X))=\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 6 \\ \hline\end{array}\,,\ \begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 7 \\ \hline\end{array}\right)$$

$$(P_\omega(X),Q_\omega(X))=\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4 \\ \hline 5 \\ \cline{1-1}\end{array}\,,\ \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 6 \\ \cline{1-1}\end{array}\right)$$

$$(P_{\omega^2}(X),Q_{\omega^2}(X))=\left(\begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline 7 \\ \hline\end{array}\,,\ \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 5 \\ \hline\end{array}\right)$$

定理 4.1. 上のようにして作った対応

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \wr \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \mathcal{T}_{\Gamma,n} \\ X & \longmapsto & (\,P_\gamma(X), Q_\gamma(X)\,)_{\gamma\in\Gamma} \end{array}$$

は全単射であり，次の性質を持つ.

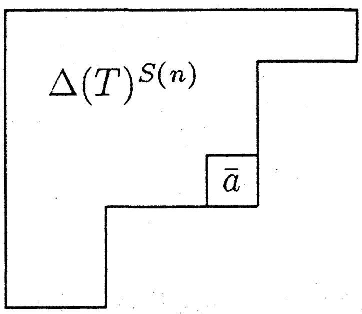
(a) $P_\gamma(X^{-1}) = Q_{\gamma^{-1}}(X), \quad Q_\gamma(X^{-1}) = P_{\gamma^{-1}}(X)$

$X_0 = (\delta_{i,n+1-j}) \in \Gamma \wr \mathfrak{S}_n$ とすると

(b) $P_\gamma(X_0X) = {}^tP_\gamma(X)^{S(n)}, \quad Q_\gamma(X_0X) = {}^tQ_\gamma(X)$

(c) $P_\gamma(XX_0) = {}^tP_\gamma(X), \quad Q_\gamma(XX_0) = {}^tQ_\gamma(X)^{S(n)}$

ここで，$T \in \mathrm{STab}(\lambda; A)$ $(A \subset [n])$ に対して，$T^{S(n)} \in \mathrm{STab}(\lambda; \overline{A})$ $(\overline{A} = \{n+1-a : a \in A\})$ は次のように帰納的に定義される tableau である：



ただし，$\bar{a}$ は $\overline{A}$ の最大元である.

ここで，$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^1, \ldots, \lambda^k) \in (Y^k)_n$ に対して，明らかな全単射

$$C_{Y^k}(\boldsymbol{\lambda}) \longrightarrow \coprod_{(A_1,\ldots,A_k)} \mathrm{STab}(\lambda^1; A_1) \times \cdots \times \mathrm{STab}(\lambda^k; A_k)$$

($(A_1,\ldots,A_k)$ は $\coprod_{i=1}^{k} A_i = [n]$ となる $[n]$ の部分集合の列全体を走る) が存在する．例えば，$k=2$ のとき，

$$(\emptyset,\emptyset) < (\ydiagram{1},\emptyset) < (\ydiagram{1},\ydiagram{1}) < (\ydiagram{1},\ydiagram{2}) < (\ydiagram{1,1},\ydiagram{2})$$

$$\longleftrightarrow \left(\begin{ytableau}1\\4\end{ytableau},\begin{ytableau}2&3\end{ytableau}\right)$$

のように対応している．

系 4.2. Γ の位数が r のとき，定理 4.1 の対応は全単射

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma \wr \mathfrak{S}_n & \xrightarrow{\sim} & \displaystyle\coprod_{\boldsymbol{\lambda}\in(Y^r)_n} C_{Y^r}(\boldsymbol{\lambda}) & \times & C_{Y^r}(\boldsymbol{\lambda}) \\ X & \longmapsto & (\, c_1(X) & , & c_2(X)\,) \end{array}$$

を引き起こす．よって，

$$\sum_{\boldsymbol{\lambda}\in(Y^r)_n} e_{Y^r}(\boldsymbol{\lambda})^2 = r^n n!$$

系 4.3. Γ が位数 2 の巡回群の直積で，その位数が r であるとき，系 4.2 の全単射は

$$c_1(X^{-1}) = c_2(X), \quad c_2(X^{-1}) = c_1(X)$$

を満たすから，全単射

$$I(\Gamma \wr \mathfrak{S}_n) \xrightarrow{\sim} \coprod_{\boldsymbol{\lambda}\in(Y^r)_n} C_{Y^r}(\boldsymbol{\lambda})$$

が引き起こされる．よって，

$$\sum_{\boldsymbol{\lambda} \in (Y^r)_n} e_{Y^r}(\boldsymbol{\lambda}) = i(\Gamma \wr \mathfrak{S}_n)$$

