

### Nedelec 要素を用いた三次元磁界解析

富士ファコム制御 金山 寛 (Hiroshi Kanayama)  
 富士ファコム制御 本山 浩 (Hiroshi Motoyama)  
 東大・教養 菊地文雄 (Fumio Kikuchi)

#### 概要

第三著者によって考案された Nedelec要素を用いた三次元静磁界解析方法の要点を述べ、Lagrange乗数を消去するペナルティ法的アプローチを紹介する。また Nedelecの四面体一次要素の特徴についても簡単に要点を示す。これらの準備のもとに、上記のアプローチを三次元渦電流問題に拡張することを試みる。数値例の詳細については別の機会に報告したい。なお、ここに述べる渦電流解析法の厳密な数学的正当化は今後の課題として残されている。

1. 三次元静磁場の基礎方程式と境界条件並びにその弱形式 [2], [6]

$$[F0] \begin{cases} \text{rot } H = J \text{ in } \Omega, & (1) & \text{div } (\mu H) = 0 \text{ in } \Omega, & (2) \\ (\mu H) \cdot n = 0 \text{ on } \Gamma_1, & (3) & H \times n = 0 \text{ on } \Gamma_2. & (4) \end{cases}$$

ここに、 $H$ は未知の磁界強度 [A/m]、 $J$ は電流密度 [A/m<sup>2</sup>]、 $\mu$ は透磁率 [Wb/A·m]で簡単のため区分的に正の定数とする。成分表示を $H = (H_1, H_2, H_3)$ と書くとき、 $\text{div } H = \partial H_1 / \partial X_1 + \partial H_2 / \partial X_2 + \partial H_3 / \partial X_3$ 、 $\text{rot } H = (\partial H_3 / \partial X_2 - \partial H_2 / \partial X_3, \partial H_1 / \partial X_3 - \partial H_3 / \partial X_1, \partial H_2 / \partial X_1 - \partial H_1 / \partial X_2)$ であり、 $X = (X_1, X_2, X_3)$ は位置ベクトルを表す。考える領域 $\Omega$ は多面体領域とし、 $\Omega$ の境界 $\Gamma$ は $\Gamma_1$ と $\Gamma_2$ で構成され( $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ )、それぞれ(3)、(4)の境界条件を満たす。 $n$ は領域 $\Omega$ の境界 $\Gamma$ における外向き単位法線ベクトルを表す。

Lagrangeの未定乗数 $p$ を導入して、[F0]の弱形式を書く。

$$[F1] \begin{cases} (\text{rot } H, \text{rot } H^*) + (\text{grad } p, \mu H^*) = (J, \text{rot } H^*), & (5) \\ (\mu H, \text{grad } p^*) = 0. & (6) \end{cases}$$

ここに、 $(\cdot, \cdot)$  は  $\Omega$  上の実二乗可積分空間  $L^2(\Omega)^3$  の内積を表し、 $\text{grad } p$  は  $p$  の勾配ベクトルを表す。 $H$  は境界条件 (3), (4) を満たし、 $H^*$  は  $H$  に対する任意の試験関数であり境界条件 (4) を満たす ( $\Gamma_2$  上で  $H^* \times n = 0$ )。Lagrange 乗数  $p$  は境界  $\Gamma_2$  上で 0 とし、 $p^*$  は  $p$  に対する同じクラスに属する任意の試験関数である。

$\varepsilon_p$  を小さな正のパラメータとし、[F1] に対し、以下のペナルティ法を考えることができる [2]。

$$[F2] \begin{cases} (\text{rot } H\varepsilon, \text{rot } H\varepsilon^*) + \varepsilon_p (\mu H\varepsilon, H\varepsilon^*) \\ = (J, \text{rot } H\varepsilon^*). \end{cases} \quad (7)$$

