数理解析研究所講究録
第 728 巻 1990 年 126-189

LARGE CARDINAL の公理と記述集合論

藤田博司 (名古屋大学)

本稿は 1989 年 10 月に京都大学数理解析研究所で行われた短期共同研究 "公理的集合論と一般帰納関数論" において配布されたノートに補筆したものである. ここでわれわれは D. A. Martin と J. Steel の近年の仕事のうち, Projective Determinacy(射影集合の決定性) の Large Cardinal の公理への帰着に関する [MS1], [MS2] の読解を試みた. これらの論文の中で証明されている主な結果は, 例えば supercompact cardinal(超コンパクト基数) の存在を仮定すれば Projective Determinacy が成立するというものである. Projective Determinacy や Axiom of Determinacy(決定公理) は記述集合論の多くの未解決問題に決着をつける実り多い仮定であるが, その正当性は少しも明白ではない. 一方 measurable cardinal(可測基数) や supercompact cardinal の存在の公理は乱暴にいえば "多くの集合が存在する" という仮定であるから, 通常の集合論 (Zermelo-Fraenkel 集合論=**ZFC** や, Bernays-Gödel 集合論=**BG** 等) の無限公理と置換公理の延長線上にあるものとして正当化されるが, これらの公理の通常の数学への応用というものはあまり多くはない. Projective Determinacy のように, 根拠が明瞭ではないが多産な仮定が, このように正当性という面でより自然な仮定である Large cardinal の公理に帰着するという点で今回の Martin と Steel の結果は注目に値する.

射影集合の決定性の問題について歴史的な事情もまじえて少し説明する. 射影集合族とはポーランド空間 (=可分完備距離空間) の閉集合族から, 補集合をとる演算と連続像をとる演算によって生成される集合族である. 考察の対象をボレル集合族や射影集合族の性質に限るなら, 一般のポーランド空間を考えるかわりにいわゆるカントール空間 ${}^{\omega}2$, ベール空間 ${}^{\omega}\omega$, それに可算離散空間の代表としての ω という三種類のポーランド空間とそれらの有限回の直積空間だけを考えることにしてよい ([Mo] の第 1 章を参照). これらの空間は Product spaces(乗積空間) と呼ばれる. Product space の射影集合は次のような階層に分類される.

$$
\text{(0-1)}\qquad
\begin{cases}
\mathbf{\Pi}^1_0 = \text{“閉集合族”},\\
\mathbf{\Sigma}^1_0 = \text{“開集合族”},\\
\mathbf{\Delta}^1_0 = \mathbf{\Pi}^1_0 \cap \mathbf{\Sigma}^1_0.
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\mathbf{\Sigma}^1_n = \exists^{\mathbb{R}}\mathbf{\Pi}^1_{n-1},\\
\mathbf{\Pi}^1_n = \neg\mathbf{\Sigma}^1_n,\\
\mathbf{\Delta}^1_n = \mathbf{\Pi}^1_n \cap \mathbf{\Sigma}^1_n.
\end{cases}
\quad \text{for } n = 1,2,3\ldots
$$

ここで $\exists^{\mathbb{R}}$ とは, product space $X \times {}^{\omega}\omega$ から X への射影を, また $\neg$ は補集合を取る演算をあらわす. これらの集合族のうちで, $\mathbf{\Delta}^1_1$ はボレル集合族に, $\mathbf{\Sigma}^1_1$ は解析集合族に一致する. この射影集合族の分類は

$$
\text{(0-2)}\qquad
\begin{cases}
\mathbf{\Delta}^1_n \subsetneq \mathbf{\Pi}^1_n \subsetneq \mathbf{\Delta}^1_{n+1},\\
\mathbf{\Delta}^1_n \subsetneq \mathbf{\Sigma}^1_n \subsetneq \mathbf{\Delta}^1_{n+1}.
\end{cases}
\qquad \text{for } n = 0,1,2\ldots
$$

が成り立ち，$\mathbf{\Pi}^1_n$, $\mathbf{\Sigma}^1_n$ の普遍集合がそれぞれその集合族の中にあるという意味でひとつの "階層 (hierarchy)" をなす．

記述集合論の一つの目標は射影集合のもつ性質と，射影集合族の階層の構造の目録を作ることであった．例えば次のような問題が提出された．

(1) 射影集合はルベーグ測度 (の自然な代替品) の意味で可測であろうか?

(2) 射影集合は完全集合に関するカントール・ベンディクソン型の性質を持つであろうか?

(3) 2次元の射影集合は射影集合で単葉化 (uniformize) できるだろうか?

これらの問題に対して通常の集合論は意外と無力であった．ポーランドやソ連の数学者たちによって (1),(2) が解析集合について肯定的に解かれて後は，たとえば (3) を補解析集合族について肯定的に解いた近藤基吉の結果などを除けば記述集合論は長いこと低迷していた．

別の方向からのアプローチは1939年のGödelの一般連続体仮説 (**GCH**) の無矛盾性証明の後，彼の示唆にしたがってJ. W. Addisonらによって行われた．彼らはGödelの定義した集合論の内部モデル L の中で次のことが成立することを示したのである．

(a) 実数全体の整列順序で，そのグラフが2次元の Δ^1_2-集合になるものが存在する．

(b) ルベーグ測度の意味で非可測で，いかなる完全集合も含まない Δ^1_2-集合が存在する．

(c) 2次元の射影集合はすべて射影集合で単葉化できる．

この結果は次のような点で問題を提起する．彼らの結果は集合論の内部モデルの理論が記述集合論への応用を持つことを示した点で，射影集合の理論の困難が技術的な事情によるものではなく集合論的世界全体の構造が射影集合族の構造に反映することに起因する困難であることを示唆する．この問題は様々に姿を変えて今日のMartin, Steelを始めとする "Cabal" の面々の研究にまで持ち越されている．

さて上記の結果は例えば (1),(2) については否定的であった． 他方で肯定的な結果として1970年にR. M. Solovayによって次のことが証明された．

集合論の可算標準モデルでinaccessible cardinal(到達不能基数) を持つものが存在すれば，適当な拡大モデルがあって，その中ではすべての射影集合がルベーグ可測であり，可算であるかまたは完全集合を含む．

この結果は1963年のP. J. Cohenによる一般連続体仮設の独立性証明の手法を用いて得られる．その方法，つまりforcingは現在に至るまで集合論研究者のもっとも愛用する道具の一つとなっている．このSolovayの結果とGödelやAddisonの結果をあわせて考えれば，結局のところ射影集合に関する結果 (1),(2) は通常の集合論ではその真偽を決定できないということになる．このようにして問題はなにやら一般の数学者を鼻白らませるような形で一応の決着を見た．以上が1970年代初頭までの状況である．

決定性の問題がクローズアップされて来るのはさらに別のアプローチを介してである．1960年代前半にはすでにJ. MycielskiやH. Steinhausらにより無限ゲームの決定性を選択公理に代わる集合論の公理と

して仮定すれば (1),(2) が射影集合のみならず実数のあらゆる集合に対して肯定的に解けることが示されていた.

先手と後手が交互に集合 X の元 a_n を言い合っている様子を想像して頂こう.

$$
\begin{array}{llcccccccc}
(\text{先手}) & & a_0 & & a_2 & & \cdots \\
& & & \searrow \; \nearrow & & \searrow \; \nearrow & \\
(\text{後手}) & & & a_1 & & a_3 & \cdots
\end{array}
$$

いつまでもやっていると最終的に一つの列 $\langle a_n | n \in \omega \rangle \in {}^{\omega}X$ が定まる. これを一つの対局とみてやることにすると, ${}^{\omega}X$ の部分集合 A をひとつ指定するごとに勝敗を

$$\text{先手の勝ち} \iff \langle\, a_n \mid n \in \omega \,\rangle \in A$$

と定めて一つのゲームが決まる. このゲームを A を判定集合とする X 上の無限ゲームといい, 記号では $G_X(A)$ とかく. ここで興味があるのはこのようなゲームに先手あるいは後手の必勝法が存在するかということである.

$G_X(A)$ に先手または後手の必勝法が存在するとき, $A \subseteq {}^{\omega}X$ は決定性を有するということにする. Mycielski と Steinhaus は選択公理に代えて次の“決定公理”

($\mathbf{AD}_\omega$) “任意の $A \subseteq {}^{\omega}\omega$ は決定性を有する”.

を仮定として付け加えることにより次のことを証明した.

(a1) 実数のどんな集合もルベーグ可測でベールの性質を持つ.

(a2) 実数の非可算集合は完全集合を含む.

(a3) 実数の整列順序の長さは高々可算である.

彼らの証明法は“局所化”が可能である. つまり適当な構造上の特質をもつ集合族 Γ が決定性をもあわせ持てば, (a1)~(a3) を Γ の集合に制限したものが成り立つ. たとえば Projective Determinacy(射影集合の決定性) を仮定すればすべての射影集合はルベーグ可測でベールの性質を持ち, 非可算な射影集合は完全集合を含む.

例として (a2) の証明を紹介する. $A \subseteq {}^{\omega}2$ を任意の集合としよう. これに対して集合 $B \subseteq {}^{\omega}\omega$ を次のように定義する.

$$
\begin{aligned}
\langle a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots \rangle \in B \iff & (\forall i)\,[\,(a_i \in {}^{<\omega}\omega) \;\;\&\;\; (b_i \in \{0,1\})\,] \\
& \&\;\; a_0{}^\frown\langle b_0\rangle{}^\frown a_1{}^\frown\langle b_1\rangle{}^\frown \cdots \in A
\end{aligned}
$$

われわれは決定公理を仮定しているので $G_\omega(B)$ の先手または後手の必勝法が存在することになる. そこで (a2) を証明するには次の (i), (ii) を証明すればよい.

(i) 先手の必勝法が存在すれば A は完全集合を含む.
(ii) 後手の必勝法が存在すれば A は可算である.

(i) の証明 : 先手の必勝法 σ があったとするとき. 次の $T \subseteq {}^{<\omega}2$ は perfect binary tree である.

$$T := \{\, a_0{}^\frown\langle b_0\rangle{}^\frown\cdots{}^\frown a_{n-1}{}^\frown\langle b_{n-1}\rangle \mid \langle a_i|i<n\rangle \text{ は } \langle b_i|i<n\rangle \text{ から } \sigma \text{ によって得られる} \,\}$$

この tree の branch の全体 $[T]$ は完全集合をなし, σ が $G_\omega(B)$ の必勝法であることから $[T] \subseteq A$ となる.
(ii) の証明 : 後手の必勝法 τ があったとする. binary sequence u は次の条件を満たすとき τ-列であるという.

> 適当な部分列への分解 $u = a_0{}^\frown\langle b_0\rangle{}^\frown\cdots{}^\frown a_{n-1}{}^\frown\langle b_{n-1}\rangle{}^\frown a_n$ があって, $\langle\, b_i \mid i<n\,\rangle$ は $\langle\, a_i \mid i<n\,\rangle$ から τ によって得られるものになっている.

τ が $G_\omega(B)$ の後手の必勝法であることから, τ-列という性質を保ったまま無限に延長された binary sequence は A の元となることはできない. したがって各 $x \in A$ について, $x \restriction m$ が τ-列になるような最大の $m \in \omega$ が存在するはずである. そのような $x \restriction m$ をとり τ-列としての分解

$$x \restriction m = a_0{}^\frown\langle b_0\rangle{}^\frown\cdots{}^\frown a_{n-1}{}^\frown\langle b_{n-1}\rangle{}^\frown a_n$$

を考えよう. この $x \restriction m$ が x と整合的なもっとも長い τ-列であることから $k \geq m$ に対する $x(k)$ は

$$x(k) \neq \tau(\, a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n, \langle x(m), \ldots, x(k-1)\rangle\,)$$

という条件によって計算できてしまう. このことから A は可算集合である. これで (a2) は証明された.

上の証明で, (i) においては A の完全部分集合をコードする binary tree が, また (ii) においては A の各元自体が, それぞれ先手または後手の必勝法からエフェクティブに計算できることがわかる. 対象のエフェクティブな定義可能性の議論は新しい記述集合論に特有のものであるが, 無限ゲームの手法は始めからそうした議論によく馴染む要素をもっていたわけである. 以上のような事情を踏まえ, 無限ゲームの記述集合論への応用が本格的に花開くきっかけとなったのは 1967 年に D. Blackwell が $\mathbf{\Pi}^1_1$ の還元特性 (Reduction property)

> $A, B \in \mathbf{\Pi}^1_1$ に対して $A^*, B^* \in \mathbf{\Pi}^1_1$ を $A^* \subseteq A$, $B^* \subseteq B$, $A \cup B = A^* \cup B^*$, $A^* \cap B^* = \phi$ となるようにとれる.

を無限ゲームの言葉を使って証明したことである. この結果自身は N. Lusin あるいは C. Kuratowski にまで遡るが, Blackwell の証明はオリジナルの証明と比べて統一的な一般化の可能性という著しい利点を持っている. 実際この結果は Martin, Addison それに Y. N. Moschovakis といった人たちによって直ちに次のように拡張された.

$\boldsymbol{\Delta}^1_{2n}$ の決定性を仮定すれば $\boldsymbol{\Pi}^1_{2n+1}$, $\boldsymbol{\Sigma}^1_{2n+2}$ の還元特性が証明される.

Moschovakis はこの方向にさらに研究を進め, 最初に掲げた問題 (3) を無限ゲームを利用して解決することに成功した. かれは $\boldsymbol{\Pi}^1_1$ の単葉化特性 (uniformization property) に関する近藤の証明を整理し, 無限ゲームを用いた統一的な別証明を与えたのである. それにより次の結果が証明された.

$\boldsymbol{\Delta}^1_{2n}$ の決定性を仮定すれば $\boldsymbol{\Pi}^1_{2n+1}$, $\boldsymbol{\Sigma}^1_{2n+2}$ の単葉化特性が証明される.

したがって Projective Determinacy のもとでも, 射影集合は射影集合で単葉化される. これは L の中での結果と見かけ上一致するが, その内実はまったく異なる.

Projective Determinacy がこのように有用な仮定であることが知られて以来, その正当化の問題, 言いかえれば Projective Determinacy の成立する自然な内部モデル (Moschovakis のいう "Playful Universe") を見つけるという問題が持ち上がった. Martin は 1970 年に measurable cardinal の存在を仮定して $\boldsymbol{\Pi}^1_1$ の決定性を証明していた. これは決定性のいろいろな原理が Large Cardinal の公理によって正当化されうることを示した最初の結果である. Measurable cardinal の存在はしかし $\boldsymbol{\Pi}^1_1$ より高い階層に属する集合族の決定性を保証するには不十分であった. たとえば $\boldsymbol{\Delta}^1_1$ の決定性は $\boldsymbol{\Pi}^1_1$ の決定性と比較してもずっと強い仮定である. この仮定のもとではすべての $\boldsymbol{\Sigma}^1_3$ 集合はルベーグ可測であってベールの性質を持ち, また $\boldsymbol{\Pi}^1_3$ と $\boldsymbol{\Sigma}^1_4$ は還元特性と単葉化特性を有する. これらの結果は measureble cardinal の存在の仮定だけからでは証明できない. 先に **ZFC** の自然な内部モデルとして Gödel のモデル L に触れたが, それと同じ精神で **ZFC**+"∃ measurable cardinal" の自然な内部モデルを作れば, それは Silver の $L[\mu]$ と呼ばれるものであって, そこでは実数全体を整列する Δ^1_3 集合が存在し, L の中での事実 (a)–(c) と類似の事実が成立しているのである.

この Gödel-Silver の路線に添って Large Cardinal の公理と記述集合論の関係を調べることは 1970 年代に W. Mitchell らによって主に行われた (本文中で詳しく取り扱う extender の概念は彼らの研究の産物である). その結果, L や $L[\mu]$ に似た自然な内部モデルを作ることのできるような "おとなしい" 公理については, その内部モデルの中でやはり実数全体の Δ^1_3 整列順序が構成でき, したがってそれらの公理は $\boldsymbol{\Delta}^1_2$ の決定性を証明する仮定としては力不足であることがわかった.

このように Projective Determinacy の公理としての強さの下からの評価が試みられる一方で, 上からの評価すなわち Projective Determinacy を証明するのに十分なほど強い (大きい) Large Cardinal の公理を探すことも行われた. しかし, つい最近までこの方面での結果は $\boldsymbol{\Pi}^1_1$ に関する上述の Martin のもののほかには同じく Martin による, ω-superstrong cardinal の存在から $\boldsymbol{\Pi}^1_2$ の決定性が導かれるというものがあるだけであった. ω-superstrong cardinal は (非存在がいまだ証明されていないという意味で) 現存の Large cardinal のうちでも最も大きいタイプのものである!

そんなわけで大方の集合論研究者の通念として Projective Determinacy は現存の Large cardinal の公理のどれよりもさらに強いだろうと考えられていた. 以上が 1980 年代前半までの状況である.