§5. r-differential poset

命題 3.1，3.2 は Young 束の直積だけでなくより一般に r-differential poset (poset とは partially ordered set の略である) に対して成り立つ．

定義． $r \in \mathbb{N}$ とする．次の条件 (D1), (D2), (D3) を満たす半順序集合を r-differential poset という．

(D1) P は最小元 $\hat{0}$ を持つ次数つき半順序集合であり，任意の $x < y$ に対して，$\{z \in P : x \leq z \leq y\}$ は有限集合である．

(D2) $x \neq y$ のとき，$\#(C^+(x) \cap C^+(y)) = \#(C^-(x) \cap C^-(y))$．

(D3) $x \in P$ のとき，$\#C^+(x) = \#C^-(x) + r$．

命題 5.1. Young 束の直積 Y^r は r-differential poset である．

証明: 定義から，P が r-differential poset，Q が s-differential poset ならば，その直積 $P \times Q$ は $(r+s)$-differential poset となる．よって，Y が 1-differential poset であることを示せばよいが，定義の条件 (D1)，(D2) は Young 束については明らかである．条件 (D3) については，$\lambda \in Y$ に対して，$C^+(\lambda)$ (resp. $C^-(\lambda)$) が λ の Young 図形の隅 (resp. 角) の個数に等しいことからわかる．

定理 5.2. ([**St2**, Prop.3.1, Cor.3.9]) P が r-differential poset ならば

$$\sum_{x\in P_n} e_P(x)^2 = r^n n! \tag{6}$$

$$\sum_{n\geq 0} \alpha_P(0\to n)\frac{t^n}{n!} = \exp\left(rt+\frac{1}{2}rt^2\right) \tag{7}$$

が成り立つ.

この定理を証明するために以下の記号を導入する. P を r-differential poset とする. t に関する複素数体 $\mathbb{C}$ 上の 1 変数べき級数体を K とし, P の元の体 K 上の (無限) 線型結合全体のなす K線型空間を $\widehat{K}P$ とする. 線型変換 $U, D : \widehat{K}P \to \widehat{K}P$ を

$$Ux = \sum_{y\in C^+(x)} y, \quad Dx = \sum_{y\in C^-(x)} y$$

によって定義し, $\mathbf{P} = \sum_{x\in P} x \in \widehat{K}P$ とおく. すると, r-differential poset の定義から

$$DU - UD = r\cdot \mathrm{Id} \tag{8}$$

$$D\mathbf{P} = (U+r)\mathbf{P} \tag{9}$$

注意. P が最小元 $\hat{0}$ をもつ順序つき半順序集合で, 各 n に対して P_n が有限集合であるとする. このとき, P が r-differential poset であることと (8) が成り立つことは同値である.

定理 5.2 の証明: まず, $\sum_{x\in P_n} e_P(x)^2$ は $D^nU^n\widehat{0}$ における $\widehat{0}$ の係数に等しい. ところが, (8) と $D\widehat{0}=0$ を繰り返し用いると,

$$D^nU^n\widehat{0} = r^n n!\widehat{0}$$

従って, $\sum_{x\in P_n} e_P(x)^2 = r^n n!$. 次に, (7) を示すために,

$$e^{Dt}\mathbf{P} = e^{rt+rt^2/2+Ut}\mathbf{P} \tag{10}$$

に注意する. 実際, (10) の左辺は

$$DH(t)\mathbf{P} = \frac{\partial H}{\partial t}(t)\mathbf{P}, \quad H(0)\mathbf{P} = \mathbf{P}$$

で特徴づけられ, (8), (9) を用いると (10) の右辺もこれを満たすことが分かる. さて, $\alpha_P(0\to n)$ は $D^n\mathbf{P}$ における $\widehat{0}$ の係数に等しいから, $\sum_{n\geq 0}\alpha_P(0\to n)t^n/n!$ は $e^{Dt}\mathbf{P}$ における $\widehat{0}$ の係数に等しい. ところが, $k>0$, $x\in P$ のとき U^kx には $\widehat{0}$ が現れないから, (10) の右辺における $\widehat{0}$ の係数は $\exp(rt+\frac{1}{2}rt^2)$ である. これで, (7) が示された.

このように偏微分方程式を解くことによって, Pに関する数え上げ問題を解くことができるので, differential poset という名前がある. 例えば, 次のようなこともわかる.

