数理解析研究所講究録
第717巻 1990年 1-14

高次収束する代数方程式の全根同時反復解法

名古屋大学工学部　櫻井　鉄也　(Tetsuya Sakurai)
名古屋大学工学部　鳥居　達生　(Tatsuo Torii)
名古屋大学工学部　杉浦　洋　(Hiroshi Sugiura)

1. はじめに

n次の代数方程式$f(z)=0$に対して，n個の近似根を用いて全根を同時に求める反復公式としてよく知られているものに，Durand-Kerner法[1)](2次収束)，Aberth法[2)](3次収束)がある．これらは$f(z)=0$の1つの根を求める反復法である，Newton法とHalley法の反復公式において，それぞれ$f'(z)$，$f''(z)$を近似根を用いた式によって置き換えることで得られる．

FarmerとLoizou[3)]はKiss法[4)]にこれを適用することで，4次と5次の公式を導いている．Nourein[5)]は1根を求める反復公式として，Padé近似を用いることでNewton法，Halley法，Kiss法を含む任意の収束次数の反復公式を示している．Farmerらの方法をこれに適用すれば，任意の次数の同時反復公式が得られることになるが，この計算はかなり複雑である．またこの公式では，近似根どうしが同じ根に収束してしまう現象が五十嵐[6)]によって報告されている．

一方，Nourein[7)]はAberth法において，ある近似根に対して新しい近似根を求めるときに，他の近似根はあらかじめNewton法によって改良したものを用いることで，4次の公式を導いている(例えば野寺[8)])．

我々はまず，各近似根上でのm次Taylor多項式の係数を用いて，単根に対して$m+2$次収束する全根同時反復公式を示す(アルゴリズムA)．これは$m=1$のときAberth法に一致する．さらに，NoureinがNewton法を用いてAberth法から4次収束する公式を導いたのと同様に，あらかじめ近似根を高次の反復法によって改良してから用いることで，同じTaylor多項式の係数を用いて，$2m+1$次収束する反復公式が得られることを示す(アルゴリズムA')．

あらかじめ近似根を改良する公式には櫻井，鳥居，杉浦の方法[9)]を用いる．この方法は多重根に対しても収束次数の落ちない方法であるので，アルゴリズムA'の全根同時反復公式は，重根に対しては多重度にかかわらずm次収束する性質を持つ．これらの収束次数について2節で述べる．

$f(z)$が単根のみを持つ場合でも，根の集団からはなれるとそれは多重根があるように見え，重根に対して遅い方法ではなかなか収束しない．我々の方法は，このようなときでもすぐに根に近づくため，Aberthの初期値[10)]のように根からはなれた初期値をとっても，それほど反復回数は変わらない．

Padé近似式の分子を求める算法は，文献9)に示されている．この算法を用いると，次数の異なる反復公式が容易に得られる．

2．任意次数の同時反復公式

ここではPadé近似式を用いて，任意の収束次数の同時反復公式が得られることを示す．Padé近似式については以下の定義を用いる．

定義　有理式$r_{M,N}(z)=P(z)/Q(z)$において，多項式$P(z),Q(z)$はそれぞれM次,N次で，互いに素であるとする．級数

$$F(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots$$

に対して

$$F(z)Q(z)-P(z)=O((z-z_0)^{M+N+1}) \tag{2.1}$$

が成り立つとき，$r_{M,N}(z)$をz_0における$F(z)$の$M+N$次Padé近似式あるいは，$[M/N]$-Padé近似式と呼ぶ．

通常は，分母の定数項を1に正規化した有理式を用いるが，本論文では分子の零点のみを問題とするため正規化についてはこだわらず，係数に定数倍の違いがあってもPadé近似式と呼ぶことにする．

$z_1,\ldots,z_n$をn次の代数方程式$f(z)=0$のn個の近似根とする．1つの近似根z_kに対する反復公式を以下のようにする．

[アルゴリズムA]

z_kを除いた近似根を零点に持つn-1次の多項式を

$$g_k(z)=\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(z-z_i) \tag{2.2}$$