だから 1986 年に Martin, Steel, Woodin といった "Cabal" のメンバーが supercompact cardinal の存在から Projective Determinacy が成立すること, および $\mathbf{AD}_\omega$ を満たす内部モデルが存在することなどを導出して見せたときにはみんな驚いた. Supercompact はそれでもまだずいぶん大きな基数ではあるが ω-superstrong と比べればうんと小さいといってよい. それに本文でも述べるように Projective

Determinacy を証明するには supercompact でさえ必ずしも必要ではない. 長足の進歩といえよう. この進歩は内部モデルの理論の発展に支えられており, 集合論的世界の構造が実数の集合の性質に反映するという前述の問題を蒸し返した格好になっているのである.

前口上はこの位にして本文の概略を説明する (歴史等背景のこれ以上のことは [**Mo**]や[**MS1**],[**MS2**]の introduction を見よ). 本文は 4 つの section からなる. section3 までは内部モデルの理論から借用された概念の解説である. 証明の理解にはこれらの概念の理解が不可欠と考えられるのでなるべく詳しく調べ解説したが, 都合によりいくらか省略されたところもある. 最後の section4 は Martin-Steel の定理の証明の解説に充てられている. 記述集合論とは名ばかりで内容はほとんどが内部モデルの理論である. このことはこの序文において射影集合の説明等をやや詳しく行った理由の一つである.

特殊な用語で注意を要すると思われるものがいくつかあるのですこし説明する. 内部モデルとは集合論の推移的 $\in$ モデルであってすべての順序数を含むもののことである. measure という言葉はこのノートの中では常に台集合のすべての部分集合について定義された σ-加法的 2 値測度のことである. measure が κ-complete とは κ より短い列に関する加法性を有するときにいう. 集合 A 上定義されたクラス B に値を持つ関数の全体を ${}^{A}B$ とあらわす. 特に ${}^{\omega}B$ は B の要素の無限列の全体である. B の元の有限列の全体を表すためにこの記法を少し変形して ${}^{<\omega}B$ とあらわす.

[追記] この序文において ω-superstrong cardinal と呼んだものは数理研で研究会の当日に配布した原版においては ω-huge cardinal と呼ばれているものであり, その定義は次の通りである.

> 基数 κ が ω-superstrong であるとは, 推移的内部モデル M への V の elementary embedding $j : V \to M$ で $\mathrm{crit}(j) = \kappa$, $V_{j^{\omega}(\kappa)} \subseteq M$ を満たすものが存在するときにいう. ここで $j^{\omega}(k)$ は $\sup\{j(\kappa), j(j(\kappa)), \cdots, j^{n}(\kappa) \cdots\}$ のことである.

この定義は実際 huge cardinal の定義を変形させて得られたものと言うよりも, むしろ後に述べる superstrong cardinal の条件の強いものとみた方が自然である. さらに ω-huge cardinal という用語は上記の $V_{j^{\omega}(\kappa)} \subseteq M$ という条件を ${}^{j^{\omega}(\kappa)}M \subseteq M$ に置き換えた意味で用いられることの方が多い. この意味での ω-huge cardinal が存在しないことはすでに K. Kunen らによって証明されている. ここで ω-superstrong と呼んでいるものを始め ω-huge と呼んだのは文献[**MS2**]に従ったまでなのだが, ここで訂正する次第である (ここで ω-huge cardinal についての事実を指摘してくれた筑波大学の原田節夫さんに感謝したい). ここで問題になっている $\mathbf{\Pi}^1_2$ の決定性の証明は 1978 年ヘルシンキ・コングレスの講演録に納められているもので, そこでは “iterable elementary embedding の存在” が仮定として掲げられている.

§1. Homogeneous Trees.

1. Measure の列と limit model.

有限集合の可算列 $\langle a_n \mid n \in \omega \rangle$ は

(1-1) $$a_0 \subseteq a_1 \subseteq \cdots \subseteq a_n \subseteq \cdots$$

を満たすものとする．また Z は適当な無限集合とする．$m < n$ のとき関数集合 ${}^{a_n}Z$ から ${}^{a_m}Z$ への射影を

(1-2) $$f \in {}^{a_n}Z \mapsto f \restriction a_m \in {}^{a_m}Z$$

と定めると次のような射影の系列が得られる．

$$ {}^{a_0}Z \longleftarrow {}^{a_1}Z \longleftarrow \cdots \longleftarrow {}^{a_n}Z \longleftarrow \cdots $$

measure の列 $\langle \mu_n \mid n \in \omega \rangle$ は，$m < n$ のとき任意の $X \subseteq {}^{a_m}Z$ について

(1-3) $$\mu_m(X) = \mu_n(\{ f \in {}^{a_n}Z \mid f \restriction a_m \in X \})$$

を満たすものとする．この条件を整合性 (compatibility) の条件といい，またこのとき μ_m は μ_n から射影によって得られるという．

(1-4) $$\mu_0 \longleftarrow \mu_1 \longleftarrow \cdots \longleftarrow \mu_n \longleftarrow \cdots$$

各 μ_n は measure だから，超巾 $\mathrm{Ult}(V, \mu_n)$ を構成することができる．記号の煩雑さを避けるために $M_n := \mathrm{Ult}(V, \mu_n)$ と書くことにする．整合性の条件から，$F, G : {}^{a_m}Z \to V$ で $m < n$ のとき

$$\begin{aligned} F \sim_{\mu_m} G &\iff \mu_m(\{ f \in {}^{a_m}Z \mid F(f) = G(f) \}) = 1 \\ &\iff \mu_n(\{ f \in {}^{a_n}Z \mid F(f \restriction a_m) = G(f \restriction a_m) \}) = 1 \end{aligned}$$

となっている．そこでいま $F', G' : {}^{a_n}Z \to V$ を

$$F'(f) := F(f \restriction a_m), \qquad G'(f) := G(f \restriction a_m)$$

と定義すると

$$[\![F]\!]_{\mu_m} = [\![G]\!]_{\mu_m} \iff [\![F']\!]_{\mu_n} = [\![G']\!]_{\mu_n}$$

が成り立つ．そこでこの対応 $[\![F]\!]_{\mu_m} \mapsto [\![F']\!]_{\mu_n}$ により写像

$$j_{m,n} : M_m \to M_n$$

が定義される．Łośの定理と系列(1-4)の整合性から，各 $j_{m,n}$ が内部モデル M_m の M_n へのelementary embeddingであることがわかる．また $l < m < n$ であれば $j_{m,n} \circ j_{l,m} = j_{l,n}$ であり，V の各 M_n への自然なelementary embedding i_{μ_n} を i_n と書けば $m < n$ のときは $i_n = j_{m,n} \circ i_m$ であることもわかる．まとめていえば，measureの射影系列(1-4)は内部モデルとそのelementary embeddingの帰納系列

(1-5) $$V \xrightarrow{i_0} M_0 \xrightarrow{j_{0,1}} M_1 \xrightarrow{j_{1,2}} \cdots \xrightarrow{j_{n-1,n}} M_n \xrightarrow{j_{n,n+1}} \cdots$$

を導入する．

われわれはここで一般性を失うことなく $a_0 = \phi$ と仮定することができる．このとき ${}^{a_0}Z = \{\phi\}$ であり，μ_0 は自明な単項measureである．したがって $M_0 = V$ となる．以下このsubsectionではこのようになっているものとする．

帰納系列(1-5)の極限

$$\varinjlim(\langle M_n \mid n \in \omega \rangle \langle i_{n,n+1} \mid n \in \omega \rangle)$$

を V の $\langle \mu_n \mid n \in \omega \rangle$ による超巾といい，記号では

$$\mathrm{Ult}(V, \langle \mu_n \mid n \in \omega \rangle)$$

と書く．いまこれを M_∞ と書くことにすれば，各 M_n から M_∞ へのelementary embedding $j_{n,\infty}$ が存在して，$m < n$ のときはいつでも $j_{n,\infty} \circ j_{m,n} = j_{m,\infty}$ となっている．特に $V = M_0$ の M_∞ へのelementary embedding $j_{0,\infty}$ のことを $i_{\langle \mu_n | n \in \omega \rangle}$ と書く．

(1-6) $$i_{\langle \mu_n | n \in \omega \rangle} : V \to \mathrm{Ult}(V, \langle \mu_n \mid n \in \omega \rangle)$$

この極限がwellfoundedなモデルになっているかどうかは，$\langle \mu_n \mid n \in \omega \rangle$ がmesureの整合的な系列であるということだけからはわからない．このことについてしばらく見てゆくことにしよう．

<u>補題1.1.1</u>

$$N_0 \xrightarrow{i_{0,1}} N_1 \xrightarrow{i_{1,2}} \cdots \xrightarrow{i_{n-1,n}} N_n \xrightarrow{i_{n,n+1}} \cdots$$

を集合論の内部モデルとelementary embeddingの任意の帰納系列とし，$(N_\infty, \langle i_{n,\infty} \mid n \in \omega \rangle)$ をその極限とする．N_∞ がwellfoundedでなくなるための必要十分条件は，順序数の列 $\langle \beta_m \mid m \in \omega \rangle$ で

(1-7) $$i_{m,m+1}(\beta_m) > \beta_{m+1}, \qquad \text{for all } m \in \omega$$

となるものが存在することである．

[証明]　そのような $\langle \beta_m \mid m \in \omega \rangle$ があれば,

$$i_{m,\infty}(\beta_m) = i_{m+1,\infty}(i_{m,m+1}(\beta_m)) > i_{m+1,\infty}(\beta_{m+1})$$

となるので, N_∞ において順序数の無限下降列 $\langle i_{m,\infty}(\beta_m) \mid m \in \omega \rangle$ が生じる. よって N_∞ は wellfounded でない.

逆に N_∞ に順序数の無限下降列 $\langle b_k \mid k \in \omega \rangle$ があったとして (1-7) のような順序数の列を作ることを考える. 各 b_k を $i_{m,\infty}$ で引き戻すことにより, 次のような順序数列 $\langle \gamma_k \mid k \in \omega \rangle$ と 自然数列 $\langle n_k \mid k \in \omega \rangle$ を得ることができる.

$$\begin{aligned} n_0 < n_1 < \cdots < n_k < \cdots, & \\ b_k = i_{n_k,\infty}(\gamma_k), \qquad & \text{for all } k \in \omega, \\ i_{n_k,n_{k+1}}(\gamma_k) > \gamma_{k+1}, \qquad & \text{for all } k \in \omega. \end{aligned}$$

各 m について, $n_k < m \le n_{k+1}$ となる k がただ一つあるから, それを用いて

$$\beta_m := \omega \cdot i_{n_k,m}(\gamma_k) + n_{k+1} - m$$

とするとこの $\langle \beta_m \mid m \in \omega \rangle$ が (1-7) を満たすことはすぐわかる.　[証明終]

2. Homogeneous tree の定義と例.

Homogeneous tree の概念は, その起源を D. A. Martin の[**Ma**]にもつが, 独立した概念として取り扱われるようになったのは[**Ke**]以降である. この概念を用いて Gale-Stewart 流の Closed Determinacy の議論を拡張して論じることができるようになった. これについて少し見てみることにする. homogeneous tree は前の subsection で述べた measure の整合的系列の例になっている.

定義 1.2

Y, Z を集合, T を $Y \times Z$ 上の tree とする. この T が homogeneous tree であるというのを, 次の条件 (i)–(iii) を満たすような系列 $\langle \mu_s \mid s \in {}^{<\omega}Y \rangle$ が存在することだと定める.

(i) 各 μ_s は集合 $T_s := \{ t \in {}^{<\omega}Z \mid \langle s,t \rangle \in T \}$ 上の measure である.

(ii) $s, s' \in {}^{<\omega}Y$, $s \subseteq s'$ のとき,

$$\mu_s(A) = \mu_{s'}(\{ T' \in T_{s'} \mid s' \restriction \mathrm{lh}(s) \in A \}), \qquad (A \subseteq T_s)$$

である (いいかえれば μ_s は $\mu_{s'}$ の射影である).

(iii) $x \in \mathrm{p}[T]$ のとき, 超巾 $\mathrm{Ult}(V, \langle \mu_{x\restriction n} \mid n \in \omega \rangle)$ は wellfounded である.

注意: (1) この定義で T の homogeneous tree であることの証人 $\langle \mu_s \mid s \in {}^{<\omega}Y \rangle$ を, 各 μ_s が κ-complete になるようにとれるとき, T は κ-homogeneous であるという. (2) 定義の条件 (iii) の逆は無条件に成立している. このことについては次の補題の後で述べる.

<u>補題 1.2.1</u>

定義 1.2 の条件 (iii) は次の条件 (iii)' と同値である.

(iii)' $x \in \mathrm{p}[T]$ とするとき,

$$(\forall n \in \omega)\,[\,A_n \subseteq T_{x\restriction n} \;\;\&\;\; \mu_{x\restriction n}(A_n) = 1\,] \tag{1-8}$$

を満たすような列 $\langle A_n \mid n \in \omega \rangle$ に対して,

$$(\forall n \in \omega)\,[\,f \restriction n \in A_n\,]$$

を満たすような $f \in {}^{\omega}Z$ をとることができる.

[証明] まず (iii)' の結論部分を満たす $x \in {}^{\omega}Y$ について $\mathrm{Ult}(V, \langle \mu_{x\restriction n} \mid n \in \omega \rangle)$ が wellfounded になることをいう. そうでなかったとすると, この超巾モデルに "順序数" の無限下降列 $\langle [\![F_k]\!]_{x\restriction n_k} \mid k \in \omega \rangle$ が存在する. ここで

$$n_0 < n_1 < \cdots < n_k < \cdots$$

となっているとしてよい. これを用いて次の集合列 $\langle X_n \mid n \in \omega \rangle$ をつくる.

$$\begin{aligned}
X_{n_0} &:= {}^{n_0}Z, \\
X_{n_{k+1}} &:= \{\, t \in {}^{n_{k+1}}Z \mid t \restriction n_k \in X_{n_k} \;\;\&\;\; F_{k+1}(z) < F_k(z \restriction n_k) \,\}, \\
X_n &:= \text{the projection of } X_{n_{k+1}}, \qquad \text{if } n_k < n < n_{k+1}.
\end{aligned}$$

このようにすると, F_k たちに関する仮定から各 n で $\mu_{x\restriction n}(X_n) = 1$ となっている. よって (iii)' によりある $f \in {}^{\omega}Z$ で, $(\forall n \in \omega)\,[\,f \restriction n \in X_n\,]$ となるが, このとき,

$$F_0(f \restriction n_0) > F_1(f \restriction n_1) > \cdots > F_k(f \restriction n_k) > \cdots$$

となる. これは不合理である. 逆に, ある $\langle A_n \mid n \in \omega \rangle$ で (1-8) が成り立つにも関わらず, いかなる $f \in {}^{\omega}Z$ も $(\forall n \in \omega)\,[\,f \restriction n \in A_n\,]$ を満たさなかったとすると, 集合

$$\{\, t \in {}^{<\omega}Z \mid (\forall n \leq \mathrm{lh}(t))\,[\,t \restriction n \in A_n\,]\,\}$$

は包含関係の逆順序で wellfounded tree をなす. その rank function を F とし,

$$F_n := F \restriction n, \qquad (n \in \omega)$$

とすれば $\langle [\![F_n]\!]_{\mu_{x\restriction n}} \mid n \in \omega \rangle$ は $\mathrm{Ult}(V, \langle \mu_{x\restriction n} | n \in \omega \rangle)$ における順序数の無限下降列をなす.
[証明終]

Homogeneous tree の定義の条件 (iii) の逆

$$\mathrm{Ult}(V, \langle \mu_{x\restriction n} | n \in \omega \rangle) \text{ is wellfounded } \Longrightarrow x \in \mathrm{p}[T]$$

が成り立っていることはすでに注意した，そのことは (iii)' の結論部分が $\mathrm{Ult}(V, \langle \mu_{x\restriction n} | n \in \omega \rangle)$ の wellfoundedness と同値であることから，とくに $A_n = T_{x\restriction n}$ とおいたものを適用すればわかるわけである．homogeneous tree の最初の，そして以下の議論に際しても重要な例を次の補題で与える．この例は潜在的には[**Ma**]や[**MaSo**]で取り扱われたものである．

補題 1.2.2

measurable cardinal κ が存在すると仮定すると，${}^\omega\omega$ の $\mathbf{\Pi}^1_1$-部分集合は κ-homogeneous tree の射影である．つまり，A を ${}^\omega\omega$ の任意の $\mathbf{\Pi}^1_1$-部分集合とするとき，κ-homogeneous tree $T' \subseteq {}^{<\omega}(\omega \times \kappa)$ で，

$$A = \mathrm{p}[T'] = \{x \in {}^\omega\omega \mid (\exists f \in {}^\omega\kappa)(\forall n \in \omega)[\langle x \restriction n, f \restriction n \rangle \in T']\}$$

となっているものが存在する．

[証明]　与えられた $\mathbf{\Pi}^1_1$-集合 A に対して，$\omega \times \omega$ 上の tree T が存在して $A = \neg\mathrm{p}[T]$ となっている．この T と自然数の有限列 $s \in {}^{<\omega}\omega$ について

$$T(s) := \{t_i \in {}^{<\omega}\omega \mid i < \mathrm{lh}(s) \ \& \ \langle s \restriction \mathrm{lh}(t_i), t_i \rangle \in T\}$$

と定める．ただしここで，$\langle t_i \mid i \in \omega \rangle$ はあらかじめ固定された ${}^{<\omega}\omega$ の番号付けで，特に

$$i \neq j \Longrightarrow t_i \neq t_j, \qquad \mathrm{lh}(t_i) \leq i,$$
$$t_i \subsetneq t_j \Longrightarrow i < j$$

となっているものだとする．各 $T(s)$ は ω 上の finite tree をなす．また $x \in {}^\omega\omega$ については

$$T(x) := \bigcup_{n \in \omega} T(x \restriction n)$$

と定める．$T(x)$ は ω 上の tree で

$$x \in A \Longleftrightarrow T(x) \text{ is wellfounded}$$

である．いまある $t_i \in {}^{<\omega}\omega$ が $T(x)$ に属するかどうかは，ある (任意の) $n > i$ で $t_i \in T(x \restriction n)$ となるかどうかで確かめられる．

自然数の有限列 $s \in {}^{<\omega}\omega$ に対して，順序関係 $<_s$ を次のように対応させる (ここで $<_{\mathrm{KB}}$ はいわゆる Kleene-Brouwer の順序をあらわす)．

$$\begin{aligned} i <_s j \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} i, j < \mathrm{lh}(s) \ \& \ [&(t_i, t_j \in T(s) \ \& \ t_i <_{\mathrm{KB}} t_j) \\ &\vee (t_i \in T(s) \ \& \ t_j \notin T(s)) \\ &\vee (t_i, t_j \notin T(s) \ \& \ i < j)] \end{aligned}$$

このとき次のことが成り立つ.

