数理解析研究所講究録
第 728 巻 1990 年 104-114

Strong Partition Cardinal と Spector Forcing

ICOT 佐藤洋祐 (Yosuke Sato)

概要 Michell Spector によって考案された Strong Partition Cardinal の存在を認める集合論のモデルの Generic extension について概説を与える.

§0 準備

定義 0.1 κ が Strong Partition Cardinal であるとは κ が Partition Property $\kappa \to (\kappa)^{\kappa}_{\lambda}$ を任意の順序数 $\lambda < \kappa$ に対して満たすことと定義する.

以下の結果が知られている.

定理 0.2 κ が Strong Partition Cardinal
$\Longrightarrow$ κ は measurable cardinal

定理 0.3 κ が Strong Partition Cardinal
$\Longrightarrow$ AC_{κ} は成りたたない

定理 0.4 $\kappa \to (\kappa)^{\kappa}_{\lambda} \Longrightarrow \kappa \to (\kappa)^{\kappa}_{2^{\lambda}}$

§1 Spector Forcing

M を ZF + DC の Standard Transitive モデルとし、M において κ は Strong Partition Cardinal であるとする.

定義 1.1 Forcing Condition $(\mathbb{P}, \leqslant)$ を
$(\mathbb{P}, \leqslant) = ([\kappa]^{\kappa}, \subseteq)$ で定義する.

定理 1.2 上の Forcing Condition における Generic extension を M[G] とするとき、M[G] において以下が成りたつ.

(1) G は κ 上の κ-complete nonprincipal ultrafilter

(2) κ^{κ}/G には κ 番目の要素がない、すなわち G は κ 上の non-well-founded measure になる. したがって DC(dependent choice) はなりたたない.

(3) AC_{ω}(countable axiom of choice) はなりたつ.

定理 1.2 の証明はいくつかの補題で構成されるが、それを述べる前に次の定義を与える.

定義 1.3　$p, q \in [\kappa]^\kappa$ に対し $pq \in [\kappa]^\kappa$ を p と q の合成として定義する。すなわち $\forall \alpha < \kappa \ \ pq(\alpha) = p(q(\alpha))$.

補題 1.4　$\forall \alpha < \kappa \ \ M^\alpha \cap M[G] = M^\alpha \cap M$

証明

$f \in M^\alpha \cap M[G]$ とする。$p \Vdash \underset{\sim}{f} \in \underline{M}^\alpha$ なる任意の condition

p に対し partition $F : [\kappa]^\kappa \to 2^\alpha$ を以下のように定める。

$F(q) =_{\mathrm{def}} \{ \beta < \alpha \mid \exists x \in M \ pq \Vdash \underset{\sim}{f}(\beta) = x \}$

ここで $\underset{\sim}{f}$ は f の name $\underline{M}$ は M に対応する述語.

M において κ は strong partition cardinal なので

$\kappa \to (\kappa)^\kappa_\alpha$ をみたす。したがって定理 0.4 により

$\kappa \to (\kappa)^\kappa_{2^\alpha}$ が成りたつ。

よって F は homogeneous set S をもつ。κ の部分集合で

cardinality κ のものは $[\kappa]^\kappa$ の元と同一視できるので S を

$[\kappa]^\kappa$ の元とみなすことができる。

さて　$r \leq pS \iff \exists S' \leq S \ \ r = pS'$ に注意すると

$\forall r \leq pS \ \forall \beta < \alpha \ (\exists x \in M \ r \Vdash \underset{\sim}{f}(\beta) = x \iff \exists x \in M \ pS \Vdash \underset{\sim}{f}(\beta) = x)$

また $pS \leq p$ なので $pS \Vdash \underset{\sim}{f} \in \underline{M}^\alpha$。したがって

$\forall \beta < \alpha \ \exists r \leq pS \ \exists x \in M \ r \Vdash \underset{\sim}{f}(\beta) = x$

以上より

$\forall \beta < \alpha \ \exists x \in M \ pS \Vdash \underset{\sim}{f}(\beta) = x$

$f' \in M^{\alpha} \cap M$ を次のように定める.

$\forall \beta < \alpha \; f'(\beta) = x \underset{def}{\iff} ps \Vdash \underset{\sim}{f}(\beta) = x$

このとき $ps \Vdash f' = \underset{\sim}{f}$ がいえるので

$ps \Vdash \underset{\sim}{f} \in \underset{\sim}{M}$ が成りたつ.