とおく．z_kにおける$f(z)/g_k(z)$の$[1/m\text{-}1]$-Padé近似式を求める．分子は1次式であるから，零点を1つだけ持つ．この零点d_kを用いて

$$z'_k = z_k + d_k$$

を$f(z)$に対する新しい近似根とする．

これを$k=1,\ldots,n$について行えば，n個の近似根$z_1,\ldots,z_n$についての同時反復公式が得られる．

次にこの反復公式の収束次数について考察する．そのために，Padé近似式についての以下のような性質を示す．

補題1　$F(z)$はz_0の近傍で解析的で，$F(z_0)\neq 0$とする．z_0における$1/F(z)$のm次Taylor多項式を

$$G_m(z) = \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!}\left(\frac{1}{F}\right)^{(i)}(z_0)(z-z_0)^i \tag{2.3}$$

とする．このとき$G_m(z)$は，z_0における$F(z)$の$[0/m]$-Padé近似式であり

$$F(z) = \frac{1}{G_m(z)} + O((z-z_0)^{m+1}). \tag{2.4}$$

と表わせる．

証明　$F(z_0)\neq 0$なので，z_0において$1/F(z)$のTaylor展開式

$$\frac{1}{F(z)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\left(\frac{1}{F}\right)^{(i)}(z_0)(z-z_0)^i$$

が得られる．よって

$$\frac{1}{F(z)} - G_m(z) = \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{i!}\left(\frac{1}{F}\right)^{(i)}(z_0)(z-z_0)^i.$$

これより

$$F(z)G_m(z) = F(z)\left\{\frac{1}{F(z)} - \sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{1}{i!}\left(\frac{1}{F}\right)^{(i)}(z_0)(z-z_0)^i\right\}$$
$$= 1 + O((z-z_0)^{m+1})$$

となり

$$F(z) = \frac{1}{G_m(z)} + O((z-z_0)^{m+1}). \qquad \blacksquare$$

補題2　$F(z)$はz_0の近傍で解析的であるとし，$F(z_0) \neq 0$とする．このときz_0における$F(z)$の$[1/m\text{-}1]$-Padé近似式の分子の零点z'_0は

$$z'_0 = z_0 + m\frac{\left(\frac{1}{F}\right)^{(m-1)}(z_0)}{\left(\frac{1}{F}\right)^{(m)}(z_0)}. \tag{2.5}$$

証明　$G_m(z)$を式(2.3)とする．$G_m(z)$は補題1より，z_0における$F(z)$の$[0/m]$-Padé近似式である．ここで有理式$P(z)/Q(z)$を

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{1-c(z-z_0)}{G_m(z)-c(z-z_0)G_{m-1}(z)} \tag{2.6}$$

とする．このとき定数cを

$$c = \left(\frac{1}{F}\right)^{(m)}(z_0) \Big/ \left(\frac{1}{F}\right)^{(m-1)}(z_0)$$

とすると，$G_m(z)$と$c(z\text{-}z_0)G_{m\text{-}1}(z)$の最高次の係数が等しくなるので，$Q(z)$の次数は

$$\deg(Q) = \deg(G_m(z) - c(z-z_0)G_{m-1}(z))$$
$$= m-1$$

となる．よって

$$\deg(P) + \deg(Q) = 1 + (m-1) = m.$$

次に$P(z)/Q(z)$の近似次数をみる．式(2.6)より

$$\begin{aligned} F(z)Q(z)-P(z) &= F(z)\{G_m(z)-c(z-z_0)G_{m-1}(z)\}-\{1-c(z-z_0)\} \\ &= (F(z)G_m(z)-1)-c(z-z_0)(F(z)G_{m-1}(z)-1). \end{aligned}$$