(a) $<_s$ は $\mathrm{lh}(s)$ 上の線型順序である.

(b) $s \subseteq s'$ のときは $<_s \subseteq <_{s'}$ である.

(c) $x \in {}^\omega\omega$ に対して $<_x = \bigcup_n <_{x \restriction n}$ と定義すると, それは ω 上の線型順序であり,

$$x \in A \iff <_x \text{ is a wellordering relation}$$

となる.

実は (a),(b),(c) を満たす対応 $(\, s \mapsto <_s \,)$ が存在することは A が $\mathbf{\Pi}^1_1$ であることと同値である. 目的の tree T' は次のように定義される.

$$\text{(1-9)} \quad \langle s, u \rangle \in T' \iff s \in {}^{<\omega}\omega \;\; \& \;\; u \in {}^{<\omega}\kappa \;\; \& \;\; \mathrm{lh}(s) = \mathrm{lh}(u) \\ \& \;\; (\forall i, j < \mathrm{lh}(s))\, [\, i <_s j \iff u(i) < u(j) \,]$$

この tree が補題の条件を満たすことを示そう.

まず $A = \mathrm{p}[T']$ であることをいう. $\langle s, u \rangle \in T'$ のとき, T' の作り方から u は $(\, \mathrm{lh}(s), <_s \,)$ から $(\, \kappa, < \,)$ の中への順序保存写像になっている. またその逆もいえる. そこで

$$\langle x, f \rangle \in [T'] \iff f : (\, \omega, <_x \,) \xrightarrow{\text{o.p.}} (\, \kappa, < \,)$$

であって, このことから

$$x \in \mathrm{p}[T'] \iff <_x \text{ is a wellordering} \\ \iff x \in A$$

すなわち, $A = \mathrm{p}[T']$ である. 次に T' が κ-homogeneous tree であることをいう. そのためにまず κ 上の normal measure ν をとり, ν_n を次のように定義する.

$$\text{(1-10)} \qquad \nu_n(A) = 1 \iff (\exists H \subseteq \kappa)\, [\, \nu(H) = 1 \;\; \& \;\; {}^n[H] \subseteq A \,], \qquad (A \subseteq {}^n[\kappa])$$

この ν_n は ${}^n[\kappa]$ 上の κ-complete measure になっている. これを用いて各 $s \in {}^{<\omega}\omega$ に対し

$$\mu_s(X) = 1 \iff \nu_{\mathrm{lh}(s)}(\{\, \mathrm{image}(u) \mid u \in X \,\}) = 1, \qquad (X \subseteq {T'}_s)$$

と定める. $\langle s, t \rangle \in T'$ のとき, u は s と $\mathrm{image}(u)$ だけで決ってしまうので, μ_s は ${T'}_s$ 上の κ-complete measure になる.

次に $\langle \mu_s \mid s \in {}^{<\omega}\omega \rangle$ が整合性の条件 (ii) を満たすことを確かめる. $X \subseteq T'_s$, $\mu_s(X) = 1$ であれば, $\nu(H) = 1$ となるようなある $H \subseteq \kappa$ で

$$^{\mathrm{lh}(s)}[H] \subseteq \{ \mathrm{image}(u) \mid u \in X \}$$

となる. H は無限集合であるので, このことから

$$^{(\mathrm{lh}(s)+k)}[H] \subseteq \{ \mathrm{image}(u) \mid u \restriction \mathrm{lh}(s) \in X \}, \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

であり, この最後の式は s を延長する任意の s' について $\mu_{s'}(\{ u \mid u \restriction \mathrm{lh}(s) \in X \}) = 1$ となることを意味している.

さていま $x \in \mathrm{p}[T']$, $\mu_{x\restriction n}(A_n) = 1$, for all n となっているとする. 各 A_n につき,

$$\begin{gathered} H_n \subseteq \kappa, \\ \nu(H_n) = 1, \\ {}^{n}[H_n] \subseteq \{ \mathrm{image}(u) \mid u \in A_n \} \end{gathered}$$

となるような H_n がある. ここで $H := \bigcap_n H_n$ とすると, $\nu(H) = 1$ より H は順序数の非可算集合であって, 順序保存写像

$$f : (\omega, <_x) \xrightarrow{\text{o.p.}} H$$

が存在する. $\langle H_n \mid n \in \omega \rangle$ のとり方から, この f について

$$(\forall n \in \omega) [f \restriction n \in A_n]$$

となることがわかる. 以上で T' が homogeneous tree であることが確かめられた. [証明終]

Homogeneous tree の応用に際して重要なのはその射影の決定性である. 今回の目標である Projective determinacy の証明にはこの性質を用いる.

<u>補題 1.2.3</u>

T は $Y \times Z$ 上の tree で, $P \subseteq {}^{\omega}\omega$ はその射影とする. いま T が $|Y|^{+}$-homogeneous であれば, P を判定集合とする無限ゲームには必勝法が存在する (P は決定性を有する).

[証明] P を判定条件とするゲーム $G = G(P)$ の他に, 次のようなゲーム G^* を考える.

$$\begin{array}{lccccccccc}
(\text{先手}) & \langle y_0, z_0\rangle & & & & \langle y_2, z_1\rangle & & & & \cdots \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
(\text{後手}) & & & y_1 & & & & y_3 & & \cdots
\end{array}$$

ここで, y_i は Y の, z_i は Z の要素だとし, すべての $n \in \omega$ で $\langle\langle y_i \mid i \leq n\rangle, \langle z_i \mid i \leq n\rangle\rangle \in T$ であるときに先手の勝ちと判定する. このゲーム G^* は $Y \times Z$ 上の closed ゲームであるから Gale-Stewart の定理により先手または後手の必勝法が存在する. そこで, G^* で必勝法を持つ側の打ち手が G でも必勝法を持つことを以下に証明する.

先手が必勝法を持つ場合: この場合は簡単である. G^* での先手の必勝法の z_i の部分は $\langle y_i \mid i \in \omega\rangle$ が P に属することの証人になっている. そこで G において先手は G^* の必勝法の教えるとおりに y_{2i} を選べばよい.

後手が必勝法を持つ場合: T が homogeneous tree であることが効いてくるのはこの場合である. G^* での後手の必勝法を τ^* とする. G での後手の必勝法を定義するため, まず長さが $2n+2$ の列 $\langle y_i \mid i \leq 2n+1\rangle$ に対して, 集合 $A(\langle y_i \mid i \leq 2n+1\rangle) \subseteq {}^{(n+1)}Z$ を次のように対応させる.

$$
\begin{aligned}
\langle z_i \mid i \leq n\rangle \in & A(\langle y_i \mid i \leq 2n+1\rangle) \\
& \iff (\forall k \leq n)\,[\,y_{2k+1} = \tau^*(\langle y_{2i} \mid i \leq k\rangle, \langle z_i \mid i \leq k\rangle)] \\
& \iff y_1 = \tau^*(\langle y_0\rangle, \langle z_0\rangle) \\
& \quad\ \& \ y_3 = \tau^*(\langle y_0, y_2\rangle, \langle z_0, z_1\rangle) \\
& \qquad \vdots \\
& \quad\ \& \ y_{2n+1} = \tau^*(\langle y_0, \cdots, y_{2n}\rangle, \langle z_0, \cdots, z_n\rangle)
\end{aligned}
$$

G での後手の戦略 τ は次のようなものとする.

(先手) y_0,
(後手) y_1 such that $\mu_{\langle y_0\rangle}(A(\langle y_0, y_1\rangle)) = 1$,

(先手) y_2,
(後手) y_3 such that $\mu_{\langle y_0, y_1\rangle}(A(\langle y_0, y_1, y_2, y_3\rangle)) = 1$,

$\vdots$

(先手) y_{2n},
(後手) y_{2n+1} such that $\mu_{\langle y_i \mid i \leq n\rangle}(A(\langle y_i \mid i \leq 2n+1\rangle)) = 1$,

$\vdots$

このような選択が可能であるのは次の理由による. まず最初の y_1 の選択の可能性は $|Y|$ とおりであり, それらは ${}^1Z$ を $|Y|$ 個の $A(\langle y_0, y_1\rangle)$ に分割する. $\mu_{\langle y_0\rangle}$ は $|Y|^+$-complete なので, ある y_1 で $\mu_{\langle y_0\rangle}(A(\langle y_0, y_1\rangle)) = 1$ となるわけである. 続く y_3 の選択に際してやはり $|Y|$ とおりの選択の可能性が

あり，それらは ^2Z の部分集合

$$X := \{ \langle z_0, z_1 \rangle \mid \langle z_0 \rangle \in A(\langle y_0, y_1 \rangle) \}$$

を $|Y|$ 個の $A(\langle y_0, y_1, y_2, y_3 \rangle)$ に分割する．μ_s たちの整合性から $\mu_{\langle y_0, y_1 \rangle}(X) = 1$ である．したがってある y_3 で $\mu_{\langle y_0, y_1 \rangle}(A(\langle y_0, y_1, y_2, y_3 \rangle)) = 1$ となる．以下同様である．

これで τ が G での後手の戦略であることはわかった．これが必勝法であることを背理法で示そう．そうでなかったとすると，τ に従って得られるある対局 $y \in {}^{\omega}Y$ で $y \in P = \mathrm{p}[T]$ となる．τ の作り方から

$$\mu_{y \restriction n}(A(y \restriction (2n+2))) = 1, \qquad \text{for all } n$$

である．補題 1.2.1 により，$z \in {}^{\omega}Z$ をすべての n で $z \restriction n \in A(y \restriction 2n)$ となるようにとれる．これは $A(s)$ の作り方から

$$y(2n+1) = \tau^*(\langle y(2i) \mid i \leq n \rangle, \langle z(i) \mid i \leq n \rangle), \qquad \text{for all } n$$

ということになる．したがって G^* での次の対局

$$\begin{array}{lccccccc}
(\text{先手}) & \langle y(0), z(0) \rangle & & & \langle y(2), z(1) \rangle & & & \cdots \\
 & & \searrow & \nearrow & & \searrow & & \\
(\text{後手}) & & & y(1) & & & y(3) & \cdots
\end{array}$$

では，後手は τ^* に従っているにも関わらず $\langle y, z \rangle \in [T]$ となって負けてしまう．これは τ^* が必勝法であるという仮定に反する．［証明終］

補題 1.2.2, 1.2.3 から，次の定理を得る．

定理 (Martin[**Ma**])

$$\exists \, \text{measurable cardinal} \implies \text{Determinacy}(\mathbf{\Pi}^1_1).$$

今回のわれわれの目標である，Large cardinal axiom からの Projective Determinacy の導出はこの Martin の定理とその証明の一般化になっている．

3. Embedding normal form.

Homogeneous tree の射影であることが集合の決定性を保証することは補題 1.2.3 で述べたとおりである．以下の議論に際しては，しかしながら homogeneous tree の射影であるという性質より少し一般化して embedding normal form をもつという性質として取り扱う．そのことにより証明の主な道具を提供してくれる内部モデルの理論に適応しやすくするのである．

Embedding normal form の定義を次に述べよう.

定義 2.3

A を ${}^{\omega}Y$ の部分集合とする. A の embedding normal form とは, 内部モデルと elementary embedding の系列

$$(\langle M_s \mid s \in {}^{<\omega}Y \rangle, \langle j_{s,t} \mid s \subseteq t \in {}^{<\omega}Y \rangle)$$

であって次の条件 (i)–(iii) を満たすもののことである.

(i) $M_\phi = V$.

(ii) $s \subseteq t \subseteq u$ のとき, $j_{s,u} = j_{t,u} \circ j_{s,t}$ である. また $j_{s,s} = \mathrm{id} \upharpoonright M_s$ である.

(iii) $y \in A \iff \underrightarrow{\lim}(\langle M_{y\upharpoonright n} | n \in \omega \rangle, \langle j_{y\upharpoonright m, y\upharpoonright n} | m \leq n \in \omega \rangle)$ is wellfounded.

Homogeneous tree の射影が embedding normal form をもつことはほとんど明らかである.

この概念に関連して, elementary embedding の系列によって導入される measure の系列について考えてみる. elementary embedding の系列は集合論の言語にとって外的であるが, measure の系列はそうではない. われわれは補助的な概念として外的なものを用いるが, 実際に行われる構成は集合論にとって内的に遂行できるものでなければならず, したがって elementary embedding を証人として定義される概念などはそれが本当に集合論の範囲内で記述できるかどうか問題になるのである (たとえば後で出てくる extender や Woodin cardinal などの定義に関する議論をみよ).

集合論の内部モデルの系列 $\langle M_n \mid n \in \omega \rangle$ と elementary embedding の系列 $\langle j_{m,n} \mid m \leq n \in \omega \rangle$ があって,

(a) $\qquad j_{m,m} = \mathrm{id} \upharpoonright M_m, \qquad$ for all $m \in \omega$,

(b) $\qquad j_{k,n} = j_{m,n} \circ j_{k,m}, \qquad$ if $k \leq m \leq n$,

(c) $\qquad M_0 = V$

となっているものとする. $e_k \in M_k$ となるように $\langle e_k \mid k \in \omega \rangle$ をとり, μ_m を

(1-11) $$\mu_m(X) = 1 \iff \langle j_{k,m}(e_k) \mid k < m \rangle \in j_{0,m}(X), \qquad \text{if } X \subseteq {}^{m}V$$

と定める. 適当な集合 Z をとって各 μ_m が ${}^{m}Z$ 上の measure になるようにできる. 最小の $\mathrm{crit}(j_{m,n})$ を κ とすれば $\langle \mu_k \mid k \in \omega \rangle$ は κ-complete measure の整合的系列である. 超巾 $\mathrm{Ult}(V, \mu_m)$ から M_m への elementary embedding π_m を

$$\pi_m([\![F]\!]_{\mu_m}) := j_{0,m}(F)(\langle j_{k,m}(e_k) \mid k < m \rangle)$$

とし, また $m \leq n$ のとき $\mathrm{Ult}(V, \mu_m)$ から $\mathrm{Ult}(V, \mu_n)$ への自然な elementary embedding を $i_{m,n}$

と書けば次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ult}(V,\mu_m) & \xrightarrow{i_{m,n}} & \mathrm{Ult}(V,\mu_n) \\ {\scriptstyle \pi_m}\downarrow & & {\scriptstyle \pi_n}\downarrow \\ M_m & \xrightarrow{j_{m,n}} & M_n \end{array} \tag{1-12}$$

いま $(\langle M_k \mid k \in \omega\rangle, \langle j_{m,n} \mid m \leq n \in \omega\rangle)$ の極限を M_∞ とすると, elementary embedding

$$\pi_\infty : \mathrm{Ult}(V, \langle \mu_m | m \in \omega\rangle) \longrightarrow M_\infty$$

が存在する. ゆえに M_∞ が wellfounded のときは $\mathrm{Ult}(V, \langle \mu_m | m \in \omega\rangle)$ もそうである.