以上より $\forall p \; p \Vdash \underset{\sim}{f} \in \underset{\sim}{M}^{\alpha} \Rightarrow \exists r \leq p \; r \Vdash \underset{\sim}{f} \in \underset{\sim}{M}$

が示された.

これにより $p \Vdash \underset{\sim}{f} \in \underset{\sim}{M}^{\alpha}$ なる任意の p に対し

$D = \{ r \in [X]^{\chi} \mid r \Vdash \underset{\sim}{f} \in \underset{\sim}{M} \}$ は p 以下で dense すなわち

$\forall q \leq p \; \exists r \leq q \; r \in D$ となる.

さて p を G の元としてとれるので $D \cap G \neq \emptyset$

よって $\exists r \in G \; r \Vdash \underset{\sim}{f} \in \underset{\sim}{M}$ すなわち $M[G] \models \underset{\sim}{f} \in \underset{\sim}{M}$

したがって $f \in M$

q.e.d.

補題 1.5　任意の condition $p, q \in [X]^{\chi}$ に対し p, q が final segment を共有する, すなわちある $\alpha < \chi$ が存在して $p - \alpha = q - \alpha$ なら、任意の generic filter G に対し

$p \in G \iff q \in G$

証明

$p \in G \Rightarrow q \in G$ を示せば十分.

そのためには $\{ r \in [X]^{\chi} \mid r \leq q \}$ が p 以下で dense になることをいえばよいが容易に示せる.　q.e.d.

補題 1.6　$M^{\varkappa} \cap M[G] = M^{\varkappa} \cap M$

証明

$f \in M^{\varkappa} \cap M[G]$ とする．補題 1.4 より $\forall \alpha < \varkappa \ f \restriction \alpha \in M$

$p \Vdash \underset{\sim}{f} \in \underset{\sim}{M}^{\varkappa} \ \& \ \forall \alpha < \varkappa \ \underset{\sim}{f} \restriction \alpha \in \underset{\sim}{M}^{\varkappa}$ なる任意の condition

p に対し partition $F : [\varkappa]^{\varkappa} \to 2$ を以下のように定める．

$F(q) = 0$ iff $\exists x \in M \ pq \Vdash \underset{\sim}{f} \restriction \cap q = x$

ここで $\cap q$ は q の最小元を表わす．

$s \in [\varkappa]^{\varkappa}$ を F の homogeneous set とする

$ps \leq p$ より $ps \Vdash \underset{\sim}{f} \in \underset{\sim}{M}^{\varkappa} \ \& \ \forall \alpha < \varkappa \ \underset{\sim}{f} \restriction \alpha \in \underset{\sim}{M}^{\varkappa}$

よって $\exists t \leq ps \ \exists x \in M \ t \Vdash \underset{\sim}{f} \restriction \cap s = x$

よって $\exists r \leq s \ \exists x \in M \ pr \Vdash \underset{\sim}{f} \restriction \cap s = x$

$\cap s = \cap (r \cup \{\cap s\})$ なので

$\exists r \leq s \ \exists x \in M \ pr \Vdash \underset{\sim}{f} \restriction \cap (r \cup \{\cap s\}) = x$

pr と $p(r \cup \{\cap s\})$ は final segment を共有するので補題 1.5

により $p(r \cup \{\cap s\}) \Vdash \underset{\sim}{f} \restriction \cap (r \cup \{\cap s\}) = x$

したがって $F(r \cup \{\cap s\}) = 0$

よって s が homogeneous であるので $F''[s]^{\varkappa} = \{0\}$

任意の $\alpha < s$ に対し $s' = (s - \alpha) \cup \{\alpha\}$ とおくと

$\cap s' = \alpha$, $s' \leq s$ より $\exists x \in M \ ps' \Vdash \underset{\sim}{f} \restriction \alpha = x$

ps' と ps は final segment を共有するので

$ps \Vdash \underset{\sim}{f} \restriction \alpha = x$　したがって任意の $\beta < \alpha$ に対し

$\exists z \in M \quad p_S \Vdash \underset{\sim}{f}(\beta) = z$

αはいくらでも大きくとることができるので、これが任意の$\beta < \varkappa$に対してなりたつ.

よって $p_S \Vdash \underset{\sim}{f} \in \underset{\sim}{M}$ が補題1.4の証明と同様いえる.

したがって同様に $f \in M$ が成りたつ.

q.e.d.