$1/G_m(z)$と$1/G_{m-1}(z)$は，z_0でそれぞれ$F(z)$の$[0/m]$，$[0/m-1]$-Padé近似式であったから

$$F(z)Q(z)-P(z)=O((z-z_0)^{m+1})$$

となる．ゆえに$P(z)/Q(z)$は，z_0において$F(z)$の$[1/m-1]$-Padé近似式である．このとき分子$P(z)$の零点z'_0は

$$z'_0=z_0+\frac{1}{c}=z_0+m\frac{\left(\frac{1}{F}\right)^{(m-1)}(z_0)}{\left(\frac{1}{F}\right)^{(m)}(z_0)}. \qquad \blacksquare$$

式(2.5)は，$F(z)=f(z)/f'(z)$とおくとPomentale[11]の反復公式に一致する。

補題3　$F(z)$は

$$F(z)=\frac{z-\zeta}{\varphi(z)} \tag{2.7}$$

と表わせるものとする．また，$\varphi(z_0)\neq 0$とする．z_0は$F(z)=0$の根ζに十分近いものとし，$\varepsilon=\zeta-z_0$とする．このとき，z_0における$F(z)$の$[1/m-1]$-Padé近似式の分子の零点z'_0は

$$z'_0=\zeta+c\varphi^{(m)}(z_0)\varepsilon^{m+1}+O(\varepsilon^{2m+1}). \tag{2.8}$$

証明　式(2.7)より

$$\left(\frac{1}{F(z)}\right)^{(i)}=\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\left(\frac{1}{z-\zeta}\right)^{(i-j)}\varphi^{(j)}(z)$$
$$=\sum_{j=0}^{i}\frac{i!}{j!(i-j)!}(-1)(i-j)!\left(\frac{-1}{z-\zeta}\right)^{i-j+1}\varphi^{(j)}(z)$$
$$=-i!\sum_{j=0}^{i}\frac{\varphi^{(j)}(z)}{j!}\left(\frac{1}{\zeta-z}\right)^{i-j+1}$$

である．補題2より，z_0における$F(z)$の$[1/m\text{-}1]$-Padé近似式の分子の零点は

$$z_0'=z_0+m\frac{\left(\frac{1}{F}\right)^{(m-1)}(z_0)}{\left(\frac{1}{F}\right)^{(m)}(z_0)}$$
$$=z_0+m\frac{-(m-1)!\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\varphi^{(j)}(z_0)}{j!}\left(\frac{1}{\zeta-z_0}\right)^{m-j}}{-m!\sum_{j=0}^{m}\frac{\varphi^{(j)}(z_0)}{j!}\left(\frac{1}{\zeta-z_0}\right)^{m-j+1}}.$$

ここで$\varepsilon=\zeta-z_0$を代入して，右辺第2項の分子と分母にε^{m+1}をかけると

$$z_0'=z_0+\frac{\varepsilon\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\varphi^{(j)}(z_0)}{j!}\varepsilon^j}{\sum_{j=0}^{m}\frac{\varphi^{(j)}(z_0)}{j!}\varepsilon^j}$$
$$=z_0+\frac{\varepsilon}{1-c\varphi^{(m)}(z_0)\varepsilon^m}.$$

ここで

$$c=-\frac{1}{m!\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\varphi^{(j)}(z_0)}{j!}\varepsilon^j}.$$

εは十分小さいとしたので

$$z_0' = z_0 + \varepsilon\left\{1 + c\varphi^{(m)}(z_0)\varepsilon^m + \left(c\varphi^{(m)}(z_0)\varepsilon^m\right)^2 + \cdots\right\}$$
$$= z_0 + \varepsilon + c\varphi^{(m)}(z_0)\varepsilon^{m+1} + O\left(\varepsilon^{2m+1}\right).$$

$\zeta = z_0 + \varepsilon$より

$$z_0' = \zeta + c\varphi^{(m)}(z_0)\varepsilon^{m+1} + O\left(\varepsilon^{2m+1}\right). \qquad \blacksquare$$