4. Martin-Steel の定理.

κ を無限基数とする. ${}^\omega\omega$ の部分集合は, $\omega \times \kappa$ 上の tree の射影であるとき κ-Suslin であるという. この用語は classical な記述集合論での Suslin 集合の概念の拡張として D. A. Martin によって導入された. 代表的な性質は次のようなものである.

(1) 解析集合, $\mathbf{\Sigma}^1_1$, $\aleph_0$-Suslin は同値な概念である.

(2) $\mathbf{\Sigma}^1_2$-集合は $\aleph_1$-Suslin である.

(3) κ より少ない個数の κ-Suslin 集合の和集合, 共通部分はいずれも κ-Suslin である.

(4) κ-Suslin 集合の連続写像による像も逆像も κ-Suslin 集合である.

$\aleph_0$-Suslin 集合の補集合や, 補集合の連続像は $\aleph_1$-Suslin であるが, これと類似の事実が一般の κ-Suslin についていえるかどうかは簡単にはわからない. 特別な場合として, homogeneous tree の射影とその補集合の場合について述べよう.

まず補集合の場合について. T を $\omega \times Z$ 上の homogeneous tree, $A \subseteq {}^\omega\omega$ をその射影とする. homogeneous tree の定義にしたがって

$$x \in A \iff \mathrm{Ult}(V, \langle \mu_{x\restriction n} | n \in \omega\rangle) \text{ is wellfounded.}$$

である. 補題 1.1.1 によれば, $\mathrm{Ult}(V, \langle \mu_n | n \in \omega\rangle)$ が wellfounded であることは, $i_{m,m+1}(\beta_m) > \beta_{m+1}$, $(m = 0, 1, 2, \cdots)$ となるような順序数の列 $\langle \beta_k | k \in \omega\rangle$ が存在しない, ということと同値である (ここで $i_{m,n}$ は $\mathrm{Ult}(V, \mu_m)$ の $\mathrm{Ult}(V, \mu_n)$ への自然な elementary embedding をあらわすものとする). それゆえ A の補集合 B については

$$x \in B \iff (\exists \langle \beta_k | k \in \omega\rangle)(\forall m, n \in \omega)[m < n \implies j_{x\restriction m, x\restriction n}(\beta_m) > \beta_n]$$

となっているわけである. そこでいま $\omega \times \mathrm{Ord}$ 上の tree T^* を

$$(1\text{-}13)\quad \langle s,u\rangle \in T^* \iff s \in {}^{<\omega}\omega \ \&\ u \in {}^{<\omega}\mathrm{Ord} \ \&\ \mathrm{lh}(s)=\mathrm{lh}(u) \\ \&\ (\forall m,n<\mathrm{lh}(s))\,[\,m<n \implies j_{s\restriction m, s\restriction n}(u(m)) > u(n)\,]$$

と定義すると, $B = \mathrm{p}[T^*]$ であることがわかる. ここで T^* は一般には proper class になってしまうが, Replacement axiom によって集合に削ってしまうことができる. またそのときの高さの評価も可能で,

$$B = \neg\mathrm{p}[T] = \mathrm{p}[T^*] = \mathrm{p}[T^* \restriction 2^{|Z|^+}]$$

である. これを証明するには, $x \notin \mathrm{p}[T]$ の証人を補題 1.2.1 の証明の最後の部分の方法で作ることができるが, その高さは $2^{|Z|^+}$ でおさえることができるということに注意すれば良い.

次に $(\omega\times\omega)\times Z$ 上の homogeneous tree T とその射影 $A \subseteq {}^\omega\omega \times {}^\omega\omega$ を考える. これに対して $\omega\times\mathrm{Ord}$ 上の tree $\tilde{T}$ を次のように定義する.

$$(1\text{-}14)\quad \langle s,u\rangle \in \tilde{T} \iff s \in {}^{<\omega}\omega \ \&\ u \in {}^{<\omega}\mathrm{Ord} \ \&\ \mathrm{lh}(s)=\mathrm{lh}(u) \\ \&\ (\forall m,n<\mathrm{lh}(s))\,[\,m<n \ \&\ t_m \subsetneq t_n \implies j_{\langle s\restriction \mathrm{lh}(t_m), t_m\rangle, \langle s \restriction \mathrm{lh}(t_n), t_n\rangle}(u(m)) > u(n)\,]$$

ここで $\langle t_n \mid n\in\omega\rangle$ は (以前にも出てきたが) ${}^{<\omega}\omega$ の適当な enumeration であるものとする. このとき T^* に対するのと同様の考察により

$$\mathrm{p}[\tilde{T}] = \mathrm{p}[\tilde{T}\restriction 2^{|Z|^+}] = \{\, x \mid (\forall y \in {}^\omega\omega)\,[\,\langle x,y\rangle \notin \mathrm{p}[T]\,]\,\}$$

となることがわかる.

いま homogeneous tree の射影である集合のことを, **[MS2]**の用語法にしたがって homogeneously Suslin であるということにすると, 以上のことは次のようにいい換えられる.

${}^\omega\omega$ の homogeneously Suslin 部分集合の補集合は Suslin 集合である. また ${}^\omega\omega \times {}^\omega\omega$ の homogeneously Suslin 部分集合の ${}^\omega\omega$ への射影の補集合もまた Suslin 集合になる.

本論の目標である Martin-Steel の定理はある条件のもとでこれらの集合が再び homogeneously Suslin 集合になることを主張する. 次にそのステートメントを記す (Woodin Cardinal の定義などについては section3 を見よ).

定理 (Martin-Steel の定理,**[MS1]**)

δ が Woodin cardinal で, T が $\omega\times Z$ (resp. $(\omega\times\omega)\times Z$) 上の δ^+-homogeneous tree であれば, 上記の T^* (resp. $\tilde{T}$) は任意の $\alpha<\delta$ について α-homogeneous tree である.

この定理から Projective Determinacy を得るには次のようにする.

定理 [**MS1**]

(1) n 個の Woodin cardinal $\delta_n < \cdots < \delta_1$ とそのどれよりも大きい measurable cardinal $\lambda > \delta_1$ が存在すれば Determinacy($\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$) が成立する.

(2) 無限に多くの Woodin cardinal が存在すれば Projective Determinacy が成立する.

[証明] 補題 1.2.2 より任意の $\mathbf{\Pi}^1_1$-集合は λ-homogeneous tree の射影である. そこで $A \subseteq {}^\omega\omega \times {}^\omega\omega$ を $\mathbf{\Pi}^1_1$-集合とし, T を $(\omega \times \omega) \times \lambda$ 上の λ-homogeneous tree (したがって δ_1^+-homogeneous tree でもある) で $A = \mathrm{p}[T]$ となるものとする. Martin-Steel の定理により, この T から得られる $\tilde{T}$ は δ_2^+-homogeneous tree であり, $\mathrm{p}[\tilde{T}] = \neg \mathrm{p}A$ となっている. このことは任意の $\mathbf{\Pi}^1_2$-集合が δ_2^+-homogeneously Suslin であることを意味する. 以下同様にしてすべての $\mathbf{\Pi}^1_k$-集合 $(k = 1, \cdots, n+1)$ が homogeneously Suslin であることがわかる. したがって補題 1.2.3 によりそれらは決定性を有する.
[証明終]

注意: (1) Woodin cardinal は inaccessible cardinal であり. 特に measurable cardinal の limit になっている. 上の証明ではそのことを暗黙の内に利用している. (2) この定理により, n 個の Woodin cardinal が存在すれば Determinacy($\mathbf{\Pi}^1_n$) が成立する. この結果は次のような意味において最良のものである. Deterninacy($\mathbf{\Pi}^1_n$) から, 実数全体の $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$-wellordering の非存在が証明できる (たとえば [**Mo**]を見よ) が, n 個の Woodin cardinal の存在からは $\mathbf{\Delta}^1_{n+2}$-wellordering の非存在は証明できない. したがって, Determinacy($\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$) は n 個の Woodin cardinal の存在だけからは証明できない (以上のことは[**MS3**]の内容に関する手稿の中で述べられている). (3) 次の定理は Woodin によるものである.

定理 (Woodin, [**Wo**])

supercompact cardinal κ が存在すれば, ${}^\omega\omega$ の部分集合で $L(\mathbb{R})$ に属するものはすべて ${}^\omega\omega \times {}^\omega\omega$ の κ-homogeneously Suslin 集合から射影によって得られる (この性質を "weakly homogeneous tree の射影である" と表現する).

この Woodin の定理と Martin-Steel の定理をあわせて次の結果が得られる.

定理 [**Wo**]

$$\exists \text{supercompact cardinal} \Longrightarrow L(\mathbb{R}) \models \text{Axiom of Determinacy}.$$

実際には $\mathbf{AD}^{L(\mathbb{R})}$ の証明には ω 個の Woodin cardinal と, それらのどれよりも大きい measurable cardinal があればよいことが知られている.

§2. Extenders および Iteration Trees

1. Extender の定義.

この subsection では $j: V \to M$ を全世界 V の 内部モデル M への elementary embedding とし, κ はその critical point であるものとする. いま Y は推移的集合で $\kappa \in Y \subseteq V_{j(\kappa)} \cap M$ となっているものとする. Y の要素の有限列 $a \in {}^{<\omega}Y$ の各々について, ${}^{\mathrm{lh}(a)}V_\kappa$ 上の measure $E(a)$ を,

$$E(a)(X) = 1 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} a \in j(X), \qquad \text{for } X \subseteq {}^{\mathrm{lh}(a)}V_\kappa \tag{2-1}$$

と定義して得られる系列 $E = \langle E(a) \mid a \in {}^{<\omega}Y \rangle$ を, j によって導入された Y を support とする extender とよぶ. この定義では集合論の言語にとって外的な elementary embedding という概念に訴えている. extender の概念の集合論の中での (内的な) 定義は次のようなものである.

<u>定義 2.1</u>

Y は推移的集合とする. $E = \langle E(a) \mid a \in {}^{<\omega}Y \rangle$ が Y を support とし κ を critical point とする extender であるとは, 以下の条件 (1)~(6) を満たすときにいう.

(1) 各 $E(a)$ は ${}^{\mathrm{lh}(a)}V_\kappa$ 上の κ-complete measure であり, 少なくとも一つは κ^+-complete でない $E(a)$ がある.

(2) $a, b \in {}^{<\omega}Y$ で $a \subseteq b$ のとき

$$E(a)(X) = E(b)(\{ z \in {}^{\mathrm{lh}(b)}V_\kappa \mid z \upharpoonright \mathrm{lh}(a) \in X \}), \qquad \text{for } X \subseteq {}^{\mathrm{lh}(a)}V_\kappa \tag{2-2}$$

となる. すなわち, $E(a)$ は $E(b)$ の射影である.

(3) π を $\mathrm{lh}(a)$ 上の置換とすると,

$$E(a)(X) = E(a \circ \pi)(\{ z \circ \pi \mid z \in X \})$$

である (置換に対する対称性).

(4) 各 a につき

$$E(a)(\{ z \mid \forall m, n < \mathrm{lh}(a) \, [z(m) \in z(n) \Leftrightarrow a(m) \in a(n)] \}) = 1, \tag{2-3}$$

$$E(a)(\{ z \mid \forall m, n < \mathrm{lh}(a) \, [z(m) = z(n) \Leftrightarrow a(m) = a(n)] \}) = 1 \tag{2-4}$$

である.

(5) 関数 $F : {}^{\mathrm{lh}(a)}V_\kappa \to V_\kappa$ が

$$E(a)(\{ z \mid \exists m < \mathrm{lh}(a) \, [F(z) \in z(m)] \}) = 1$$

を満たせば, ある $y \in Y$ について

$$E(a^\frown\langle y\rangle)(\{\, z \mid F(z \upharpoonright \mathrm{lh}(a)) = z(\mathrm{lh}(a))\,\}) = 1$$

を満たす.

(6) 集合列 $\langle X_m \mid m \in \omega \rangle$ と $u \in {}^\omega Y$ が条件

$$\left.\begin{array}{r} X_m \subseteq {}^m V_\kappa, \\ E(u \upharpoonright m)(X_m) = 1, \end{array}\right. \qquad \text{for all } m \in \omega$$

を満たすように与えられたとき, ある $f \in {}^\omega V_\kappa$ で

$$f \upharpoonright m \in X_m, \qquad \text{for all } m \in \omega$$

となっている.

注意: 原論文である **[MS2]** では extender の定義は (2-4) の条件を欠く. この条件を付け加えると後の議論が容易になるし (というよりこれがないとどうしていいか解らない), 付け加えることによって一般性を損なうことがないのでここでは (2-4) を付け加えた形で extender の定義をする.

E が最初に述べた意味で elementary embedding j によって導入された extender のとき, それが上の定義の条件を満たすことを確かめるのはさほど難しいことではない. 逆に定義 2.1 の条件を満たす extender E はある elementary embedding によって導入される extender と一致することを次に示す. それにより extender の外的な定義と内的な定義が同等であることが確認される.

E を 推移的集合 Y を support とし κ を critical point とする extender とする. 二つの関数 $F : {}^{\mathrm{lh}(a)}V_\kappa \to V$, $G : {}^{\mathrm{lh}(b)}V_\kappa \to V$ について, 対 (F, a) と (G, b) とが E を法として同値である (記号では $(F, a) \sim_E (G, b)$ とかく) ということを次のように定義する.

(2-5) $(F, a) \sim_E (G, b)$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} E(a^\frown b)(\{\, z^\frown w \mid z \in {}^{\mathrm{lh}(a)}V_\kappa \ \ \&\ \ w \in {}^{\mathrm{lh}(b)}V_\kappa \ \ \&\ \ F(z) = G(w)\,\}) = 1$$

この関係は実際同値関係になる. 例えば反射律については, 各 $a \in {}^{<\omega}Y$ につき

$$E(a^\frown a)(\{\, z^\frown w \mid z = w \in {}^{\mathrm{lh}(a)}V_\kappa \,\}) = 1$$

となることが (2-4) からわかる. 一方明らかに

$$\{\, z^\frown w \mid z = w \,\} \subseteq \{\, z^\frown w \mid F(z) = F(w) \,\}$$

である．この二つのことから $(F,a) \sim_E (F,a)$ がわかる．同様にして対称律が条件 (3) から，推移律が同じく (3) と (2) を使って証明できる．この同値関係 $\sim_E$ によって $F : {}^{\mathrm{lh}(a)}V_\kappa \to V$, $(a \in {}^{<\omega}Y)$ と a との組の全体を類別する．(F,a) の同値類を $[\![F]\!]_a$ とかくことにする．いまこの同値類全体のクラスを

$$\mathrm{Ult}(V,E)$$

と書き，V の extender E による超巾という．$\mathrm{Ult}(V,E)$ 上に次のように関係 $\in_E$ (E を法とした所属関係) を定める．

$$(2\text{-}6) \qquad [\![F]\!]_a \in_E [\![G]\!]_b \overset{\text{def}}{\iff} E(a\hat{\ }b)(\{\, z\hat{\ }w \mid F(z) \in G(w) \,\}) = 1$$

補題 2.1.1

構造 $\langle\, \mathrm{Ult}(V,E), \in_E \,\rangle$ は wellfounded である．

[証明]　ここでは本質的に (6) を用いる．いま $\mathrm{Ult}(V,E)$ が wellfounded でなければ，$\in_E$-無限下降列が存在する．それを

$$(2\text{-}7) \qquad [\![F_0]\!]_{a_0} \ni_E [\![F_1]\!]_{a_1} \ni_E \cdots \ni_E [\![F_n]\!]_{a_n} \ni_E \cdots$$

としよう．ここで定義 2.1 の条件 (2) と (2-5) などから，

$$a_0 \subset a_1 \subset \cdots \subset a_n \subset \cdots$$

となっているとして差し支えない．いま 集合列 $\langle X_m \mid m \in \omega \rangle$ を次のように定める．まず $m = \mathrm{lh}(a_n)$ となるところでは，

$$\begin{aligned} X_{\mathrm{lh}(a_0)} &:= {}^{\mathrm{lh}(a_0)}V_\kappa \\ X_{\mathrm{lh}(a_{n+1})} &:= \{\, z \in {}^{\mathrm{lh}(a_{n+1})}V_\kappa \mid z \restriction \mathrm{lh}(a_n) \in X_{\mathrm{lh}(a_n)} \ \ \& \ \ F_{n+1}(z) \in F_n(z \restriction \mathrm{lh}(a_n)) \,\} \end{aligned}$$

その他のところでは X_m は $m < \mathrm{lh}(a_n)$ となる最初の n に関する $X_{\mathrm{lh}(a_n)}$ を射影して得られるものとする．このように定めると，(2-7) と定義 2.1 の (2) などから

$$E(u \restriction m)(X_m) = 1, \qquad \text{for all } m \in \omega$$

となる．ただし $u = \bigcup_{n\in\omega} a_n \in {}^{\omega}Y$ だとする．ここで定義 2.1 の (6) から，ある $f \in {}^{\omega}V_\kappa$ で

$$f \restriction m \in X_m, \qquad \text{for all } m \in \omega$$

となる. しかしそのとき X_m の作り方などから

$$F_0(f \restriction \mathrm{lh}(a_0)) \ni F_1(f \restriction \mathrm{lh}(a_1)) \ni \cdots \ni F_n(f \restriction \mathrm{lh}(a_n)) \ni \cdots$$

となる. これは不合理である. [証明終]

注意: 上に述べた $\mathrm{Ult}(V,E)$ の定義そのものは E が定義 2.1 の条件のうち (1) から (5) までを満たす measure の系列であればそのまま通用する. そして条件 (6) はこのようにして作られた $\mathrm{Ult}(V,E)$ が集合論の wellfounded なモデルであることを保証するために付け加えられたものである. 実際 E が 2.1 の条件のうち (5) までを満たしていれば, それがさらに (6) をも満たすことは $\mathrm{Ult}(V,E)$ が wellfounded であることと同値なのである. このことを確かめるためにいま (6) が成立していないものとする. (6) の反例になるような $\langle X_m \mid m \in \omega \rangle$, $u \in {}^{\omega}Y$ について, V_κ 上の tree S を

$$S := \{\, z \in {}^{<\omega}V_\kappa \mid \forall m \leq \mathrm{lh}(z)\,[\, z \restriction m \in X_m \,]\,\}$$

と定め, $z, w \in S$ について $z \prec w \Leftrightarrow w \subset z$ とすれば, S が path を持たないことから $\prec$ は wellfounded である. いま $F_n : {}^{n}V_\kappa \to \mathrm{Ord}$ を

$$F_n(z) := \begin{cases} \prec\text{-rank of } z, & \text{if } z \in S \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定めよう. 作り方から

$$E(u \restriction (m+1))(\{\, z \mid F_{m+1}(z) < F_m(z \restriction m) \,\}) = 1$$

したがって $\mathrm{Ult}(V,E)$ において

$$[\![F_0]\!]_{u\restriction 0} \ni_E [\![F_1]\!]_{u\restriction 1} \ni_E \cdots \ni_E [\![F_n]\!]_{u\restriction n} \ni_E \cdots$$

なので $\mathrm{Ult}(V,E)$ は wellfounded でないわけである.

