

ステップ関数, フィルタ関数, デルタ関数の分数式近似

筑波大学電子・情報工学系 池辺 八洲彦

1. まえがき: 本稿は Y. Ikebe, M. Kowalski & F. Stenger, Rational Approximation of the Step, Filter, and Impulse Functions (to appear) に基づく. この近似法の digital filter への implementation を目下研究中である (analogue filter としては実現しにくい).

2. 単位ステップ関数の近似

Stenger[1]によると

$$(1) \quad \chi(z) \equiv \frac{1}{1+k} \left\{ 1+k \cdot \operatorname{sn} \left[ \frac{2K}{\pi i} \log \left( \frac{z-1}{z+1} \right) - K+iK'; k \right] \right\}$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{r_n}{z-\alpha_n} + \frac{\bar{r}_n}{z-\bar{\alpha}_n} \right\}$$

は  $(-1, 1)$  を  $[1, 2/(1+k)]$  上に,  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$  を  $[0, (1-k)/(1+k)]$  上に map し,  $\chi(z) = O(1/z^2)$  ( $|z| \rightarrow \infty$ ) である. ただし,

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} z = \operatorname{sn}(u; k) \leftrightarrow u(z) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-k^2 t^2}}, \quad 0 < k < 1, \\ K = K(k) = u(1), \quad K' = K(\sqrt{1-k^2}), \\ \alpha_n = \frac{1+iq^n}{1-iq^n}, \quad r_n = -\frac{\pi}{(1+k)K} \frac{q^n}{(1-iq^n)^2}, \\ q = \exp(-\pi K'/K) \end{array} \right.$$

そして  $k \uparrow 1$  のとき,  $\chi(z)$  は  $(-1, 1)$  の特性関数  $\chi^*(z)$  に近づく:

$$(3) \quad \left( \int_{-\infty}^{\infty} |\chi(z) - \chi^*(z)|^{p'} dz \right)^{1/p'} \leq a^{1/p'} \cdot b^{1/p'},$$

ここに

$$(4) \begin{cases} 1 \leq p \leq \infty, (1/p) + (1/p') = 1, \\ a = (1-k)/(1+k), b = 4E/(1+k) - 2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\chi(x)| dx - 2, \\ E = \int_0^1 \sqrt{(1-k^2 t^2)/(1-t^2)} dt \end{cases}$$

また,  $k \uparrow 1$  のとき,

$$K' \rightarrow \pi/2, K \rightarrow \infty$$

だから,  $-\pi K'/K = h$  とおくと (ゆえに  $q = e^{-h}$ ),  
 $\chi(z)$  と少し異なる式

$$(5) \quad \tilde{\chi}(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{r_n}{z - \alpha_n} + \frac{\overline{r_n}}{z - \overline{\alpha_n}} \right\},$$

ただし

$$(6) \begin{cases} \alpha_n = (1+iq^n)/(1-iq^n), \\ r_n = -(h/\pi)q^n/(1-iq^n)^2 \\ q = e^{-h} (\pi/(1+k)K \approx \pi/(2K) \approx (h/\pi) \text{ に注意}) \end{cases}$$

が導かれる。(6)を実際に(5)に代入し, 変換  $z = (1-w)/(1+w)$  を行なえば,  
 $\tilde{\chi}((1-w)/(1+w)) \equiv \phi(w)$  は単位ステップ関数に似ている筈である。実数値のみ  
 で扱えるために  $\phi(w)$  の odd part  $(\phi(w) - \phi(-w))/2$  は  $\text{sgn } w$ , ゆえに  
 $1/2 + \{\phi(w) - \phi(-w)\}/2$  はふたたび単位ステップ関数に似てくるであろう。この  
 関数を  $H(w)$  と呼ぶ。結果的に

$$(7) \quad H(w) \equiv \frac{1}{2} + \frac{hw}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{kh}}{w^2 + e^{2kh}}$$

と定義し, その truncated series

$$(8) \quad H_N(w) = \frac{1}{2} + \frac{hw}{\pi} \sum_{k=-N}^N \frac{e^{kh}}{w^2 + e^{2kh}}, \quad N=1, 2, \dots$$

で単位ステップ関数

$$(9) \quad H(w) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn} w$$

を近似することを考える。

定理 1. 1  $h > 0, w \in \mathbb{R}$  に対し,

$$(a) \quad |\tilde{H}(w) - H(w)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cosh(n\pi^2/h)} < \frac{2e^{-\pi^2/h}}{1 - e^{-\pi^2/h}};$$

(b)  $h = \pi / (N+1)^{1/2}$  のとき,

$$|H_N(w) - \tilde{H}(w)| < \frac{1}{\pi} \left[ |w| + 2\pi + \frac{1}{|w|} \right] e^{-\pi \sqrt{N+1}}$$