上の補題から，$f(z)/g_k(z)$の分子が1次式のPadé近似式の零点には，以下のような性質があることがわかる．

定理1　$f(z)$はn次の多項式とし，$\zeta_1,\ldots,\zeta_n$は$f(z)$の零点で，互いに異なるとする．$f(z)=0$のn個の近似根$z_1,\ldots,z_n$はそれぞれ$\zeta_1,\ldots,\zeta_n$に十分近いものとし，$\varepsilon_i=\zeta_i - z_i$とする．

$$\varepsilon_M = \max_{1\le i\le n, i\ne k} \left|\varepsilon_i\right| \tag{2.9}$$

のとき，z_kにおける$f(z)/g_k(z)$の$[1/m\text{-}1]$-Padé近似式の分子の零点は

$$z_k' = \zeta_k + O\left(\varepsilon_M \varepsilon_k^{m+1}\right). \tag{2.10}$$

証明

$$\frac{f(z)}{g_k(z)} \equiv \frac{\prod_{i=1}^{n}(z-\zeta_i)}{\prod_{\substack{i=1\\ i\ne k}}^{n}(z-z_i)} = (z-\zeta_k)\prod_{\substack{i=1\\ i\ne k}}^{n}\left(\frac{z-\zeta_i}{z-z_i}\right)$$
$$= \frac{z-\zeta_k}{\varphi(z)}$$

とすると$\varphi(z)$は

$$\varphi(z)=\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\left(\frac{z-z_i}{z-\zeta_i}\right)=\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\left(\frac{z-\zeta_i+\zeta_i-z_i}{z-\zeta_i}\right)$$

$$=\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\left(1+\frac{\varepsilon_i}{z-\zeta_i}\right)$$

と表わせる．ここで

$$u_i(z)=\frac{1}{z-\zeta_i}$$

とおくと

$$\varphi(z)=1+\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\varepsilon_i u_i(z)+\cdots.$$

よって$\varphi^{(m)}(z_k)$は$m>0$のとき

$$\varphi^{(m)}(z_k)=\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\varepsilon_i u_i^{(m)}(z_k)+\cdots.$$

ζ_iは互いに異なるので

$$u_i^{(j)}(z_k)=\left(\frac{1}{z-\zeta_i}\right)^{(j)}\Bigg|_{z=z_k}=O(1),\quad j\geq 0$$

より

$$\varphi^{(m)}(z_k)=O(\varepsilon_M).$$

よって補題3より

この定理はアルゴリズムAによる反復公式が，単根のみを持つ$f(z)$の根に対して$m+2$次収束することを意味する．$m=1$のとき，この方法はAberth法に一致する．

定理2　$f(z)$はn次の多項式で重根を持つとし，$\zeta_1,\dots,\zeta_n$は$f(z)$の零点とする．$f(z)=0$のn個の近似根$z_1,\dots,z_n$はそれぞれ$\zeta_1,\dots,\zeta_n$に十分近く，$\varepsilon_i=\zeta_i-z_i$とし

$$\varepsilon_M = \max_{1\le i\le n, i\ne k} |\varepsilon_i|$$

であるとする．いまζ_kは重根であるとし，$\varepsilon_M << |\varepsilon_k|$とする．このとき，$z_k$における$f(z)/g_k(z)$の[1/$m$-1]-Padé近似式の分子の零点は

$$z_k' = \zeta_k + O(\varepsilon_M). \tag{2.11}$$

証明　ζ_kは重根であるから，$z_k-\zeta_l=O(\varepsilon_k)$，$l\ne k$であるような$\zeta_l$が存在する．そのため$u_l^{(j)}(z_k)$は

$$\begin{aligned} u_l^{(j)}(z_k) &= \left(\frac{1}{z-\zeta_l}\right)^{(j)}\Bigg|_{z=z_k} = (-1)^j\left(\frac{1}{z_k-\zeta_l}\right)^{j+1} \\ &= O\left(\frac{1}{\varepsilon_k^{j+1}}\right) \end{aligned}$$