<u>補題 2.1.2</u>

任意の集合 x について, ${}^{\mathrm{lh}(a)}V_\kappa$ 上定義され常に一定値 x をとる関数を C^a_x と書くことにする. そのとき

(1) 同値類 $[\![C^a_x]\!]_a$ は x のみによって決まる.

(2) $\varphi(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n)$ を **LST** の論理式とするとき任意の $F_k : {}^{\mathrm{lh}(a_k)}V_\kappa \to V$, $(1 \leq k \leq n)$ について次のことが成り立つ.

(2-7) $\langle\, \mathrm{Ult}(V,E), \in_E \,\rangle \models \varphi(\, [\![F_1]\!]_{a_1}, \cdots, [\![F_n]\!]_{a_n}\,)$
$$\iff E(a_1{}^\frown \cdots {}^\frown a_n)(\{\, z_1{}^\frown \cdots {}^\frown z_n \mid \varphi(F_1(z_1), \cdots, F_n(a_n)) \,\}) = 1$$

(3) x に対して同値類 $[\![C^a_x]\!]_a$ を対応させる写像を i_E と書けば, $i_E : V \to \mathrm{Ult}(V, E)$ は $\langle V, \in\rangle$ の $\langle \mathrm{Ult}(V, E), \in_E\rangle$ への elementary embedding である.

[証明] まず (1) は同値関係 $\sim_E$ の定義から明らか. (2) については φ の構成に関する帰納法で証明される. その方法はŁoś の定理の証明と同様である. 委細は省略する. (3) は (2) の特別な場合である. [証明終]

補題 2.1.1 と 2.1.2 により, E が extender のとき構造 $\langle\, \mathrm{Ult}(V, E), \in_E \,\rangle$ が集合論の標準モデルになることがわかった. Mostowski の Collapsing Lemma によりこの構造と同型な推移的 $\in$-構造が一意的に存在する. そこで今後はそのような $\in$-構造のことを $\mathrm{Ult}(V, E)$ とみなし, $\in_E$ を本当の $\in$ だと思うことにする. また同値類 $[\![F]\!]_a$ も関数の集まりそのものではなく, 対応する $\in$-構造の要素を表すものとする.

補題 2.1.3

E を extender とし, κ をその critical point とするとき $\mathrm{crit}(i_E) = \kappa$ である.

[証明] すべての $E(a)$ が κ-complete であることから, κ までの超限帰納法で $i_E \restriction V_\kappa = \mathrm{id} \restriction V_\kappa$ がわかる. つぎに κ^+-complete でない $E(a)$ を (定義 2.1 の (1) より少なくとも一つは存在するから) とってきて, ${}^{\mathrm{lh}(a)}V_\kappa$ を次のような $\langle\, X_\alpha \mid \alpha < \kappa \,\rangle$ に分割する.

$$\alpha < \beta < \kappa \implies X_\alpha \cap X_\beta = \phi,$$
$$E(a)(X_\alpha) = 0, \qquad \text{for all } \alpha < \kappa,$$
$$\bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha = {}^{\mathrm{lh}(a)}V_\kappa.$$

そして $F : {}^{\mathrm{lh}(a)}V_\kappa \to \kappa$ を

$$F(z) := \text{ unique } \alpha < \kappa \text{ such that } z \in X_\alpha$$

とおく. このときすべての $z \in {}^{\mathrm{lh}(a)}V_\kappa$ について $F(z) < \kappa$ だから $[\![F]\!]_a < i_E(\kappa)$ となるが, いかなる $\alpha < \kappa$ に対しても $[\![F]\!]_a = i_E(\alpha) = \alpha$ とはならないため $[\![F]\!]_a \geq \kappa$ である. ゆえに $i_E(\kappa) > \kappa$ となり, これで $\mathrm{crit}(i_E) = \kappa$ は証明された [証明終]

$a \in {}^{<\omega}Y$, $m < \mathrm{lh}(a)$ のとき, $H^a_m : {}^{\mathrm{lh}(a)}V_\kappa \to V_\kappa$ を

(2-8) $$H^a_m(z) := z(m), \qquad \text{for each } z \in {}^{\mathrm{lh}(a)}V_\kappa$$

で定義しよう. $\mathrm{Ult}(V, E)$ の構造を調べる上でこの H^a_m はいろいろと有用である. たとえば次のことが成り立つ.

補題 2.1.4

任意の $a \in {}^{<\omega}Y$, $m < \mathrm{lh}(a)$ について $[\![H^a_m]\!]_a = a(m)$ である.

[証明] $a(m) = u$ とおき, $\mathrm{rank}(u)$ に関する帰納法で証明する. 帰納法の仮定として $\mathrm{rank}(y) < \mathrm{rank}(u)$ となる任意の y と, $c(k) = y$ となる任意の $c \in {}^{<\omega}Y$, $k < \mathrm{lh}(c)$ について $[\![H^c_k]\!]_c = y$ となっているとする.

まず $[\![F]\!]_b \in [\![H^a_m]\!]_a$ としよう. $F : {}^{\mathrm{lh}(b)}V_\kappa \to V_\kappa$ としてよい. このとき

$$
\begin{aligned}
& E(a^\frown b)(\{\, z^\frown w \mid F(w) \in H^a_m(z) \,\}) = 1 \\
\therefore\ & E(a^\frown b)(\{\, z^\frown w \mid F(w) \in z(m) \,\}) = 1 \\
\therefore\ & E(a^\frown b^\frown\langle y\rangle)(\{\, z^\frown w^\frown\langle x\rangle \mid F(w) = x \,\}) = 1, \qquad \text{for some } y \in Y \quad \cdots(\bigstar) \\
\therefore\ & E(a^\frown b^\frown\langle y\rangle)(\{\, z^\frown w^\frown\langle x\rangle \mid F(w) = H^{a^\frown b^\frown\langle y\rangle}_{\mathrm{lh}(a^\frown b)}(z) \,\}) = 1 \\
\therefore\ & [\![F]\!]_a = [\![H^{a^\frown b^\frown\langle y\rangle}_{\mathrm{lh}(a^\frown b)}]\!]_{a^\frown b^\frown\langle y\rangle}
\end{aligned}
$$

$(\bigstar)$ のところで定義 2.1 の (5) を用いた. また上記第 2 式と定義 2.1 の (2),(4), それとすぐ上の結果 $(\bigstar)$ により

$$
\begin{aligned}
& E(a^\frown b^\frown\langle y\rangle)(\{\, z^\frown w^\frown\langle x\rangle \mid F(w) \in z(m) \,\}) = 1 \\
\therefore\ & E(a^\frown b^\frown\langle y\rangle)(\{\, z^\frown w^\frown\langle x\rangle \mid x \in z(m) \,\}) = 1 \\
\therefore\ & y \in a(m) = u
\end{aligned}
$$

このことと帰納法の仮定から

$$
[\![F]\!]_b = [\![H^{a^\frown b^\frown\langle y\rangle}_{\mathrm{lh}(a^\frown b)}]\!]_{a^\frown b^\frown\langle y\rangle} = y \in a(m)
$$

以上のことから $[\![H^a_m]\!]_a \subseteq a(m)$ である.

今度は逆に $y \in a(m) = u$ とする. $n := \mathrm{lh}(a)$, $\bar{a} := a^\frown\langle y\rangle$ とおくと $\bar{a}(n) = y \in a(m) = \bar{a}(m)$ なので

$$
\begin{aligned}
& E(\bar{a})(\{\, z \mid z(n) \in z(m) \,\}) = 1 \\
\therefore\ & E(\bar{a})(\{\, H^{\bar{a}}_n(z) \in H^{\bar{a}}_m(z) \,\}) = 1 \\
\therefore\ & [\![H^{\bar{a}}_n]\!]_{\bar{a}} \in [\![H^{\bar{a}}_m]\!]_{\bar{a}}
\end{aligned}
$$

ここで $\bar{a}(n) = y \in a(m) = u$ なので帰納法の仮定より $y = [\![H^{\bar{a}}_n]\!]_{\bar{a}}$ である. したがって

$$
y \in [\![H^{\bar{a}}_m]\!]_{\bar{a}} = [\![H^a_m]\!]_a
$$

ゆえに $a(m) \subseteq [\![H^a_m]\!]_a$ となる. [証明終]

この補題により support$(E) = Y \subseteq \mathrm{Ult}(V, E)$ となることがわかった．また H^a_m をもちいて $y \in {}^{<\omega}Y$ の rank を評価すると，

$$\mathrm{rank}(y) = \mathrm{rank}([\![H^a_m]\!]_a) = [\![\langle \mathrm{rank}(z(m)) \mid z \in {}^{\mathrm{lh}(a)}V_\kappa \rangle]\!]_a < i_E(\kappa)$$

ゆえに $Y \subseteq V_{j(\kappa)}$ である．まとめて書けば

<u>補題 2.1.5</u>

$$\text{(2-9)} \qquad \mathrm{support}(E) \subseteq V_{i_E(\kappa)} \cap \mathrm{Ult}(V, E).$$

<u>補題 2.1.6</u>

$a \in {}^{<\omega}Y$ とするとき，

$$[\![\mathrm{id} \restriction {}^{\mathrm{lh}(a)}V_\kappa]\!]_a = a.$$

[証明]

$$[\![\mathrm{id} \restriction {}^{\mathrm{lh}(a)}V_\kappa]\!]_a(m) = [\![\langle z(m) \mid {}^{\mathrm{lh}(a)}V_\kappa \rangle]\!]_a = [\![H^a_m]\!]_a = a(m), \qquad \text{for all } m < \mathrm{lh}(a).$$

したがって $[\![\mathrm{id} \restriction {}^{\mathrm{lh}(a)}V_\kappa]\!]_a = a$ である [証明終]

<u>補題 2.1.7</u>

E を extender とし，E' は elementary embedding i_E によって導入された extender で support$(E') = Y =$ support(E) となっているものとする．このとき実は $E' = E$ である．

[証明] 任意の $X \subseteq {}^{\mathrm{lh}(a)}V_\kappa$ に対して，

$$\begin{aligned} E'(a)(X) = 1 &\iff a \in i_E(X) \\ &\iff [\![\mathrm{id} \restriction {}^{\mathrm{lh}(a)}V_\kappa]\!]_a \in [\![C^a_X]\!]_a \\ &\iff E(a)(\{ z \mid z \in X \}) = 1 \\ &\iff E(a)(X) = 1 \end{aligned}$$

したがって $E'(a) = E(a)$ が任意の a について成立する． [証明終]

これでこの subsection の最初に述べた extender の二つの定義の実質的な同等性が確認されたことになる．また補題 2.1.7 の証明の系として次の補題を得る．

補題 2.1.8

E を extender とし, $Y' \subseteq \mathrm{support}(E)$ は推移的集合とする. このとき, $E \upharpoonright Y'$ は Y' を support とする extender になる.

[証明] $E \upharpoonright Y'$ は i_E により導入される extender である [証明終]

2. 一般のモデルの extender による超巾.

いま M が集合論の推移的モデルであって,

$$M \models \text{“}E \text{ is an extender.”}$$

となっているとき, 前の subsection の議論を M の中で繰り返せば, E による M の超巾 $\mathrm{Ult}(M, E)$ を $(\mathrm{Ult}(V, E))^M$ として定義できる. $\mathrm{Ult}(M, E)$ は M と elementary に同等な, 集合論の推移的モデルになることがわかる.

M とは別に, もう一つ集合論の推移的モデル N を考え, N の E による超巾 $\mathrm{Ult}(N, E)$ を定義したい. そのために関数

$$F : {}^{\mathrm{lh}(a)}(V_\kappa \cap N) \to N, \quad F \in N$$

全体のクラスを (2-5) と同様の E を法とした同値関係で類別するのだが, E は N に属しているとは限らないので, ここで (2-5) が意味を持つためには ${}^{\mathrm{lh}(a)}(V_\kappa \cap N)$ の部分集合が M に属する必要がある. そこで以下の議論では

$$V_{\kappa+1} \cap M = V_{\kappa+1} \cap N$$

となっているものと仮定する. ここで κ は E の critical point のことだとする. このように仮定すれば同値類の全体として $\mathrm{Ult}(N, E)$ を作ることができ, 写像

$$i_E^N : N \to \mathrm{Ult}(N, E)$$

を定義できる. N が集合論の十分強い subtheory のモデルであればこの i_E^N は elementary embedding になっている.

ここで注意しなければならないことは $\mathrm{Ult}(N, E)$ は必ずしも N で定義可能なクラスとは限らない, ということである. したがってもはや補題 2.1.1 の議論は適用できず, $\mathrm{Ult}(N, E)$ が wellfounded であるかどうかも一般にはわからない. そこで $\mathrm{Ult}(N, E)$ が wellfounded になるように M と N に条件をつけることにする.

推移的モデル M が ω-closed であるとは, ${}^{\omega}M \subseteq M$ となること, つまり

$$\forall m \in \omega\, [\, x_m \in M \,] \implies \langle\, x_m \mid m \in \omega \,\rangle \in M$$

ということだとする. M, N がともに ω-closed であることは $\mathrm{Ult}(N, E)$ が wellfounded であるための十分条件である.

補題 2.2.1

M, N は集合論の推移的モデルで, 次の条件を満たすものとする.

(i) $V_{\kappa+1} \cap M = V_{\kappa+1} \cap N$

(ii) $M \models$ "E is an extender, and $\mathrm{crit}(E) = \kappa$."

(iii) M is ω-closed.

このとき, $\mathrm{Ult}(N, E)$ は wellfounded である.

[証明] $\mathrm{Ult}(N, E)$ が wellfounded でなかったとする. $\mathrm{Ult}(N, E)$ での E を法とする所属関係を $\in_E^N$ と書き, $\in_E^N$-無限下降列

$$[\![F_0]\!]_{a_0} \ni_E^N [\![F_1]\!]_{a_1} \ni_E^N \cdots \ni_E^N [\![F_n]\!]_{a_n} \ni_E^N \cdots$$

を考えよう, 補題 2.1.1 の証明でやったのと同様の方法で集合列 $\langle X_m \mid m \in \omega \rangle$ を作ると, M が ω-closed で $V_{\kappa+1} \cap M = V_{\kappa+1} \cap N$ だから

$$\langle X_m \mid m \in \omega \rangle \in M$$

となる, この集合列は E が M の中で extender になっていることの反例をなす. [証明終]

次の補題は, あとで extender による超巾を繰り返し行う iteration tree の議論を行うときに用いられる.

補題 2.2.2

M, N はともに集合論の推移的モデルで, 次の条件を満たしているものとする.

(1) $V_{\rho+1} \cap M = V_{\rho+1} \cap N$

(2) $M \models$ "E is an extender, and $\mathrm{crit}(E) = \kappa \leq \rho$."

(3) $\mathrm{Ult}(N, E)$ is wellfounded.

このとき, 次のことが成り立つ.