ここに、 $H\varepsilon$  は  $H$  に対するペナルティ近似であり、境界条件 (3), (4) を満たす (正確には  $H$  を  $H\varepsilon$  に変更した (3), (4) を満たすと言うべきであるが、以後こういう言い方をすることにする)。 $H\varepsilon^*$  は  $H\varepsilon$  に対する任意の試験関数であり境界条件 (4) を満たす。このペナルティ法の特徴は 0 に等しいため結局は不要になる Lagrange 乗数  $p$  を消去した定式化になっていることにある。 $\varepsilon_p$  の値を数値的不安定性が生じない範囲で 0 に近く選べば、 $H$  に十分近い  $H\varepsilon$  が得られる。

## 2. Nedelec の四面体一次要素 [8], [9]

要素内で  $H$  の有限要素法近似  $H_h$  の各成分は以下のように書ける [7]。

$$\begin{cases} H_{1h} = \alpha_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3, & (8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_{2h} = \alpha_4 - \alpha_2 X_1 + \alpha_5 X_3, & (9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_{3h} = \alpha_6 - \alpha_3 X_1 - \alpha_5 X_2, & (10) \end{cases}$$

ここに  $\alpha_1 \sim \alpha_6$  は要素内の自由度 (係数) を表す。要素上で  $\text{div } H_h = 0$ ,  $\text{rot } H_h = (-2\alpha_5, 2\alpha_3, -2\alpha_2)$  が成立することはすぐわかる。さらに  $H_h$  の接平面成分が要素間では連続で、各辺上では辺方向成分が定数になっている。そのことを見るためには以下の基底関数表現が有用である

[4]。図1の四面体要素 $P_i P_j P_k P_l$ の一辺 $P_i P_j$ に着目する。

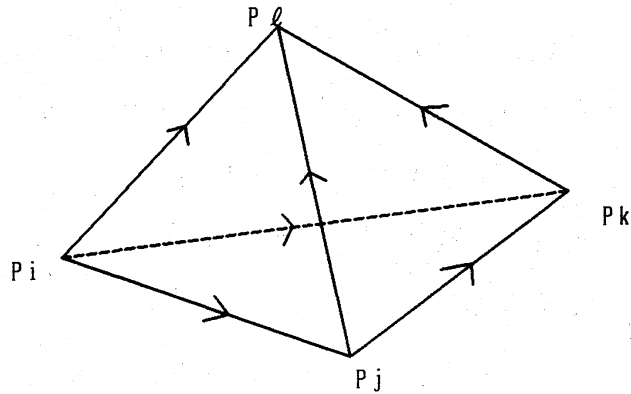


図1 Nedelecの四面体一次要素

頂点 $P_i$ に関する重心座標を $\lambda_i(X)$ と書くと辺 $P_i P_j$ に関するNedelec要素の基底関数 $W_{ij}$ は次式で与えられる。

$$W_{ij} = \ell_{ij} (\lambda_i \text{grad } \lambda_j - \lambda_j \text{grad } \lambda_i), \quad (11)$$

ここに $\ell_{ij}$ は辺 $P_i P_j$ の長さを表す。この基底関数を用いれば $H_h$ の要素内の表現として

$$H_h = \sum_{ij} H_{ij} W_{ij}, \quad (12)$$

が得られる。ここに $H_{ij}$ は適当に向きをつけられた辺 $P_i P_j$ における $H_h$ の辺方向成分を表し、総和は要素内の各辺にわたってとられる。実際、 $W_{ij}$ は、面 $P_j P_k P_l$ 上では、 $\lambda_i = 0$ で、 $\text{grad } \lambda_i$ は面 $P_j P_k P_l$ に垂直なベクトルであるから、接平面成分を持たない。同様に面 $P_i P_k P_l$ 上では、 $\lambda_j = 0$ で、 $\text{grad } \lambda_j$ は面 $P_i P_k P_l$ に垂直なベクトルであるから、やはり接平面成分を持たない。さらに辺 $P_i P_j$ 上では、 $(\lambda_i \text{grad } \lambda_j - \lambda_j \text{grad } \lambda_i) \cdot \overrightarrow{P_i P_j} = 1$ が成立する。ここに $\overrightarrow{P_i P_j}$ は頂点 $P_i$ から頂点 $P_j$ に向かうベクトルを表す。また $\cdot$ は通常の内積（ $\times$ はベクトル外積）を表す。上式の導出には $\text{grad } \lambda_j$ の大きさが頂点 $P_j$ から面 $P_i P_k P_l$ に降ろした垂線の長さの逆数になっていることに注意すればよい。最後に、