となり$\varphi^{(m)}(z_k)$は

$$\varphi^{(m)}(z_k) = O\left(\frac{\varepsilon_M}{\varepsilon_k^{m+1}}\right)$$

となる．よって補題3より

$$\begin{aligned} z_k' &= \zeta_k + c\varphi^{(m)}(z_k)\varepsilon_k^{m+1} + O(\varepsilon_k^{2m+1}) \\ &= \zeta_k + O(\varepsilon_M). \end{aligned}$$

■

このことから，z_kに対する新しい近似根を求めるとき，z_k以外の近似根をあらかじめ収束次数の高い方法で改良しておけば，重根に対しても改良に用いた方法の収束次数だけは保証されることがわかる．あらかじめ他の近似根を改良する方法として，櫻井らの方法[9)]を用いることにする．この方法はm次Taylor多項式の係数を用いて，多重度にかかわりなくm次収束する．

3．同時反復公式の計算法

文献9)では，$f(z)/f'(z)$のPadé近似式の分子を求める算法が示されている．この算法はまた，一般の有理式に対して適用できる．これにより，有理式$h(z)=A(z)/B(z)$において，$A(z)$，$B(z)$それぞれのm次Taylor多項式が与えられたとき，$h(z)$のm次Padé近似式の分子が得られる．

アルゴリズムAのためには，z_kにおいて$f(z)$と$g_k(z)$のm次Taylor多項式を求め，文献9)の算法を用いればよい．

あらかじめ近似根を改良してから，アルゴリズムAの計算を行うアルゴリズムA'を以下に示す．

[アルゴリズムA']

i) 近似根$z_1,\ldots,z_n$に対して$w_i=z-z_i, i=1,2,\ldots,n$とし，それぞれの点で$f(z)$の$m$次Taylor多項式を求める．

ii) $k=1,\ldots,n$について$f(z)/f'(z)$の$[1/m-2]$-Padé近似式の分子を求める．その零点をw^*_kとして，各近似根の改良した値z^*_k

$$z_k^* = z_k + w_k^*$$

を求める．

iii) $k=1,\ldots,n$について

$$g_k(z) = \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} (z - z_i^*)$$

とし，z_kにおける$g_k(z)$のm次Taylor多項式を求める．これより$f(z)/g_k(z)$の$[1/m-1]$-Padé近似式の分子を求め，その零点$w'_1,\ldots,w'_n$から新しい近似根$z'_1,\ldots,z'_n$を

$$z'_k = z_k + w'_k$$

とする．

このようにして求めた新しい近似根から，あらためて$z_i = z'_i$，$i=1,\dots,n$として，すべての近似根が収束するまで繰り返す．この反復公式の収束次数を次の定理に示す．

定理3　$\zeta_k - z_k = O(e)$，$\zeta_i - z_i = O(e^m)$，$i \neq k$とする．このときz_kにおける$f(z)/g_k(z)$の$[1/m\ -1]$-Padé近似の分子の零点は

i) $z'_k = \zeta_k + O(\varepsilon^{2m+1})$　：$f(z)$が単根のみを持つとき

ii) $z'_k = \zeta_k + O(\varepsilon^m)$　：$f(z)$が重根を持つとき

である．

証明　仮定より$\varepsilon_k = O(\varepsilon)$，$\varepsilon_M = O(\varepsilon^m)$となる．よって定理1，2よりi)，ii)の結果を得る．■

ここで$g_k(z)$のTaylor多項式の計算法を示す．

$$e_k(z) \equiv \frac{g'_k(z)}{g_k(z)} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{1}{z - z_i}$$