(a) 任意の $F : {}^{\mathrm{lh}(a)}(V_\kappa \cap M) \to V_{\rho+1} \cap M$ について $[\![F]\!]_a^M = [\![F]\!]_a^N$.

(b) $V_{i_E^M(\rho)+1} \cap \mathrm{Ult}(M, E) = V_{i_E^N(\rho)+1} \cap \mathrm{Ult}(N, E)$

(c) $\mathrm{support}(E) \subseteq \mathrm{Ult}(N, E)$

[証明] (a) にいうような F の全体は M と N で共通である. このことに注意すれば (a) は容易に証明できる. (b),(c) は (a) と補題 2.1.5 からしたがう. [証明終]

補題 2.2.3

補題 2.2.1 において，さらに条件

(iv) $^{\le\omega}Y \subseteq Y$

(v) N is ω-closed.

が成立していれば，$\mathrm{Ult}(N,E)$ も ω-closed である．ただし $Y = \mathrm{support}(E)$ であり，$^{\le\omega}Y$ とは $^{<\omega}Y \cup {}^{\omega}Y$ のことだとする．

[証明]　いま $[\![F_m]\!]^N_{a_m}$, $(m \in \omega)$ が与えられたとする．条件 (v) より，$\langle \mathrm{lh}(a_m) \mid m \in \omega \rangle \in N$ である．また条件 (iv) より，$b := \langle a_m \mid m \in \omega \rangle \in Y$ である．関数 $\hat{F} : {}^1V_\kappa \to V$ を

$$\hat{F}(\langle y \rangle) := \begin{cases} \langle F_m(y(m)) \mid m \in \omega \rangle, & \text{if } y \in {}^{\omega}N \;\;\&\;\; \forall m \in \omega\,[y(m) \in {}^{\mathrm{lh}(a_m)}V_\kappa] \\ \phi, & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義しよう．条件 (v) より $\langle F_m \mid m \in \omega \rangle \in N$, したがって $\hat{F} \in N$ である．また

$$X := \{ \langle y \rangle \in {}^1V_\kappa \mid y \in {}^{\omega}N \;\;\&\;\; \forall m \in \omega\,[y(m) \in {}^{\mathrm{lh}(a_m)}V_\kappa] \}$$

とおくと，$E(\langle b \rangle)(X) = 1$ である (後述)．このことから $\mathrm{Ult}(N,E)$ において，$[\![\hat{F}]\!]^N_{\langle b \rangle}$ は定義域 ω の関数であり，特に

$$[\![\hat{F}]\!]^N_{\langle b \rangle}(m) = [\![\, \langle y \rangle \mapsto F_m(y(m)) \,]\!]^N_{\langle b \rangle}$$

となっている．右辺の関数 $\langle y \rangle \mapsto F_m(y(m))$ を $\hat{F}_m$ と書くことにすると，以上のことから

$$\langle [\![\hat{F}_m]\!]^N_{\langle b \rangle} \mid m \in \omega \rangle = [\![\hat{F}]\!]^N_{\langle b \rangle} \in N$$

となるので，$(\hat{F}_m, \langle b \rangle) \sim_E (F_m, a_m)$ がいえれば証明は終る．いま b の作り方から，

$$E(\langle b \rangle^\frown a_m)(\{ \langle y \rangle^\frown z \mid y(m) = z \}) = 1.$$

他方 $\hat{F}_m$ の作り方から，

$$\{ \langle y \rangle^\frown z \mid y(m) = z \} \subseteq \{ \langle y \rangle^\frown z \mid \hat{F}_m(\langle y \rangle) = F_m(y(m)) \}$$

なので $E(\langle b \rangle^\frown a_m)(\{ \langle y \rangle^\frown z \mid \hat{F}_m(\langle y \rangle) = F_m(y(m)) \}) = 1$. これは $(\hat{F}_m, \langle b \rangle) \sim_E (F_m, a_m)$ ということにほかならない．

さて $E(\langle b \rangle)(X) = 1$ の証明が残っている．b の定義と $Y \subseteq V_{i^M_E(\kappa)} \cap \mathrm{Ult}(M,E)$ より，

$$\langle b \rangle \in i^M_E(\{ \langle y \rangle \mid y \in {}^{\omega}M \;\;\&\;\; \forall m \in \omega\,[y(m) \in {}^{\mathrm{lh}(a_m)}V_\kappa] \})$$

これと補題 2.1.7 から

$$E(\langle b\rangle)(\{\langle y\rangle \mid y \in {}^{\omega}M \ \ \& \ \ \forall m \in \omega\,[y(m) \in {}^{\mathrm{lh}(a_m)}V_\kappa]\,\}) = 1.$$

ところが, 条件 (i) より, この右辺の集合は X と一致する. [証明終]

注意: 今後, 補題 2.2.3 の前提条件 (iv) を, "E は ω-closed な support をもつ." と表現する.

3. Iteration tree の定義.

ここで tree とは, 各 initial segment が整列部分集合になるような poset のことをいう. 集合 X 上の tree という場合とは違った意味なので注意を要する. iteration tree というのは tree の各節 (node = tree の定義域の元) に集合論の内部モデルを, また節と節をつなぐ路 (path) に超巾による自然な elementary embedding を貼り付けたものである. きちんとした定義は次のようなものである.

<u>定義 2.3</u>

α を 0 でない自然数, または ω とする. V 上の長さ α の iteration tree とは,

$$\mathcal{T} = (\prec, \langle M_k \mid k < \alpha\rangle, \langle E_k \mid k+1 < \alpha\rangle, \langle \rho_k \mid k+1 < \alpha\rangle)$$

の形の体系であって, 次に述べる条件 $(i) \sim (vii)$ を満たすもののことであると定める.

(i) $\prec$ は α を定義域とする tree 状の順序関係であり, 自然な順序と矛盾しない. つまり, $m \prec n$ のときには必ず $m < n$ である.

(ii) 各 M_k, $(k < \alpha)$ は集合論の内部モデルであり, とくに $M_0 = V$ である.

(iii) $\langle \rho_k \mid k+1 < \alpha\rangle$ は順序数の非減少列である.

(iv) $k+1 < \alpha$ であれば, $E_k \in M_k$ であり,

$$M_k \models \text{“}E_k \text{ is an extender.”}$$

となっている.

(v) $k+1 < \alpha$ のとき, $V_{\rho_k} \cap M_k \subseteq \mathrm{support}(E_k)$ である.

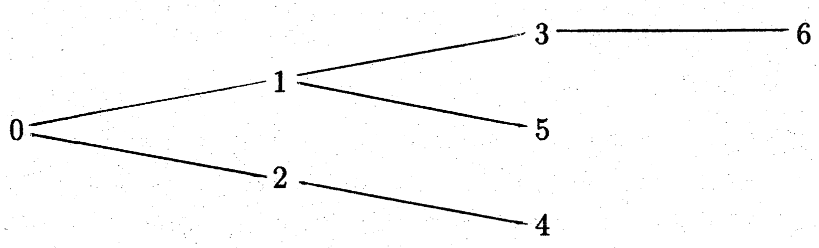
(vi) $k_1 \leq k_2 < \alpha$ のとき, $V_{\rho_{k_1}+1} \cap M_{k_1} = V_{\rho_{k_1}+1} \cap M_{k_2}$ となっている.

(vii) $k+1 < \alpha$ の $\prec$ の意味での直前者を k^* と書けば, $\rho_{k^*} \geq \mathrm{crit}(E_k)$ であり,

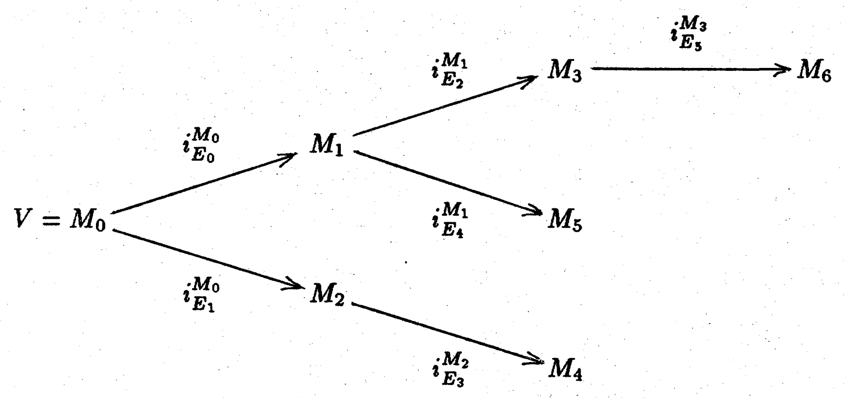
$$M_{k+1} = \mathrm{Ult}(M_{k^*}, E_k)$$

となっている.

Fig. 2.1 に長さ 7 の iteration tree の一例を示す.



(1) the ordering $\prec$



(2) an iteration tree ordered by $\prec$

Fig. 2.1 iteration tree の例

この例において，たとえば $k+1=6$ に対しては $k^*=3$ であり，$M_6 = \mathrm{Ult}(M_3, E_5)$ となる．定義の条件 (vi) により $V_{\rho_3+1} \cap M_3 = V_{\rho_3+1} \cap M_5$, (vii) により $\mathrm{crit}(E_5) \leq \rho_3$ であることに注意.

注意: iteration tree は, ここでは proper class の列を含んだ形の体系として定義されているが, 実際には順序関係 $\prec$ と $\langle E_k \mid k+1<\alpha \rangle$ および $\langle \rho_k \mid k+1<\alpha \rangle$ によって $\langle M_k \mid k<\alpha \rangle$ が決まるので, 本質的には proper class の列に言及することなく定義されているとみてよい. 集合とクラスの区別をきっちりとつける立場からは, iteration tree は $(\prec, \langle E_k \mid k+1<\alpha \rangle, \langle \rho_k \mid k+1<\alpha \rangle)$ という体系のことだと定義すればよい.

<u>補題 2.3.1</u>

V 上の長さ $n+1$ の iteration tree,

$$\mathcal{T} = (\prec, \langle M_k \mid k \le n \rangle, \langle E_k \mid k<n \rangle, \langle \rho_k \mid k<n \rangle)$$

を考える. いま各 extender E_k は ω-closed な support をもつとする. E, ρ, $\tilde{n}$ は次のようなものとする.

(1) $M_n \models$ "E is an extender."

(2) $V_{\rho+1} \cap M_n \subseteq \mathrm{support}(E)$.

(3) $\mathrm{support}(E)$ は ω-closed である.

(4) $\rho \ge \rho_{n-1}$.

(5) $\tilde{n} \le n,\ \rho_{\tilde{n}} \ge \mathrm{crit}(E)$.

このとき, 長さ $n+2$ の iteration tree,

$$\mathcal{T} = (\prec', \langle M_k \mid k \le n+1 \rangle, \langle E_k \mid k<n+1 \rangle, \langle \rho_k \mid k<n+1 \rangle)$$

で次のことを満たすものが一意的に存在する.

(a) $\prec' \restriction n+1 = \prec$.

(b) $\tilde{n}$ は $\prec$ の意味で $n+1$ の直前者である.

(c) $E_n = E$.

(d) $\rho_n = \rho$.

[証明] M_{n+1} として $\mathrm{Ult}(M_{\tilde{n}}, E)$ をとると, すべての support が ω-closed ということからこのモデルは wellfounded である. このことから補題は直ちにしたがう (subsection 2.2 の結果による). [証明終]

注意: 文献[**MS1**]によれば, この補題で各 support が ω-closed という仮定をはずすことができる. その場合の証明は[**MS3**]に掲載される予定である.

tree の分枝 (branch) とは, 包含関係の意味で極大な線型部分集合のことをいう. tree においては initial segment が整列されることから, branch は下向きに閉じている. つまり, ある branch の元に先立つ元は

やはりその branch の元である. また長さが高々 ω の tree では, 相異なる branch は有限個の元のみを共有する.

V 上の長さ ω の iteration tree,

$$\text{(2-10)} \qquad \mathcal{T} = (\prec, \langle M_k \mid n \in \omega \rangle, \langle E_k \mid k \in \omega \rangle, \langle \rho_k \mid k \in \omega \rangle)$$

に対応して, 自然な elementary embedding の系列 $\langle i_{m,n} \mid m \preceq n \in \omega \rangle$ を次のように定義する.

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & i_{k,k} := \mathrm{id} \restriction M_k, \\ \text{(ii)} & i_{k^*,k+1} := i_{E_k}^{M_{k^*}}, \\ \text{(iii)} & i_{k_1,k_3} := i_{k_2,k_3} \circ i_{k_1,k_2}, \qquad \text{if } k_1 \preceq k_2 \preceq k_3. \end{array}$$

この elementary embedding の系列を用いて, $\prec$ の無限長の branch $b \subseteq \omega$ に対応する limit model M_b を

$$M_b := \varinjlim (\langle M_n \mid n \in b \rangle, \langle i_{m,n} \mid m \preceq n \in \omega \rangle)$$

と定義する. M_b がいつ wellfounded になるか, ということは簡単にはわからない. 一つの十分条件は次の補題 2.3.2 で与えられる. それは一つの branch に対応する limit model の wellfoundedness を, 他のすべての branch に対応する limit model を wellfounded でなくすることと引き換えに保証するというものである. 一般に wellfoundedness の保証よりもその否定の保証の方が容易であることに注意すべきである.

<u>補題 2.3.2</u>

$\mathcal{T}$ は (2-10) の形の iteration tree で, 各 E_k が ω-closed な support を有するものとする. $b \subseteq \omega$ は $\prec$ の無限長の branch だとする. もしも次の条件 (#) をみたす順序数の系列 $\langle \xi_n \mid n \in \omega - b \rangle$ が存在すれば, limit model M_b は wellfounded である.

$$(\#) \qquad m \prec n \ \& \ m \notin b \implies i_{m,n}(\xi_m) > \xi_n \qquad (m, n \in \omega)$$

注意: (1) $m \prec n$ かつ $m \notin b$ のときには自動的に $n \notin b$ となる. (2) b' が b と異なる branch であれば, $\langle \xi_n \mid n \in b' - b \rangle$ が $M_{b'}$ の illfoundedness の証人になっている. (3) この補題においても, 各 extender の support が ω-closed という仮定をはずすことができる. これについても[**MS3**]で証明する旨[**MS1**]で予告されている. (4) 以下では, 各 extender の support が ω-closed であるような iteration tree を ω-closed な iteration tree と呼ぶことにする.

§3. Woodin Cardinals

1. 定義およびその他の公理との関係.

この subsection では Woodin cardinal と Shelah, superstrong それに supercompact といった基数の定義とそれらの相互関係について簡単にみていくことにする.

<u>定義 3.1</u>

(1) 基数 κ が λ-supercompact cardinal であるとは, elementary embedding $j : V \to M$ で $\mathrm{crit}(j) = \kappa$, ${}^{\lambda}M \subseteq M$ となるものが存在することである.
(2) 基数 κ が superstrong cardinal であるとは, elementary embedding $j : V \to M$ で $\mathrm{crit}(j) = \kappa$, $V_{j(\kappa)} \subseteq M$ となるものが存在することである.
(3) 基数 κ が Shelah cardinal であるとは, 任意の $f : \kappa \to \kappa$ に対して, elementary embedding $j : V \to M$ で $\mathrm{crit}(j) = \kappa$, $V_{j(f)(\kappa)} \subseteq M$ となるものが存在することである.
(4) 基数 δ が Woodin cardinal であるとは, 任意の $f : \delta \to \delta$ に対して, elementary embedding $j : V \to M$ と $\kappa < \delta$ で, $\mathrm{crit}(j) = \kappa$, $f``\kappa \subseteq \kappa$, $V_{j(f)(\kappa)} \subseteq M$ となるものが存在することである.

これらの概念はいずれも集合論の言語にとって外的な, elementary embedding の概念をもちいて定義されている. supercompact を除く 3 つの概念については extender を用いた内的な定義がある. Woodin cardinal の内的な定義についてはあとで触れる. λ-supercompact の内的な定義 ($\mathcal{P}_{\kappa}\lambda$ 上の κ-complete normal measure の存在) をはじめとする supercompact cardinal の概念についての詳しいことは文献 [**SRK**]を参照して頂きたい.

<u>補題 3.1.1</u>

(1) 基数 κ が superstrong であるための必要十分条件は, extender E で $\mathrm{crit}(E) = \kappa$, かつ $\mathrm{support}(E) = V_{i_E(\kappa)}$ となるものが存在することである.
(2) 基数 κ が Shelah cardinal であるための必要十分条件は, 任意の $f : \kappa \to \kappa$ に対して extender E で $\mathrm{crit}(E) = \kappa$, かつ $V_{i_E(f)(\kappa)} \subseteq \mathrm{support}(E)$ となるものが存在することである.