$W_{ij}$ さらには $H_h$ の成分表示が(8)~(10)の形で書けることは比較的容易にわかることを注意しておく。

### 3. 静磁場問題に対する有限要素法近似 [5], [7]

[F1] に対する有限要素法近似  $[F1_h]$  は $H$ に対しては前章で説明した Nedelec 要素を用い、 $p$  に対しては通常四面体一次要素を用いて近似することにより、以下のように書ける。

$$[F1_h] \quad \left\{ \begin{array}{l} (\text{rot } H_h, \text{rot } H_h^*) + (\text{grad } p_h, \mu H_h^*) \\ = (J, \text{rot } H_h^*), \end{array} \right. \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mu H_h, \text{grad } p_h^*) \\ = 0 \end{array} \right. \quad (14)$$

ここに $H_h$ は $H$ に対する有限要素法近似で境界条件(3), (4)を満たし、 $H_h^*$ は $H_h$ に対する任意の試験関数で境界条件(4)を満たす。また $p_h$ は $p$ に対する有限要素法近似で境界 $\Gamma_2$ 上で0であり、 $p_h^*$ は $p_h$ に対する同じクラスに属する任意の試験関数である。

全く同様に [F2] に対する有限要素法近似  $[F2_h]$  を考えることができる。

$$[F2_h] \quad \left\{ \begin{array}{l} (\text{rot } H \varepsilon_h, \text{rot } H \varepsilon_h^*) + \varepsilon_p (\mu H \varepsilon_h, H \varepsilon_h^*) \\ = (J, \text{rot } H \varepsilon_h^*), \end{array} \right. \quad (15)$$

ここに $H \varepsilon_h$ は $H \varepsilon$ に対する有限要素法近似で境界条件(3), (4)を満たし、 $H \varepsilon_h^*$ は $H \varepsilon_h$ に対する任意の試験関数で境界条件(4)を満たす。

### 4. 三次元渦電流問題の定式化

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } H = J_0 + J_e \\ \text{in } R \times (0, T), \end{array} \right. \quad (16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } H = J_0 \\ \text{in } S \times (0, T), \end{array} \right. \quad (17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } (\mu H) = 0 \\ \text{in } \Omega \times (0, T), \end{array} \right. \quad (18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } J_e = 0 \\ \text{in } R \times (0, T), \end{array} \right. \quad (19)$$

$$[E00] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } ((1/\sigma) J_e) = -\partial/\partial t (\mu H) \\ \text{in } R \times (0, T), \end{array} \right. \quad (20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [(\mu H) \cdot n]_{S_R} = 0 \\ \text{on } \Gamma \times (0, T), \end{array} \right. \quad (21)$$

$$[H \times n]^{S_R} = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma \times (0, T), \quad (22)$$

$$J_e \cdot n = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma \times (0, T), \quad (23)$$

$$(\mu H) \cdot n = 0 \quad \text{on} \quad \partial \Omega \times (0, T). \quad (24)$$

初期条件の記述は省略。

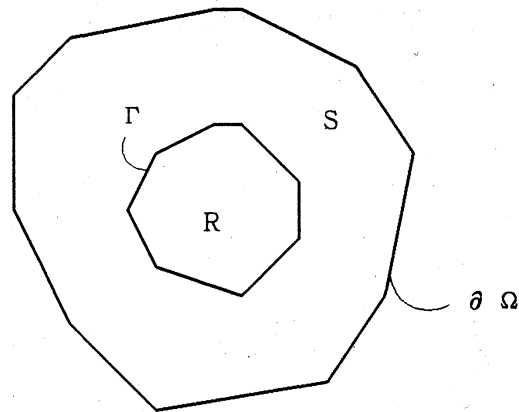


図2 多面体領域  $\Omega$

ここに多面体領域  $\Omega$  は導体領域  $R$  と不導体領域  $S$  から成り ( $\Omega = R + S$  で  $R$  と  $S$  も多面体領域)、二つの領域の境界  $\Gamma = \partial R \cap \partial S$  で、境界条件(21) - (23)を満たす。