(c)  $\varepsilon > 0$  とすれば,  $(-1/\varepsilon, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, 1/\varepsilon)$  上で

$$|H_N(w) - \tilde{H}(w)| < \left( \frac{2a + 2\pi}{\pi} \right) e^{-\pi \sqrt{N+1}},$$

ここに

$$a = \frac{1}{2} \left( \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

$H_N(w)$  のグラフを Fig. 1 に示す。

### 3. フィルタ関数の近似

$H(w)$ ,  $H_N(w)$  中の  $w$  を  $(1+w)/(1-w)$  で置換すると, フィルタ関数  $\tilde{\chi}(w)$  ( $=0, w < -1; =1/2, w = -1; =1, -1 < w < 1; =1/2, w = 1; =0, w > 1$ ) の近似が得られる。

$\chi_N(w)$  のグラフを Fig. 2 に示す。誤差解析の詳細は省略する。

4. デルタ関数の近似

$H_N'(w)$  ( $'=w$ に関する微分)でデルタ関数の近似を行う。その様子をFig.3に示す。

5. コメント

$H_N(w)$ 中の $w$ を $iw$ で置換すると、 $H_N(iw)=(1/2)+$  pure imaginary の形となり、このままの形ではアナログ・フィルタとしては実現しにくい。目下、いろいろの実現手段を研究中である。

Reference: [1] F. Stenger, SIAM. J. Num. Anal. 12, 235-254 (1975).

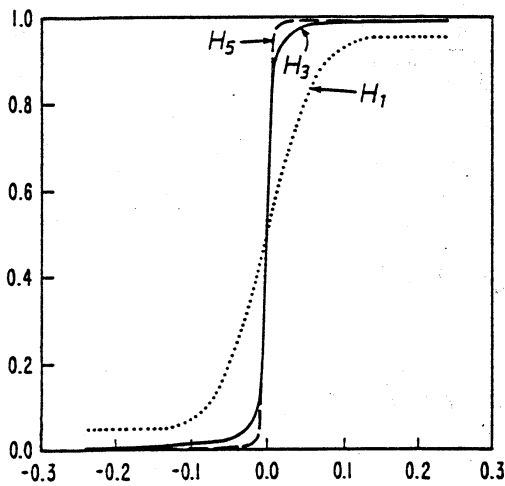


Fig.1.  $H_N$ によるステップ関数近似

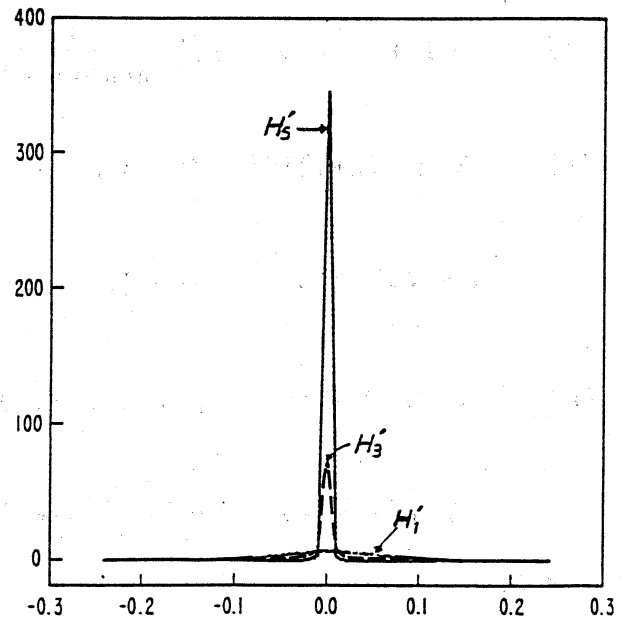


Fig.3.  $H'_N$ によるデルタ関数近似

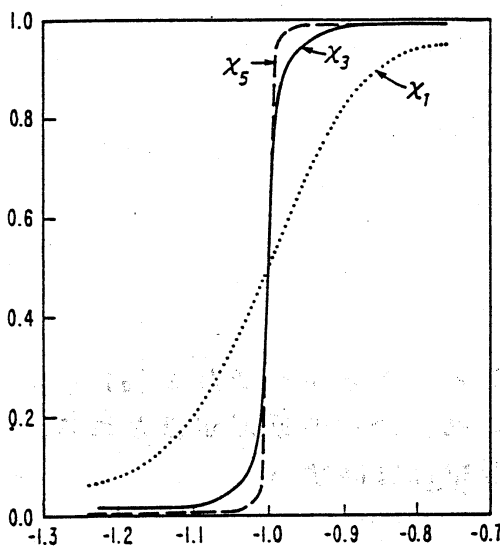


Fig.2.  $X_N$ によるフィルタ関数近似