命題 5.3. ([**St**, Prop.3.14]) P を r-differential poset とする. $x\in P$ と $n\in\mathbb{N}$ に対して, P の元の列 $\widehat{0}=x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x_n=x$ で, $x_i\in C^+(x_{i-1})\cup C^-(x_{i-1})$ $(i=1,\ldots,n)$ を満たすものの個数を $\delta_n(x)$ とする. このとき,

$$\sum_{x\in P_n\cup P_{n-2}\cup P_{n-4}\cup\ldots}\delta_n(x)^2 = \frac{(2n)!r^n}{2^n n!}$$

$P=Y$ のときこの命題は,

$$\sum_{\lambda\vdash n,n-2,n-4,\dots}(\#\,\mathrm{UDTab}_n(\lambda))^2=\frac{(2n)!}{2^n n!}$$

ということであり, Berere の insertion を用いても示すことができる. ([**Su**, §8])

$P=Y^r$ のとき, 上で定義した線型変換 D, U には次のような群論的な意味がある. Y^r の元を基底とする体 K 上の線型空間を $K(Y^r)$ とし, $\widehat{K}(Y^r)$ の部分空間と見なし, U, D を $K(Y^r)$ に制限して考える. Γ を位数 r の可換群とする. $\Gamma\wr\mathfrak{S}_n$ 上の K に値をもつ類関数全体のなす線型空間を $CF_K(\Gamma\wr\mathfrak{S}_n)$ と表わすと, 対応 $\boldsymbol{\lambda}\mapsto\chi^{\boldsymbol{\lambda}}$ によって, $K(Y^r)\cong\oplus_{n\geq 0}CF_K(\Gamma\wr\mathfrak{S}_n)$ となる. この同型で, $K(Y^r)$ と $\oplus_{n\geq 0}CF_K(\Gamma\wr\mathfrak{S}_n)$ を同一視すると,

$$U=\oplus_{n\geq 0}\,\mathrm{Ind}_{\Gamma\wr\mathfrak{S}_n}^{\Gamma\wr\mathfrak{S}_{n+1}}$$
$$D=\oplus_{n\geq 0}\,\mathrm{Res}_{\Gamma\wr\mathfrak{S}_n}^{\Gamma\wr\mathfrak{S}_{n+1}}$$

ここで, Ind_H^G は H から G への induce up を, Res_H^G は G から H への制限を表わす. (§2 の (5) を見よ.) そして, 線型変換 UD の固有ベクトルについて, 次が成り立つ.

命題 5.4. Γ を位数 r の可換群とする. このとき, $X\in\Gamma\wr\mathfrak{S}_n$ に対して,

$$\pi_X=\sum_{\boldsymbol{\lambda}\in(Y^r)_n}\chi^{\boldsymbol{\lambda}}(X)\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{C}(Y^r)$$

は UD の固有ベクトルである.

より一般に，任意の有限群 Γ に対して，次のことが成り立つ. $\gamma \in \Gamma$ と $l \in \mathbb{N}$ に対して，線型変換 $U_\Gamma(\gamma, l), D_\Gamma(\gamma, l) : K(Y^r) \to K(Y^r)$ を次のように定義する.

$$U_\Gamma(\gamma, l)(\lambda^1, \ldots, \lambda^k) = \sum_{i=1}^{k} \eta_i(\gamma) \sum_{\mu^i} (-1)^{\mathrm{ht}(\mu^i/\lambda^i)} (\lambda^1, \ldots, \mu^i, \ldots, \lambda^k)$$

$$D_\Gamma(\gamma, l)(\lambda^1, \ldots, \lambda^k) = \sum_{i=1}^{k} \eta_i(\gamma^{-1}) \sum_{\nu^i} (-1)^{\mathrm{ht}(\lambda^i/\nu^i)} (\lambda^1, \ldots, \nu^i, \ldots, \lambda^k)$$

ここで，μ^i (resp. ν^i) は skew diagram μ^i/λ^i (resp.λ^i/ν^i が $\boxplus$ を含まず，かつ $|\mu^i| - |\lambda^i| = l$ (resp. $|\lambda^i| - |\nu^i| = l$) となる $\mu^i > \lambda^i$ (resp. $\nu^i < \mu^i$) 全体を動き，$\mathrm{ht}(\lambda/\mu)$ は skew diagram λ/μ の占める行数-1 を表わす. このとき，

命題 5.5. ([**O**, Prop.5.4]) $\Gamma \wr \mathfrak{S}_n$ の指標表は線型変換 $U_\Gamma(\gamma, l) D_\Gamma(\gamma, l)$ $(\gamma \in \Gamma, l \in \mathbb{N})$ の同時固有ベクトルを正規化して並べたものになっている.

参考文献

[**O**] S. Okada, *Wreath products by the symmetric groups and product posets of Young's lattices*, to appear in J. Combin. Theory A.

[**St**] R. P. Stanley, *Differential posets*, J. Amer. Math. Soc **1** (1988), 919–961.

[**Su**] S. Sundaram, *On the combinatorics of representations of* $Sp(2n, \mathbb{C})$, Ph.D. thesis, M.I.T..