$[ \quad ]^{S_R}$  は領域  $S$  の値から領域  $R$  の値を引くことを意味する。 $\partial \Omega$  は  $\Omega$  の境界を表し、そこで境界条件(24)を考える。

$J_0, J_e$  は強制電流密度、渦電流密度を表し、後者は  $H$  とともに未知関数である。 $\sigma$  は導電率 [S/m] で簡単のため正定数とし、 $(0, T)$  の  $T$  は時間 [sec] の上限を表す。ここでは正弦波状の交流場に関心があるので、時間微分  $\partial / \partial t$  を  $-i\omega$  ( $\omega$  は角周波数 [rad/sec],  $i$  は虚数単位) で置きかえ、複素数表示による定式化を考える。さらに実部、虚部それぞれの弱形式を考え、静磁場と同様の方法で計算することが可能になる。

実際のところ、複素数表示された  $H, J_0, J_e$  を  $\dot{H}, \dot{J}_0, \dot{J}_e$  と書き、 $\dot{H} = H_r + iH_i, \dot{J}_0 = J_{0r} + iJ_{0i}, \dot{J}_e = J_{er} + iJ_{ei}$  で実部、虚部を表すと、

形式的計算により [E00] は [E01] と書ける。

$$\operatorname{rot} H_r = J_{or} + J_{er} \quad \text{in} \quad R \times (0, T), \quad (25)$$

$$\operatorname{rot} H_i = J_{oi} + J_{ei} \quad \text{in} \quad R \times (0, T), \quad (26)$$

$$\operatorname{rot} H_r = J_{or} \quad \text{in} \quad S \times (0, T), \quad (27)$$

$$\operatorname{rot} H_i = J_{oi} \quad \text{in} \quad S \times (0, T), \quad (28)$$

$$\operatorname{div}(\mu H_r) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \times (0, T), \quad (29)$$

$$\operatorname{div}(\mu H_i) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \times (0, T), \quad (30)$$

$$\operatorname{div}(J_{er}) = 0 \quad \text{in} \quad R \times (0, T), \quad (31)$$

$$\operatorname{div}(J_{ei}) = 0 \quad \text{in} \quad R \times (0, T), \quad (32)$$

$$[E01] \quad \left\{ \operatorname{rot} \left( \frac{1}{\sigma} J_{er} \right) = -\omega \mu H_i \quad \text{in} \quad R \times (0, T), \quad (33) \right.$$

$$\left. \operatorname{rot} \left( \frac{1}{\sigma} J_{ei} \right) = \omega \mu H_r \quad \text{in} \quad R \times (0, T), \quad (34) \right.$$

$$[(\mu H_r) \cdot n]^{S_R} = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma \times (0, T), \quad (35)$$

$$[(\mu H_i) \cdot n]^{S_R} = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma \times (0, T), \quad (36)$$

$$[H_r \times n]^{S_R} = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma \times (0, T), \quad (37)$$

$$[H_i \times n]^{S_R} = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma \times (0, T), \quad (38)$$

$$J_{er} \cdot n = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma \times (0, T), \quad (39)$$

$$J_{ei} \cdot n = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma \times (0, T), \quad (40)$$

$$(\mu H_r) \cdot n = 0 \quad \text{on} \quad \partial \Omega \times (0, T), \quad (41)$$

$$(\mu H_i) \cdot n = 0 \quad \text{on} \quad \partial \Omega \times (0, T). \quad (42)$$