[証明] (1) 十分条件であることは明らかである. 必要条件であることをいうために κ を superstrong cardinal とし $j : V \to M$ をその証人とする. いま $V_{j(\kappa)} \subseteq M$ であることから, j によって導入された extender で, support として $V_{j(\kappa)}$ をもつものが考えられるので, それを E とする. また $\mathrm{Ult}(V, E)$ の M への自然な elementary embedding を k と書く (補題 2.1.9 を見よ). このとき $k \circ i_E = j$ となる. 補題 2.1.5 により

$$V_{j(\kappa)} = \mathrm{support}(E) \subseteq V_{i_E(\kappa)} \cap \mathrm{Ult}(V, E)$$

であるから $j(\kappa) \leq i_E(\kappa)$ である. 他方 k が elementary embedding であることから

$$j(\kappa) = k(i_E(\kappa)) \geq i_E(\kappa)$$

である．この二つのことから $i_E(\kappa) = j(\kappa)$ であり，したがって

$$V_{i_E(\kappa)} = V_{j(k)} = \mathrm{support}(E) \subseteq \mathrm{Ult}(V, E)$$

となる．そこでこの E が所求の extender である．

(2) こちらの場合も十分条件であることは明らかである．必要条件であることを示そう．$f : \kappa \to \kappa$ が与えられたせよ．elementary embedding $j : V \to M$ を $\mathrm{crit}(j) = \kappa$, $V_{j(f)(\kappa)} \subseteq M$ となるようにとる．j によって導入された，$V_{j(f)(\kappa)}$ を support とする extender を E とすれば，(1) のときと同様にして，$i_E(f)(\kappa) \leq j(f)(\kappa)$ であることがわかる．このことから，

$$V_{i_E(f)(\kappa)} \subseteq V_{j(f)(\kappa)} = \mathrm{support}(E) \subseteq \mathrm{Ult}(V, E)$$

となる．この E が所求のものである． [証明終]

注意: 補題 3.1.1 の (2) において，存在の保証される extender は ω-closed な support をもつようにできる．このことをいうには与えられた f を $(\forall\gamma < \delta)\,[\,f(\gamma) \leq f'(\gamma) \ \ \& \ \ cf(f'(\gamma)) \geq \omega_1\,]$ を満たすような f' に置き換えて考えればよい．

<u>補題 3.1.2</u>

(1) 基数 κ が 2^κ-supercompact であれば，それは superstrong cardinal である．
(2) 基数 κ が superstrong cardinal であれば，それは Shelah cardinal である．
(3) 基数 κ が Shelah cardinal であれば，それは Woodin cardinal である．

注意: 補題 3.1.2 の 3 つの主張は各々の結論に "κ 番目の" という言葉を付け加えてもそのまま成立する．例えば Shelah cardinal は Woodin cardinal であるばかりではなく，その下に unbounded に Woodin cardinal が存在する．詳しいことは[**MS2**]の section 4 を見よ．この補題は本題と直接関係ないので詳しい証明は省くが，付録 2 に (3) の証明を与える．この証明は extender の概念のみやすい応用例になっている．

<u>補題 3.1.3</u>

δ を Woodin cardinal とする．$A \subseteq V_\delta$ が任意に与えられたとする．このとき次のような $\kappa < \delta$ 全体からなる集合は δ で unbounded である．

任意の $\alpha < \delta$ に対して，extender $E \in V_\delta$ を

(1) $\mathrm{crit}(E) = \kappa$.
(2) $V_\alpha \subseteq \mathrm{support}(E)$.
(3) $\mathrm{support}(E)$ は ω-closed である．
(4) $V_\alpha \cap A = V_\alpha \cap i_E(A)$.

という 4 条件を満たすようにとれる．

[証明] そうでなかったとすると，ある $\beta < \delta$ があって，どの $\kappa \geq \beta$ についても上のことは成り立たない．この仮定から矛盾を導くことにする．

各 $\kappa \geq \beta$ に対して反例となる $\alpha < \delta$ を $\alpha \geq \kappa + 3$ となるようにとり，その最小のものを $\alpha(\kappa)$ とかくことにする．$f : \delta \to \delta$ を

$$f(\kappa) := \begin{cases} \beta + 1 & \text{if } \kappa < \beta \\ \alpha(\kappa) + \omega_1 + 1 & \text{if } \kappa \geq \beta \end{cases}$$

と定めよう．δ が Woodin cardinal であることから，elementary embedding $j : V \to M$ で上記の f に関して Woodin cardinal の定義の条件を満たすものをとることができる．つまり，$\mathrm{crit}(j) = \kappa$ とおくと，$f``\kappa \subseteq \kappa$, $V_{j(f)(\kappa)} \subseteq M$ が成立している．$f$ の作り方から，このとき $\kappa > \beta = j(\beta)$, $f(\kappa) = \alpha(\kappa) + \omega_1 + 1$ である．また $j$ が elementary なので $j(f)``j(\kappa) \subseteq j(\kappa)$ となり，$j(\kappa) > \kappa$ なので $j(f)(\kappa) < j(\kappa)$ である．

さて，E を j によって導入された extender で，集合 $V_{j(\alpha)(\kappa)+\omega_1}$ を support にもつものとする．$j(f)(\kappa) = j(\alpha)(\kappa) + \omega_1 + 1$ なので

$$\mathrm{support}(E) = V_{j(\alpha)(\kappa)+\omega_1} \in V_{j(\alpha)(\kappa)+\omega_1+1} \subseteq M$$

である．また常に $f(\gamma) \geq \gamma + 3$ であることから，$j(f)(\kappa) \geq \kappa + 3$, したがって $V_{\kappa+3} \subseteq M$ である．以上のことと補題 2.1.10(補遺 1) により $E \in M$ であることがわかる．

E の support は $V_{j(\alpha)(\kappa)+\omega_1}$ であるから ω-closed である．このとき E は $V_{j(\alpha)(\kappa)+\omega_1} \times V_{\kappa+2}$ の部分集合とみなすことができ，$E \in V_{j(\kappa)}$ であることがわかる．

$k : \mathrm{Ult}(V, E) \to M$ は補題 2.1.9(補遺 1) にみられる自然な elementary embedding だとする．このとき $k \circ i_E = j$ であり，$k \restriction V_{j(\alpha)(\kappa)+\omega_1}$ は identity と一致する．そこで

$$j(A) \cap V_j(\alpha)(\kappa) = k(i_E(A)) \cap V_{j(\alpha)(\kappa)} = i_E(A) \cap V_{j(\alpha)}$$

となる．また $E \in M$ なので $i_E^M(A \cap V_{\kappa+1}) = i_E(A \cap V_{\kappa+1})$ であることもわかる．さらに $j(\alpha)(\kappa)$ は E の support に属するので $j(\alpha)(\kappa) < i_E(\kappa) = i_E^M$ である．以上のことから

$$\begin{aligned} j(A) \cap V_{j(\alpha)(\kappa)} &= i_E(A) \cap V_{j(\alpha)(\kappa)} = i_E(A \cap V_{\kappa+1}) \cap V_{j(\alpha)(\kappa)} \\ &= i_E^M(A \cap V_{\kappa+1}) \cap V_{j(\alpha)(\kappa)} \\ &= i_E^M(A) \cap V_{j(\alpha)(\kappa)}. \end{aligned}$$

また $j(A) \cap V_\kappa = A \cap V_\kappa$ なのでこれを i_E^M で写すと，$i_E^M(j(A)) \cap V_{i_E^M(\kappa)} = i_E^M(A) \cap V_{i_E^M(\kappa)}$ である．このことから，

$$i_E^M(j(A)) \cap V_{j(\alpha)(\kappa)} = i_E^M(A) \cap V_{j(\alpha)(\kappa)} = j(A) \cap V_{j(\alpha)(\kappa)}$$

以上をまとめると次のようになる．

(1*) $E \in M$ で $\mathrm{crit}(E) = \kappa$.
(2*) $V_{j(\alpha)(\kappa)} \subseteq \mathrm{support}(E)$.
(3*) $\mathrm{support}(E)$ は ω-closed である.
(4*) $V_{j(\alpha)(\kappa)} \cap j(A) = V_{j(\alpha)(\kappa)} \cap i_E^M(A)$.

これは M において $j(\alpha)(\kappa)$ が $\kappa > \beta = j(\beta)$ に関する (1) ~ (4) の反例をなすという事実 (j が elementary であることによる) と矛盾する. [証明終]

この補題の主張する Woodin cardinal の性質は Woodin cardinal の定義と同等である. このことは次の補題の証明の系としてわかる.

補題 3.1.4

基数 δ が Woodin cardinal であるための必要十分条件は, 任意の $f : \delta \to \delta$ に対して extender $E \in V_\delta$ で $f``\mathrm{crit}(E) \subseteq \mathrm{crit}(E)$, $V_{i_E(f)(\mathrm{crit}(E))} \subseteq \mathrm{support}(E)$ となるものが存在することである. ここでとくに $\mathrm{support}(E)$ は ω-closed であるようにとれる.

[証明] 必要条件であることだけいえばよい.

すべての $\gamma < \delta$ で $f(\gamma) \geq \gamma$ となっていると仮定してさしつかえない. $A = f = \{\langle \gamma, f(\gamma) \rangle | \gamma < \delta\}$ とし, この A に対して補題 3.1.3 を適用する. そこで存在の保証されるある κ に対して, $\alpha = f(\kappa) + 3$ として (1) ~ (4) を満たす extender $E \in V_\delta$ をとる. このとき, (1) ~ (4) は次のように書ける

(1′) $\mathrm{crit}(E) = \kappa$.
(2′) $V_{f(\kappa)+3} \subseteq \mathrm{support}(E)$.
(3′) $\mathrm{support}(E)$ は ω-closed である.
(4′) $i_E(f) \restriction (\kappa + 3) = f \restriction (\kappa + 3)$.

したがってとくに $f(\kappa) = i_E(f)(\kappa)$ となり,

$$V_{i_E(f)(\kappa)} = V_{f(\kappa)} \subseteq \mathrm{support}(E)$$

が成立する. [証明終]

2. Reflecting cardinal.

集合論の言語 **LST** に集合 A の各要素に対応する定数記号を付け加えた拡大言語を $\mathbf{LST}(A)$ と書くことにする. 以下で考えるのは $\mathbf{LST}(V_\alpha \cup \{\delta\})$ の形の拡大言語であって, ここで $\alpha \leq \delta$, かつ δ は強極限基数であるものとする. $\alpha \geq \omega$ の場合は適当なコード化によって $\mathbf{LST}(V_\alpha \cup \{\delta\}) \subseteq V_\alpha$ となっていると考えることができる.

$\beta > 0$ を順序数とする. 集合 $z \in {}^{<\omega}V_{\delta+\beta}$ の, δ に関する (α, β)-type とは $\mathbf{LST}(V_\alpha \cup \{\delta\})$ の一変数論理式 $\varphi(\mathbf{v})$ であって

$$V_{\delta+\beta} \models \varphi(z)$$

となるもの全体の集合であると定義する. したがって, $\omega \leq \alpha < \alpha' \leq \delta$, $\beta < \beta'$ の場合には

“τ は z の (α,β)-type である.”

という主張は $z^\frown\langle\alpha\rangle$ の (α',β')-type の中にその証人をもつ.

定義 3.2

基数 $\kappa<\delta$ が δ に関して $z\in{}^{<\omega}V_{\delta+\beta}$ において β-reflecting であるとは, 任意の $\alpha<\delta$ に対して $E\in V_\delta$ で次の条件を満たすものがとれるときにいう.

(1) E は extender で, その critical point は κ である.
(2) $V_\alpha\subseteq \mathrm{support}(E)$ である.
(3) $\mathrm{support}(E)$ は ω-closed である.
(4) z の (α,β)-type は $\mathrm{Ult}(V,E)$ での $i_E(z)$ の $(\alpha,i_E(\beta))$-type と同じである.

Woodin cardinal の重要な性質の一つに, その下に多くの reflecting cardinals をもつということが挙げられる. これは実際 Woodin cardinal を特徴づける性質であり, 詳しくは次のように定式化される.

補題 3.2.1

Inaccessible cardinal δ について次の (a)–(c) は同値である.

(a) δ は Woodin cardinal である.
(b) 任意の β と任意の $z\in{}^{<\omega}V_{\delta+\beta}$ について, $\kappa<\delta$ で δ に関して z において β-reflecting なもの全体の集合は δ で unbounded である.
(c) 任意の $z\in{}^{<\omega}V_{\delta+1}$ について, $\kappa<\delta$ で δ に関して z において 1-reflecting なもの全体の集合は δ で unbounded である.

[証明] まず (a)⇒(b) であることをいう. $z\in{}^{<\omega}V_{\delta+\beta}$ とし, A を z の (δ,β)-type とする. この A に補題 3.1.3 を適用すると次のような κ が δ の下に unbounded に存在する.

任意の $\alpha<\delta$ に対して, 次の (1) ~ (4) を満たす extender $E\in V_\delta$ が存在する.

(1) $\mathrm{crit}(E)=\kappa$.
(2) $V_\alpha\subseteq\mathrm{support}(E)$.
(3) $\mathrm{support}(E)$ は ω-closed である.
(4) $A\cap V_\alpha=i_E(A)\cap V_\alpha$.

$E\in V_\delta$ で δ は inaccessible だから $\mathrm{Ult}(V_\delta,E)$ が構成できる. そして $i_E(\delta)$ は $\mathrm{Ord}\cap\mathrm{Ult}(V_\delta,E)$ の 順序型と一致する. ところが $\mathrm{Ult}(V_\delta,E)\subseteq V_\delta$ なので $i_E(\delta)\leq\delta$ である. したがって $i_E(\delta)=\delta$ である. A の作り方から

$$\begin{aligned} i_E(A) &= (i_E(\delta),i_E(\beta))\text{-type of } i_E(z)\\ &= (\delta,i_E(\beta))\text{-type of } i_E(z)\end{aligned}$$

である．上記の (4) はしたがって

$$(\alpha,\beta)\text{-type of } z = (\alpha, i_E(\beta))\text{-type of } i_E(z)$$

ということを意味する．したがって κ は z において δ に関して β-reflecting である．これで (b) が成り立つことが証明された．(b)⇒(c) であることは明らかである．

あと (c)⇒(a) をいえば証明は完了する．$f:\delta\to\delta$ が与えられたとせよ．$\kappa<\delta$ は δ に関して $\langle f\rangle$ において 1-reflecting だとする．$\alpha=\sup(\{f(\xi)\mid\xi\leq\kappa\}\cup\{\kappa+1\})$ とおけば, 1-reflecting という仮定から この α について次のような $E\in V_\delta$ をとることができる．

(1) E は extender で, $\mathrm{crit}(E)=\kappa$ である．
(2) $V_\alpha\subseteq\mathrm{support}(E)$.
(3) $\mathrm{support}(E)$ は ω-closed である．
(4) $\langle f\rangle$ の $(\alpha,1)$-type は $\mathrm{Ult}(V,E)$ での $\langle i_E(f)\rangle$ の $(\alpha,1)$-type と一致する．

$\xi\leq\kappa$ のとき $f(\xi)<\alpha$ なので "$\gamma=f(\xi)$" という主張は $\langle f\rangle$ の $(\alpha,1)$-type の要素を証人にもつ．上記 (4) から同じ要素は $\mathrm{Ult}(V,E)$ において "$\gamma=i_E(f)(\xi)$" の証人になっている．したがって, $\xi\leq\kappa$ のときは $i_E(f)(\xi)=f(\xi)<\alpha$ である．

$\xi<\kappa$ については $i_E(\xi)=\xi$ ゆえ $i_E(f(\xi))=i_E(f)(\xi)=f(\xi)<\alpha\leq i_E(\kappa)$. i_E によりこれを V へ引き戻して $f(\xi)<\kappa$ を得る．したがって $f``\kappa\subseteq\kappa$ であることがわかった．$\xi=\kappa$ の場合は $i_E(f)(\kappa)=f(\kappa)<\alpha$ より

$$V_{i_E(f)(\kappa)}\subseteq V_\alpha\subseteq\mathrm{support}(E)$$

である．以上により δ が Woodin cardinal であることが確かめられた． [証明終]

次の二つの補題は後で embedding normal form を構成する際に用いる technical なものである．ステートメントがこみいっているので注意してほしい．

<u>補題 3.2.2</u>

M, N は 集合論の ω-closed な内部モデル, δ は M の inaccessible cardinal とする．順序数 $\kappa<\delta$, β, β' と集合 $x\in{}^{<\omega}V_{\delta+\beta}\cap M$, $x'\in{}^{<\omega}V_{\delta+\beta'}\cap N$, $E\in V_\delta\cap M$ を次の条件 (i), (ii) を満たすようにとる．

(i) M での x の (κ,β)-type は N での x' の (κ,β')-type と一致する．
(ii) E は M の中では extender になっていて, ある順序数 $\alpha<\delta$ について κ が β-reflecting であることの定義 (3.2) に掲げた条件 (1) ~ (4) を M の中で満たす．

このとき次の (a), (b), (c) が成立する．

(a) $\mathrm{Ult}(N,E)$ は wellfounded である．
(b) $V_\alpha\cap\mathrm{Ult}(N,E)=V_\alpha\cap M$ である．
(c) $\mathrm{Ult}(N,E)$ での $i^N_E(x')$ の $(\alpha,i^N_E(\beta'))$-type は M での x の (α,β)-type と一致する．

注意: 上記のステートメントにおいて (α,β)-type あるいは β-reflecting というとき "δ に関して" という語を省略してある. 以下でも δ には局面ごとにいろいろな付帯条件を付けて考えるが, (α,β)-type とか β-reflecting という言葉はいつでも (その時々の) δ に関するものと思って読んで頂きたい.