とおくと，$e_k(z)$の高階導関数$e_k^{(i)}(z)$，$i \geq 0$は簡単に計算できる．ここで

$$g'_k(z) = e(z) g_k(z)$$

とし，両辺を微分すると

$$g_k^{(i+1)}(z) = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} e^{(i)}(z) g_k^{(i-j)}(z), \quad i \geq 0$$

より$g_k(z)$の高階導関数が得られる．

1回反復あたりの計算の手間は，多項式の次数nが大きいときには，ほとんどTaylor多項

式の係数の計算で占められる．アルゴリズムAは，z_kにおいて$f(z)$と$g_k(z)$のm次Taylor多項式を求めている．これを$k=1,\ldots,n$について計算しているので，結局1回反復あたりの計算量は$2(m+1)n^2$に比例する．アルゴリズムA'は，新たにTaylor多項式を計算していないので，計算量はアルゴリズムAと同じとみなせる．

4. 数値例

本方法を用いたいくつかの数値例を示す．計算はFORTRAN 4倍精度で行った．計算機は名古屋大学大型計算機センターのFACOM M-780を使用した．

1) 1回反復後の近似根の誤差．多項式は

$$f(z)=(z-1)^3(z-2)(z-3)(z-4),\quad n=6,$$
$$(z_1=z_2=z_3=1,\ z_4=2,\ z_5=3,\ z_6=4).$$

近似根は$|\zeta_i-z_i|=1.0\times10^{-2}$，$i=1, n$となるように配置した(表1).

以下の数値例では，問題とする多項式は，根を領域$[-1,1]\times[-1,1]$に乱数で配置した．

2) すべて単根とし，初期値をAberthの初期値[10]にとったときと，重心を中心として多項式の平均半径の円周上に初期値をとったときの，近似根の平均の反復回数．ここで多項式の次数は$n=20$とした(図1).

3) 5個の根を重根としたときの，近似根の平均の反復回数．初期値は2)と同様にとった．多項式の次数は$n=20$(図2).

各近似根上で，m次Taylor多項式の係数を用いている．これらの実験結果から，単根に対しては$2m+1$次収束し，重根に対してはm次収束していることがわかる．本方法は，重根に対しても高い収束次数を持つため，特に多項式が重根を持つ場合にAberth法と反復回数に大きな差がある．また，初期値のとり方による反復回数の差が少ない．

Farmerらの方法[3]にみられたような，1つの根にいくつもの近似根が多重度を超えて集まる現象はみられない．

	$\lvert z_1' - \zeta_1 \rvert$	$\lvert z_4' - \zeta_4 \rvert$
Aberth法	5.0×10^{-3}	1.3×10^{-6}
本方法 m=2	6.2×10^{-5}	1.8×10^{-10}
3	9.1×10^{-7}	4.3×10^{-14}
4	3.8×10^{-9}	3.4×10^{-19}
5	3.8×10^{-11}	2.4×10^{-22}

表1 1回反復後の近似根の誤差(ε=1.0×10^{-2})