ここで、[F0] に対する [F1] にならって、[E01] の弱形式 [E1] を以下のように書くことができる。

$$\begin{aligned} & (\operatorname{rot} H_r, \operatorname{rot} H_r^*) + (\operatorname{grad} p_r, \mu H_r^*) \\ & = (J_{or}, \operatorname{rot} H_r^*) + (J_{er}, \operatorname{rot} H_r^*)_R, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} & (\operatorname{rot} H_i, \operatorname{rot} H_i^*) + (\operatorname{grad} p_i, \mu H_i^*) \\ & = (J_{oi}, \operatorname{rot} H_i^*) + (J_{ei}, \operatorname{rot} H_i^*)_R, \end{aligned} \quad (44)$$

$$(\mu H_r, \operatorname{grad} p_r^*) = 0, \quad (45)$$

$$(\mu H_i, \operatorname{grad} p_i^*) = 0, \quad (46)$$

[E1] {

$$\begin{aligned} (\text{rot}((1/\sigma)J_{er}), \text{rot } J_{er}^*)_R + (\text{grad } q_r, J_{er}^*)_R \\ = (-\omega \mu H_i, \text{rot } J_{er}^*)_R, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} (\text{rot}((1/\sigma)J_{ei}), \text{rot } J_{ei}^*)_R + (\text{grad } q_i, J_{ei}^*)_R \\ = (\omega \mu H_r, \text{rot } J_{ei}^*)_R, \end{aligned} \quad (48)$$

$$(J_{er}, \text{grad } q_r^*)_R = 0, \quad (49)$$

$$(J_{ei}, \text{grad } q_i^*)_R = 0, \quad (50)$$

ここに、 $(\cdot, \cdot)_R$ は $L^2(R)^3$ の内積を表し、 $H_r$ は境界条件(35), (37), (41)を満たし、 $H_r^*$ は任意の試験関数であり境界条件(37)を満たす。 $H_i$ 並びにそれに対する $H_i^*$ も全く同様である。 $p_r$ はLagrange乗数を表し、付加定数だけの不定性を持ち、 $p_r^*$ は $p_r$ と同じクラスに属する任意の試験関数である。 $p_i$ 並びにそれに対する $p_i^*$ も全く同様である。

また $J_{er}$ は境界条件(39)を満たし、 $J_{er}^*$ は $J_{er}$ と同じクラスに属する任意の試験関数である。 $J_{ei}$ 並びにそれに対する $J_{ei}^*$ も全く同様である。最後に $q_r$ もLagrange乗数を表わし、付加定数だけの不定性を持ち、 $q_r^*$ は $q_r$ と同じクラスに属する任意の試験関数である。 $q_i$ 並びにそれに対する $q_i^*$ も全く同様である。

また、[F1]に対する[F2]にならって、[E1]に対するペナルティ法[E2]を考えることができる( $H_r \varepsilon$ などを書くべき所を簡単のため $H_r$ などを書くことにする)。

$$\begin{aligned} (\text{rot } H_r, \text{rot } H_r^*) + \varepsilon_p(\mu H_r, H_r^*) \\ = (J_{or}, \text{rot } H_r^*) + (J_{er}, \text{rot } H_r^*)_R, \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} (\text{rot } H_i, \text{rot } H_i^*) + \varepsilon_p(\mu H_i, H_i^*) \\ = (J_{oi}, \text{rot } H_i^*) + (J_{ei}, \text{rot } H_i^*)_R, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \text{[E2]} \quad \left\{ \begin{aligned} (\text{rot}((1/\sigma)J_{er}), \text{rot } J_{er}^*)_R + \varepsilon_q(J_{er}, J_{er}^*)_R \\ = (-\omega \mu H_i, \text{rot } J_{er}^*)_R, \end{aligned} \right. \quad (53)$$

$$\begin{aligned} (\text{rot}((1/\sigma)J_{ei}), \text{rot } J_{ei}^*)_R + \varepsilon_q(J_{ei}, J_{ei}^*)_R \\ = (\omega \mu H_r, \text{rot } J_{ei}^*)_R, \end{aligned} \quad (54)$$