(注) 実際には任意の順序数αに対し

$M^{\alpha} \cap M[G] = M^{\alpha} \cap M$ が成りたつことが知られている.

補題 1.7 $\quad M[G] \models \underset{\sim}{G}$ は$\varkappa$上の$\varkappa$-complete nonprincipal ultrafilter

証明

$(\underset{\sim}{P}, \leq)$ が splitting すなわち任意の condition p に対し incompatible な p の extension r, s が存在するので $G \notin M$. したがって G は principal にはなりえない.

さて "$M[G] \models \underset{\sim}{G}$ は$\varkappa$上の filter" は明らかなので次を示せば十分.

任意の$\delta < \varkappa$に対し $\bigcup_{\alpha < \delta} A_\alpha = \varkappa \Rightarrow \exists \alpha \ A_\alpha \in G$

補題 1.6により任意の$\alpha < \delta$に対し $A_\alpha \in M$

よって補題 1.4により $\langle A_\alpha \mid \alpha < \delta \rangle \in M$

$\forall p \in [\varkappa]^{\varkappa} \quad \bigcup_{\alpha < \delta} (p \cap A_\alpha) = p$ なので

$\overline{\overline{\bigcup_{\alpha<\delta}(p\cap A_\alpha)}} = \overline{\overline{p}} = \kappa$

Mでκがmeasurableなのでregularになることに注意すると

$\exists\alpha<\delta\ \overline{\overline{p\cap A_\alpha}} = \kappa$.

したがって $\forall p\in[\kappa]^\kappa\ \exists r\in[\kappa]^\kappa\ r\leq p$ かつ $r\leq A_\alpha$ for some $\alpha<\delta$.

よって $D=\{r\in[\kappa]^\kappa \mid r\leq A_\alpha \text{ for some } \alpha<\delta\}$ は dense になる.

よって $\exists p\in G\cap D$ すなわち $\exists p\in G\ \exists\alpha\ p\leq A_\alpha$

したがって $\exists\alpha\ A_\alpha\in G$

q.e.d.

補題 1.8 $\forall\alpha,\beta<\kappa\ M[G]\models\kappa\to(\kappa)^\alpha_\beta$

証明

Partition $F:[\kappa]^\alpha\to\beta$ に対し Mの中で

Partition $F':[\kappa]^\kappa\to\beta+1$ を次のように定める

$$F'(q)=\begin{cases}\text{the least } \eta<\beta \text{ such that } q\Vdash F(q\restriction\alpha)=\eta & \text{if exists}\\ \beta & \text{otherwise}\end{cases}$$

$\{x\in[\kappa]^\kappa \mid x$ はF'の homogeneous set$\}$ は明らかにMに含まれ、dense なので $\exists s\in G$ sはF'の homogeneous set

$M[G]\models F:[\kappa]^\alpha\to\beta$ なので

$\exists r\leq s\ r\Vdash F(s\restriction\alpha)=\eta$ for some $\eta<\beta$ となる.

$r\leq s$ より $s\restriction\alpha=(r\cup(s\restriction\alpha))\restriction\alpha$

よって　$r \Vdash F((r\cup(s\restriction\alpha))\restriction\alpha)=\eta$

r と $r\cup(s\restriction\alpha)$ は final segment を共有するので

$r\cup(s\restriction\alpha) \Vdash F((r\cup(s\restriction\alpha))\restriction\alpha)=\eta$

したがって　$F'(r\cup(s\restriction\alpha))=\eta$

よって　$F'``[s]^{\varkappa}=\{\eta\}$

$\forall t\in[s]^{\alpha}$　$(s-\cup t)\cup t\in[s]^{\varkappa}$ なので

$(s-\cup t)\cup t \Vdash F(\{(s-\cup t)\cup t\}\restriction\alpha)=\eta$

$\{(s-\cup t)\cup t\}\restriction\alpha = t$ なので

$(s-\cup t)\cup t \Vdash F(t)=\eta$

s と $(s-\cup t)\cup t$ は final segment を共有するので

$(s-\cup t)\cup t\in G$　したがって $M[G]\models F(t)=\eta$

よって　s は F の homogeneous set になる

q.e.d.

補題 1.9　　$\varkappa^{\varkappa}/G$ には $\varkappa$ 番目の要素がない

証明

補題 1.4 の証明と同様に　$f\in\varkappa^{\varkappa}$ に対し

$p\Vdash f$ is not constant almost everywhere を満たす任意の

condition p に対し condition $q\leq p$ と $g\in\varkappa^{\varkappa}$ が存在し

て

$q\Vdash g<f$ almost everywhere & g is not constant almost everywhere

が成りたつことを示せば十分.

