数理解析研究所講究録
第 710 巻 1989 年 18-28

拡大的写像と特異葉層構造

稲葉尚志（千葉大教養）
松元重則（日大理工）

1. 1986年、平出耕一氏（[1]）は、次の注目すべき事実を示した。

定理（平出） 閉曲面上のあらゆる拡大的写像は、（擬）Anosov同相に位相共役であり、従って、特に S^2 上には存在しない。

距離空間 X 上の同相写像 f が拡大的であるとは、条件

$$\exists \varepsilon > 0 ;\ d(f^n x, f^n y) < \varepsilon\ (\forall n) \Longrightarrow x = y$$

をみたすことである。いま、

$$W^s_\varepsilon(x) = \{ y \in X \mid d(f^n x, f^n y) < \varepsilon,\ \forall n \geq 0 \}$$

$$W^u_\varepsilon(x) = \{ \quad \cdots \qquad\qquad \cdots \quad \forall n \leq 0 \}$$

とおくならば、拡大的であることは次と同値である。

$$\exists \varepsilon > 0 ;\quad \mathrm{Card}\ W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y) \leq 1,\ (\forall x, y)$$

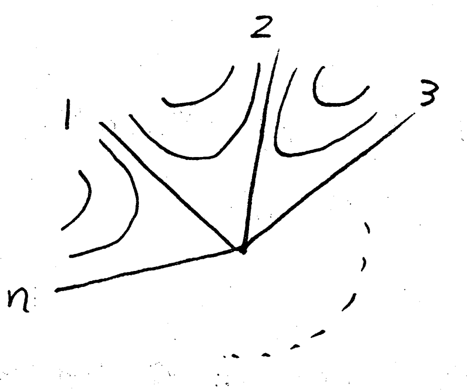
平出氏の手法は，この条件のもとで，$W^s_\varepsilon(x)$ 達の位相構造を調べることにある。

以下，Xを閉曲面としたとき，これについての彼の結論は次のとおりである。

$\exists\,\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u$: n-prong型特異点 $(n \geq 3)$ を許す C^0級葉層構造

s.t. (1) $W^\sigma_\varepsilon(x)$ は，$\mathcal{F}^\sigma$ の拡大された意味での葉における x の連結近傍 $(\sigma = s, u)$

(2) $\mathcal{F}^s$ と $\mathcal{F}^u$ は横断的



n-prong型特異点

(1)より $\mathcal{F}^\sigma$ が，f にて不変なことがわかる。

このことから，f が（擬）Anosov同相に，位相共役であることを示すのは容易である。また，prong型特異点の指数は負であり，Poincaré-Lefshetz公式より，XのEuler数は非正であること

がわかり 従って $X \neq S^2$ である。

2. 本講演において扱うのは 閉有向3-多様体 Mの上の、(非特異)拡大的流れである。目標は、ある種の3-多様体上の非存在定理である。

<u>主定理</u> 球面状3-多様体Mの上には、拡大的流れは存在しない。

M上の非特異流れ φ_tが拡大的であるとは、条件

$\forall \delta > 0,\ \exists \varepsilon > 0$ s.t.

$$d(\varphi_t(x), \varphi_{h(t)}(y)) < \varepsilon \ (\forall t) \quad \exists h \in \mathrm{Homeo}^+(\mathbb{R}, 0)$$

$$\Rightarrow y = \varphi_\tau(x), \quad |\tau| < \delta$$

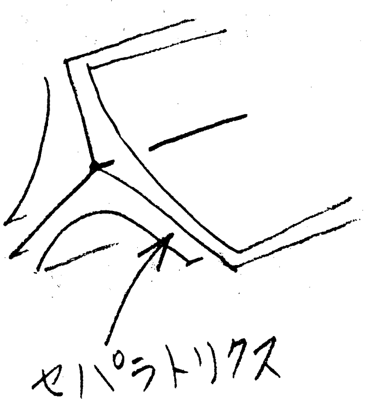
をみたすことである。

また Mが球面状であるとは、$\pi_3(M) \neq \{1\}$ かまたは、$\pi_2(M) \neq \{1\}$のことである。云いかえれば、

M:球面状 $\Leftrightarrow$ 1) $\pi_1(M)$が有限群
または
2) $M = M_1 \# M_2$ (非自明に)
または、
3) $M = S^2 \times S^1$