ここに  $\epsilon_p, \epsilon_q$  は Lagrange 乗数  $p, q$  に対する正のペナルティパラメータである。

#### 5. 渦電流問題の有限要素法近似

〔B1〕、〔B2〕の有限要素法近似〔B1<sub>h</sub>〕、〔B2<sub>h</sub>〕も〔F1<sub>h</sub>〕、〔F2<sub>h</sub>〕にならって考えることができる。すなわち Nedelec の要素を用いて  $H_r, H_i, J_{er}, J_{ei}$  の有限要素法近似  $H_{rh}, H_{ih}, J_{erh}, J_{eih}$  を考え、通常四面体一次要素を用いて  $p_r, p_i, q_r, q_i$  の有限要素法近似  $p_{rh}, p_{ih}, q_{rh}, q_{ih}$  を考えればよい。〔B1<sub>h</sub>〕、〔B2<sub>h</sub>〕を具体的に書くことは省略する。

#### 6. 数値例

電気学会モデル〔1〕、〔5〕を対象に、〔F1<sub>h</sub>〕の  $H_h$  に対する〔F2<sub>h</sub>〕の  $H\epsilon_h$  の近似度、計算時間並びに記憶容量の短縮度さらには  $H\epsilon_h$  の  $\epsilon_p$  に対する依存度を調べた。計算条件、使用計算機、解法ルーチンなどはすべて文献〔1〕、〔5〕と同じである。おおむね期待通りの結果が出ている。

また三次元渦電流問題に関する国際的ワークショップ (TEAM ワークショップ) で設定された問題 7 (非対称穴あき導体の三次元渦電流解析)〔3a〕について、現在計算を行っている段階である。解析結果については別の機会に報告したい。なお同じ問題をここに述べた方法とは全く異なるアプローチ〔3〕で計算した報告〔5a〕があることを付記しておく。

#### 参 考 文 献

- 〔1〕 菊地文雄, 金山寛, 本山浩: 大規模磁界解析, Computrol No. 26, pp. 114-119
- 〔2〕 菊地文雄, 富国: 共変要素による電磁場問題に対する混合法の開発, 第 3 回計算力学シンポジウム報文集, pp. 151-158, 1989
- 〔3〕 木住野泰光, 本山浩, 金山寛, 遠藤研二: 有限要素法による三



- 次元うず電流解析, 日本シミュレーション学会第10回計算電気・電子工学シンポジウム論文集, pp. 97-102, 1989
- [3a] 中田高義, 高橋則雄, 藤原耕二, 岡田幸弘: 非対称穴あき導体の三次元渦電流解析, 日本シミュレーション学会第9回計算電気・電子工学シンポジウム論文集, pp. 119-124, 1988
- [4] A. Bossavit: Calcul des Courants Induits et des Forces Electromagnetiques dans un Systeme de Conducteurs Mobiles, Mathematical Modelling and Numerical Analysis. Vol. 23, n° 2, pp. 235-259, 1989
- [5] H. Kanayama, H. Motoyama, K. Endo and F. Kikuchi: Three-Dimensional Magnetostatic Analysis Using Nedelec's Elements, to appear in IEEE Transactions on Magnetics (Proceedings of COMPUMAG-Tokyo)
- [5a] H. Kanayama, H. Motoyama, Y. Kishino and K. Endo: 3-D Eddy Current Analysis of Asymmetrical Conductor with a Hole by The Mixed Finite Element Method, to appear in COMPEL (Proceedings of 3DMAG IN OKAYAMA)
- [6] F. Kikuchi: Mixed Formulations for Finite Element Analysis of Magnetostatic and Electrostatic Problems, Japan J. Appl. Math., Vol. 6, pp. 209-221, 1989
- [7] F. Kikuchi: On a Discrete Compactness Property for the Nedelec Finite Elements, to appear in J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, 1989
- [8] J.-C. Nedelec: Mixed Finite Elements in  $R^3$ , Numer. Math., 35, pp. 315-341, 1980
- [9] J.-C. Nedelec: A New Family of Mixed Finite Elements in  $R^3$ , Numer. Math., 50, pp. 57-81, 1986