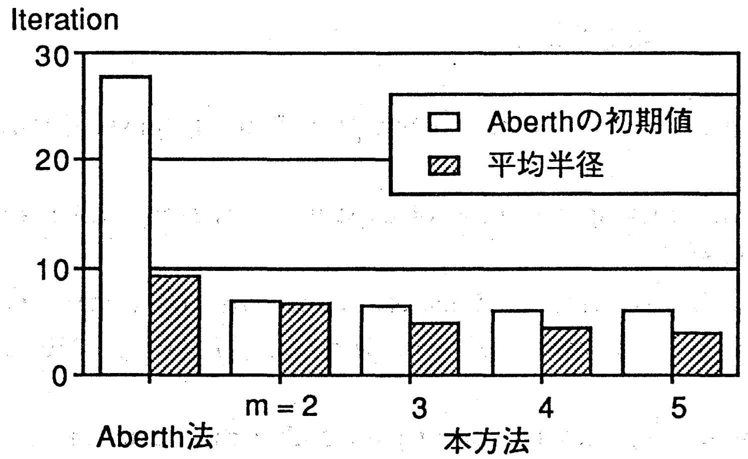

図 1
単根のみの多項式に対する
反復回数

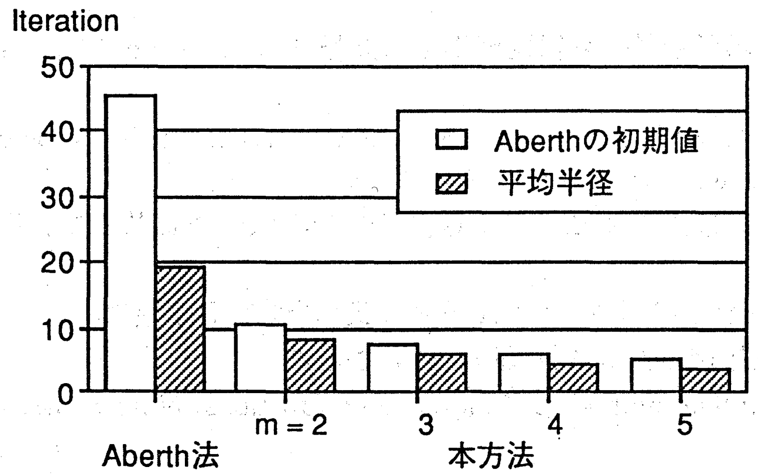

図 2
重根を含む多項式に対する
反復回数

5. おわりに

代数方程式$f(z)=0$の解を求めるために，高次収束する全根同時反復公式を提案した．この算法は，各近似根上でのm次Taylor多項式の係数を用いて，$f(z)$が単根のみを持つときには$2m+1$次，重根を持つときにはその多重度にかかわらずm次収束する．

本方法は，重根に対しても高い収束次数を持つため，多項式が重根を持つ場合にAberth法と比べて反復回数が相当減少する．また近似根どうしの癒着もみられない．

本方法は，各近似根上で$f(z)$と$g_k(z)$のm次Taylor多項式を求めるため，mを大きくするとそれだけ1回反復あたりの計算量が増える．しかし，多倍長演算等を用いて高い要求精度で計算する場合には，それに応じてmは大きくとったほうがよい．本論文で示したアルゴリズムは，収束次数を変えることが容易であるため，要求精度に応じて次数を変えることが可能である．

参考文献

1) Durand, E.: Solutions numériques des Équations Algébriques. Tome I, Masson, Paris (1960).
2) Aberth,O.: Iteration methods for finding all zeros of a polynomial simultaneously, *Math. Comp.* 27, pp.339-344 (1973).
3) Farmer, M. R. and Loizou, G.: A class of iteration functions for improving, simultaneously, approximations to the zeros of a polynomial, *BIT* 15, pp.250-258 (1975).
4) Kiss, I.: Über die Verallgemeinerung des Newtonischen Näherungsverfahrens, *Z. Angew. Math. Mech.* 34, pp. 68-69 (1954).
5) Nourein, A. W.: Root determination by use of Padé approximants, *BIT* 16, pp. 291-297 (1976).
6) 五十嵐正夫: 代数方程式と大域的解法, 情報処理学会研究報告 Vol. 89, No. 25, pp. 1-8 (1989).
7) Nourein, A. W.: An iteration formula for simultaneous determination of the zeros of a polynomial, *J. Comp. Appl. Math.* 4, pp.251-254 (1975).
8) 野寺隆: 4次収束をする代数方程式の解法, 情報処理学会全国大会予稿集 第27回, pp.1255-1256 (1983).
9) 櫻井鉄也, 鳥居達生, 杉浦洋: Padé近似による代数方程式の反復解法, 投稿中.
10) 伊理正夫: 数値計算 (理工系基礎の数学 12), 朝倉書店 (1984).
11) Pomentale, T.: A class of iterative method for holomorphic functions, *Numer. Math.* 18, pp. 193-203 (1971).