ここで $p \in G$ としてもよいことに注意する.

Partition $F : [X]^2 \longrightarrow 3$ を次のように定義する.

$$F(\alpha, \beta) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad f(\alpha) < f(\beta) \\ 1 & \text{if} \quad f(\alpha) = f(\beta) \\ 2 & \text{if} \quad f(\alpha) > f(\beta) \end{cases}$$

さて F の homogeneous set が G からとれるので

$p \in G$ とあわせて homogeneous set $X \leq p$ をとることができる.

もし $F''[X]^2 = \{1\}$ なら

$X \Vdash f$ is constant almost everywhere

よって $M[G] \models f$ is constant almost everywhere

となり矛盾.

もし $F''[X]^2 = \{2\}$ なら

$f(x(0)) > f(x(1)) > \cdots\cdots$

となり矛盾

よって $F''[X]^2 = \{0\}$ でなければならない.

さて $q \in [X]^\varkappa$ を $q = \{X(\beta+1) \mid \beta < \varkappa\}$ とおき

$g \in \varkappa^\varkappa$ を $g(\alpha) = \begin{cases} f(X(\beta)) & \text{if} \quad \alpha = X(\beta+1) \\ 0 & \quad\quad \alpha \notin q \end{cases}$

で定義する.

任意の $\alpha_1, \alpha_2 \in q$ に対し $\alpha_1 < \alpha_2$ なら、ある $\beta_1 < \beta_2$ があって、$\alpha_1 = X(\beta_1+1) < \alpha_2 = X(\beta_2+1)$ とおけるので

$F''[X]^2 = \{0\}$ より $g(\alpha_1) = f(X(\beta_1)) < f(X(\beta_2)) = g(\alpha_2)$

よって $q \Vdash g$ is not constant almost everywhere

また任意の $\alpha \in q$ に対し $\alpha = X(\beta+1)$ とおけ

$g(\alpha) = f(X(\beta)) < f(X(\beta+1)) = f(\alpha)$

よって $q \Vdash g < f$ almost everywhere

q. e. d.

補題 1.10　任意の $\alpha < X$ に対し

$$M \models AC_\alpha \Rightarrow M[G] \models AC_\alpha$$

証明

f を $M[G]$ で定義域を α とする関数で $\forall \beta < \alpha \; f(\beta) \neq \emptyset$ とする.

$p \Vdash \underset{\sim}{f}$ は定義域を α とする関数で $\forall \beta < \alpha \; \underset{\sim}{f}(\beta) \neq \emptyset$

なる任意の condition p に対し partition

$F: [X]^X \to \alpha+1$ を次のように定義する.

$$F(q) = \begin{cases} \text{the least } \beta < \alpha \text{ if exists such that} \\ \qquad pq \Vdash \tau \in \underset{\sim}{f}(\beta) \text{ なる term } \tau \text{ が存在しない} \\ \alpha \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

F の homogeneous set を S とする

もしある $\beta<\alpha$ に対し $F''[S]^X=\{\beta\}$ なら

$\forall r \leq ps$ $r \Vdash \tau \in \underset{\sim}{f}(\beta)$ なる term τ が存在しない.

$ps \leq p$ より $ps \Vdash \underset{\sim}{f}(\beta) \neq \emptyset$ なので矛盾

よって $F''[S]^X=\{\alpha\}$

$M \models AC_\alpha$ なので $\langle \tau_\beta \mid \beta<\alpha \rangle \in M$ をとり

$\forall \beta<\alpha$ $ps \Vdash \tau_\beta \in \underset{\sim}{f}(\beta)$ とできる.

これを使って $ps \Vdash \underset{\sim}{f}$ が choice function をもつ

が示される.

よって,前と同様にして $M[G] \models AC_\alpha$ が成りたつ.

q.e.d.

参考文献

[1] J. M. HENLE ; Aspect of choiceless combinatorial set theory, Ph. D. Thesis MIT 1976

[2] E. M. Kleinberg ; Infinitary combinatorics and the axiom of determinateness, Lecture Notes in Mathematics vol. 612 Springer Berlin, 1977

[3] M. Spector ; A measurable cardinal with a nonwellfounded ultrapower, The Journal of Symbolic Logic vol. 45, 1980