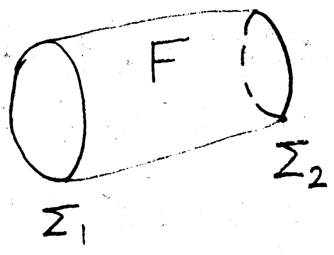
3. 証明の大略は次の通りである。
まず、φ_t が与えられたとき、その局所切断面の族 $\{D_\nu\}$ を十分たくさんとっておく。それに対する初帰写像（1st return map）f を考える。f は連続写像ではないが、f^{-1} も存在し、**1** でのべた拡大的なる条件をみたすことがすぐわかる。

このfに平出氏の方法を適用するのは思いの外、面倒な議論になるのであるが、岡正俊氏が[O]にて成功を収めている。従って、切断面上に n-prong型 $(n \geq 3)$ 特異点つきの葉層構造 $\mathcal{F}^s$ が得られたわけである。$\mathcal{F}^s$ は初帰写像 f にて不変であるから、流れ φ_t により流すことができて、M^3 上の余次元1葉層構造 $\mathcal{F}^s$ が得られる。$\mathcal{F}^s$ の特異点は下図のような構造をもっている。

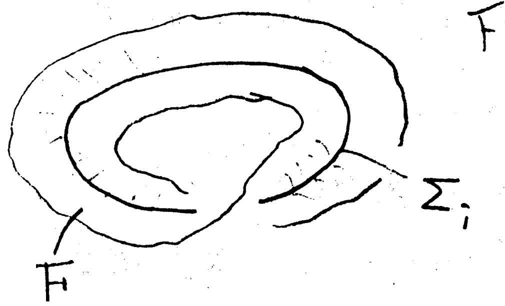


特異点の集合は有限個の埋め込まれた円の和をなす。そこでこのような特異点のことを、<u>円prong型</u>という。

また、特異点からでる葉のことを、セパラトリクスという。



左図のような特異点集合 Σ_1 からでて, Σ_2 に行く葉 F のことを, 特異点接続葉という。 F は, Σ_i のまわりで下図のようにねじれていてもよい。



すぐにわかる $\mathcal{F}^s$ の性質を列挙すると

(1) セパラトリックスは, 開円筒と同相。

(2) 特異点接続葉はない。

そして

(3) コンパクト葉はない。

4. 証明の最終段は, 次の Novikov コンパクト葉定理の拡張である。

<u>定理</u> (Novikov) 球面状多様体上の葉層構造は、コンパクト葉を持つ。

この拡張として，

<u>定理</u>　n−円prong型特異集合（$n \geq 3$）を持つ葉層構造が **3** の条件(1),(2)をみたせば，コンパクト葉が存在する。

証明は，もともとのNovikovの定理の証明を，なぞることになるが，気をつけなくてはならないのは $\mathcal{F}^s$ は横断的に向きづけられてはいないということである。また有限被覆にうつってもこれは解消されないということである。（奇数円-prongがある場合）従って，Poincaré-Bendixsonの定理は，もはや成り立たず（RosenbergのLabyrinthの例）これに基く議論は回避せねばならない。

注意として，1−円prong型特異点の存在を許せば上の定理は，もはや成り立たない。（指数を単に考えるだけなら，よさそうにみえるが。）

くわしくは [3] を参照していただきたい。

参考文献

1. K. Hiraide, Expansive homeomorphisms on compact surfaces, Preprint
2. M. Oka, Expansive flows on 3-manifolds have Markov families, in Preparation,
3. T. Inaba-S. Matsumoto, Nonsingular expansive flows and foliations with circle prong singularities, Preprint