[証明] M, N が ω-closed であるので,(a) は (ii) と補題 2.2.1 からすぐわかる. 補題 2.2.2 と (ii) などから

$$V_{i_E^N(\kappa)+1} \cap \mathrm{Ult}(N,E) = V_{i_E^M(\kappa)+1} \cap \mathrm{Ult}(M,E),$$
$$V_\alpha \cap M \subseteq \mathrm{support}(E) \subseteq V_{i_E^M(\kappa)} \cap \mathrm{Ult}(N,E)$$

したがって (b) が成り立つ. 集合の $(\alpha,-)$-type が V_α の部分集合であることから, 同様にして

$$\begin{aligned}&(\alpha, i_E^N(\beta'))\text{-type of } i_E^N(x') \text{ in } \mathrm{Ult}(N,E)\\ =&(\alpha, i_E^M(\beta))\text{-type of } i_E^M(x) \text{ in } \mathrm{Ult}(M,E)\\ =&(\alpha,\beta)\text{-type of } x \text{ in } M\end{aligned}$$

となり (c) が成り立つことがわかる ($\delta = i_E^M(\delta) = i_E^N(\delta)$ となることに注意すること). [証明終]

補題 3.2.3 (One-Step Lemma)

M, N, δ, κ, β, β', ξ, x, x', φ を次のようなものとする.

(i) M, N は集合論の ω-closed な内部モデル.
(ii) δ は M の Woodin cardinal で V の inaccessible cardinal.
(iii) $\kappa < \delta$, $\xi < \beta$.
(iv) $x \in {}^{<\omega}V_{\delta+\xi} \cap M$, $x' \in {}^{<\omega}V_{\delta+\beta'} \cap N$.
(v) φ は集合論の言語 **LST** の 1 変数論理式.

次のことが成り立っているものと仮定する.

(a) $V_{\kappa+1} \cap M = V_{\kappa+1} \cap N$.
(b) M での x の (κ,β)-type は N での x' の (κ,β')-type と一致する.
(c) κ は M の中で δに関して x において β-reflecting である.
(d) $V_{\delta+\beta} \cap M \models \varphi(\xi)$.

このとき任意の $\eta < \delta$, $y \in {}^{<\omega}V_{\kappa+\beta}$ に対してある E, κ^*, ξ^*, y^* が次のようにとれる.

(vi) $E \in V_\delta \cap M$ で E は M の中では extender になっている.
(vii) M で $\mathrm{crit}(E) = \kappa$ が成り立つ.
(viii) $\eta < \kappa^* < \delta$, $\xi^* < i_E^N(\beta')$.

(ix) $y^* \in {}^{<\omega}V_{\delta+i_E^N(\beta')} \cap \mathrm{Ult}(N,E)$.

さらに次のことが成り立つ.

(a*) $V_{\kappa^*+1} \cap \mathrm{Ult}(N,E) = V_{\kappa^*+1} \cap M$.
(b*) $\mathrm{Ult}(N,E)$ での $i_E^N(x')\hat{}\,y^*$ の (κ^*,ξ^*)-type は M での $x\hat{}\,y$ の (κ^*,ξ)-type と一致する.
(c*) κ^* は $\mathrm{Ult}(N,E)$ の中で δ に関して $i_E^N(x')\hat{}\,y^*$ において ξ^*-reflecting である.
(d*) $V_{\delta+i_E^N(\beta')} \cap \mathrm{Ult}(N,E) \models \varphi(\xi^*)$.
(e*) とくに y が順序数の有限列ならば, y^* は $V_{\delta+i_E^N(\beta)} \cap \mathrm{Ult}(N,E)$ の中で $V_{\kappa^*+1} \cap \mathrm{Ult}(N,E)$ の元と δ, $i_E^N(x')$ によって定義可能である.

[証明] δ が M で Woodin cardinal であることから, κ^* を $\eta < \kappa^* < \delta$, かつ M の中で $x\hat{}\,y$ において ξ-reflecting であるようにとれる. また κ は M の中で x において β-reflecting なので 次のように $E \in V_\delta \cap M$ をとれる (定義 3.2 で $\alpha := \kappa^*+1$ とする).

(1) $M \models$ "E is an extender and $\mathrm{crit}(E) = \kappa$".
(2) $V_{\kappa+1} \cap M \subseteq \mathrm{support}(E)$.
(3) $\mathrm{support}(E)$ は ω-closed.
(4) M での x の (κ^*+1,β)-type は $\mathrm{Ult}(M,E)$ での $i_E^M(x)$ の $(\kappa^*+1, i_E^M(\beta))$-type と一致する.

このことと補題 3.2.2 から, (a*) がわかる. また, $\mathrm{Ult}(N,E)$ での $i_E^N(x')$ の $(\kappa^*+1, i_E^N(\beta'))$-type は M での x の (κ^*+1,β)-type に一致することがわかる.
したがっていま τ を M での $x\hat{}\,y$ の (κ^*,ξ)-type とすると

$$
\begin{aligned}
V_{\delta+\beta} \cap M \models (\exists\dot{\xi})(\exists\dot{y})\,[\,&\dot{y} \in {}^{<\omega}V_{\delta+\dot{\xi}} \\
&\&\ \tau = (\kappa^*,\dot{\xi})\text{-type of } x\hat{}\,\dot{y} \text{ relative to } \delta \\
&\&\ \kappa^* \text{ is } \dot{\xi}\text{-reflecting in } x\hat{}\,\dot{y} \text{ relative to } \delta \\
&\&\ \varphi(\dot{\xi})\,]
\end{aligned}
$$

となっている. ここで, $\models$ の右側の式は M での x の (κ^*+1,β)-type に属することになる. 上記 (4) により, 同じ式が $\mathrm{Ult}(N,E)$ での $i_E^N(x')$ の $(\kappa^*+1, i_E^N(\beta))$-type に属する. $V_{\delta+i_E^N(\beta')} \cap \mathrm{Ult}(N,E)$ でそれを解釈すると (式中の $\dot{\xi}$, $\dot{y}$ に対応して) $\xi^* < i_E^N(\beta')$, $y^* \in {}^{<\omega}V_{\delta+i_E^N(\beta')} \cap \mathrm{Ult}(N,E)$ が存在して次のことが成立する.

· τ は $\mathrm{Ult}(N, E)$ での $i_E^N(x')\hat{\ }y^*$ の (κ^*, ξ^*)-type である. ... (b*)
· κ^* は $\mathrm{Ult}(N, E)$ の中で δ に関して $i_E^N(x')\hat{\ }y^*$ において ξ^*-reflecting である. ... (c*)
· $V_{\delta + i_E^N(\beta')} \cap \mathrm{Ult}(N, E) \models \varphi(\xi^*)$. ... (d*)

残る (e*) を保証するために y^* として (辞書式順序の意味で) 可能な最小のものをとることにする. そうすればそれは $V_{\delta + i_E^N(\beta')} \cap \mathrm{Ult}(N, E)$ の中で τ, δ, κ^*, $i_E^N(x')$ によって定義可能である. ここで κ^*, τ は $V_{\kappa^*+1} \cap \mathrm{Ult}(N, E)$ の元なので (e*) が成立する. [証明終]

3. Alternating Chains.

この subsection では特別な iteration tree である alternating chain を定義し, Subsection 2 の One-Step Lemma の応用として Woodin cardinal の存在から alternating chain の存在を導く. 最初に ω の上の順序関係 $\prec$ を次のように定義しよう.

$$m \prec n \iff (m = 0 \ \ \& \ \ n > 0) \vee (n > m \ \ \& \ \ \text{“}n - m \text{ is even”})$$

この順序 $\prec$ に添う (長さ有限または無限の) iteration tree を alternating chain と呼ぶ. このように alternating chain では iteration tree の順序関係 $\prec$ はすでに指定されているので, extender と順序数の列

$$(\langle E_k \mid k + 1 < \nu \rangle, \langle \rho_k \mid k + 1 < \nu \rangle)$$

がしかるべく与えられれば

$$M_0 := V, \quad M_{n+1} := \mathrm{Ult}(M_{n \dot{-} 1}, E_n)$$

とすることにより alternating chain は一意的に定まる (**Fig. 3.1** 参照).

$$\begin{tikzcd}
 & M_1 \arrow[r, "E_2"] & M_3 \arrow[r, "E_4"] & \cdots \\
M_0 \arrow[ur, "E_0"] \arrow[dr, "E_1"'] & & & \\
 & M_2 \arrow[r, "E_3"'] & M_4 \arrow[r, "E_5"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Fig. 3.1 an alternating chain

補題 2.3.2 により, 長さ ω の alternating chain の二つの branch は, いつでも少なくとも一方は wellfounded な limit model を有する. のちに p[T^*] が embedding normal form を持つことの証明に, この事実が利用される.

つぎの補題は長さ有限の alternating chain の存在, 一般に長さ有限の任意の tree 形順序に沿う iteration tree の存在を保証するものである.

補題 3.3.1

Woodin cardinal δ の存在を仮定すると $0 < a < \omega$ なる任意の a と, a 上の任意の tree 形順序 $\prec$ に対して, $\prec$ に沿う, 長さ a の ω-closed な iteration tree

$$\mathcal{T} = (\langle M_k \mid k < a \rangle, \langle E_k \mid k < a \dot{-} 1 \rangle, \langle \rho_k \mid k < a \dot{-} 1 \rangle)$$

が存在する. とくにこの iteration tree に現れる extender の列は V_δ に属するようにとれる.

[証明] $n < a$ なる n に関する帰納法によって証明する. 帰納法の仮定として, 長さ $n+1$ の iteration tree

$$\mathcal{T} \restriction (n+1) = (\langle M_k \mid k \le n \rangle, \langle E_k \mid k < n \rangle, \langle \rho_k \mid k < n \rangle)$$

がすでに与えられているものとする. いま $n+1 = a$ であればこれ以上いうべきことは何もない. 以下 $n+1 < a$ の場合を考えよう.

iteration tree の構成と平行して次の条件を満たす順序数の列 $\kappa_0, \ldots, \kappa_n$ が得られているものとする ($n = 0$ の場合にこれらの条件は自動的に満たされていることに注意).

(イ) $k < n$ のときは $\kappa_k = \rho_{k \dot{-} 1} = \mathrm{crit}(E_k)$.

(ロ) $k < n$ のとき κ_k は M_k の中で δ に関して空集合 ϕ において $(a-k)$-reflecting である.

(ハ) κ_n は M_n の中で δ に関して ϕ において $(a-n)$-reflecting であり, ϕ の M_n の中での $(\kappa_n, a-n)$-type は M_{n^*} の中でのそれと一致する.

以上の仮定のもとで, One-Step Lemma を

$$(3\text{-}1) \qquad \begin{cases} M & \longleftarrow M_n \\ N & \longleftarrow M_{n^*} \\ \kappa,\ \eta & \longleftarrow \kappa_n \\ \beta,\ \beta' & \longleftarrow a-n \\ \xi & \longleftarrow a-n-1 \\ \varphi(v) & \longleftarrow \text{“}\delta + v \text{ is the greatest ordinal”} \\ x,\ x',\ y & \longleftarrow \phi \end{cases}$$

として適用する. その結果として E, κ^*, ξ^*, y^* が得られるが, ここで (3-1) から $\xi^* = a-n-1$, $y^* = \phi$ である. いま

$$M_{n+1} := \mathrm{Ult}(M_{n^*}, E),\ \kappa_{n+1} := \kappa^*,\ E_n := E$$

とおくことにより, One-Step Lemma の結論 (a*)-(c*) は次のように書き換えられる.

[a*] $V_{\kappa_{n+1}+1} \cap M_{n+1} = V_{\kappa_{n+1}+1} \cap M_n$.
[b*] M_{n+1} の中での空集合 ϕ の $(\kappa_{n+1}, a-n-1)$-type は M_n の中でのそれと一致する.
[c*] κ_{n+1} は M_{n+1} の中で δ に関して ϕ において $(a-n-1)$-reflecting である.

したがって $\rho_n := \kappa_{n+1}$ とおくことにより帰納法の仮定は $n+1$ 番目の stage でも保たれる　[証明終]

系

Woodin cardinal δ が存在すれば, 任意の $n < \omega$ につき長さ $2n+1$ の ω-closed な alternating chain が存在する. とくにこの altenating chain は本質的には V_δ の "中に" 存在する.

次の section ではこの系を更に精密化した事実を証明し, Martin-Steel の定理の証明に利用する.

§4. Martin-Steel の定理

4.1. 無限長の alternating chain と embedding normal form.

補題 3.3.1 の方法を長さ ω の alternating chain の存在証明に利用するには,

"κ_k は ϕ において $(n-k-1)$-reflecting"

というところが無限下降列をなす格好になってしまい具合いが悪い. これは One-Step Lemma の (c) と (c*) とにいう β-reflecting と ξ^*-reflecting との間に $\xi^* < i_E^N(\beta')$ という関係があることに原因がある. ここのところをうまくやりくりするために次のようなトリックを使う.

4 つの基数 $\lambda < c_0 < c_1 < c_2$ を次の条件を満たすように取る.

(i) λ, c_0, c_1, c_2 はいずれも強極限基数であって, その cofinality は δ より真に大きい.
(ii) c_0 と c_1 は $V_{\lambda+1}$ の元をパラメータとして, V_{c_2} の中で同じ式を満たす. いいかえれば c_0 と c_1 の $(\lambda+1, c_2)$-type は一致する.

このような 4 つの基数の存在は次のようにして証明できる. まず λ をその cofinality が δ より真に大きい強極限基数の中から任意に選ぶ. 次に c_2 を λ より大きいそのような基数のうち $|V_{\lambda+2}|^+$ 番目のものとする. ${}^{<\omega}(V_{c_2})$ の元の $(\lambda+1, c_2)$-type は本質的には $V_{\lambda+1}$ の部分集合なので高々 $|V_{\lambda+2}|$ 通りしかない. したがって $\lambda+1$ と c_2 の間には cofinality が δ より真に大きい強極限基数で, 同じ $(\lambda+1, c_2)$-type を有するものが無限に多く存在する. c_0, c_1 はそのようなものの中から選べばよい (ここで λ を任意に大きく取れるというのは重要な点である).

こうして得られた c_0, c_1, c_2 は次のような特徴をもつ. (i) もしも $\kappa < \delta$ がある $z \in {}^{<\omega}(V_{\lambda+1})$ において c_0-reflecting であれば, V_{c_2} の中で κ は z において c_0-reflecting であり, したがって V_{c_2} の中で κ は z において c_1-reflecting でもある. (ii) 任意の $\alpha < \delta$ と任意の $z \in {}^{<\omega}(V_{\lambda+1})$ について, z の (α, c_0)-type と (α, c_1)-type は一致する. (iii) λ, c_0, c_1, c_2 はいずれも V_δ に属する extender による超巾の elementary embedding によって不動である.

これを一言で言えば, 以下の議論において無限ループ

$$c_0+1>c_0\simeq c_1>c_0+1>c_0\simeq c_1>\cdots$$

はあたかも順序数の無限下降列のごとくに振舞うということである.

長さ ω の alternating chain を構成するために無限ゲームの手法を用いる. いま $\omega\times\lambda$ 上の tree T と順序数 $\kappa_0<\delta$ が与えられているものとする (δ はあらかじめ固定された inaccessible cardinal だとする). 無限ゲーム $G^T_{\kappa_0}$ は次のように定義される.

先手は $\langle m_k,\eta_k,\alpha_k\rangle$ を, 後手は $\langle E_{2k},\rho_{2k},\eta'_k,\kappa_{2k+1}\rangle$, $\langle E_{2k+1},\rho_{2k+1},\beta_{k+1},\kappa_{2k+2}\rangle$ を, 順次選んでゆく. その際次のルール **R1.–R8.** を常に守らねばならず, 破った時点で負けを宣告される. もしもすべての stage ですべてのルールが守られた場合には後手の判定勝ちとする. (**Fig. 4.1** 参照)

(先手)		(後手)
$\langle m_0,\eta_0,\alpha_0\rangle$		
	$\searrow$	
		$\langle E_0,\rho_0,\eta'_0,\kappa_1\rangle$
		$\downarrow$
		$\langle E_1,\rho_1,\beta_1,\kappa_2\rangle$
	$\swarrow$	
$\langle m_1,\eta_1,\alpha_1\rangle$		
	$\searrow$	
		$\langle E_2,\rho_2,\eta'_1,\kappa_3\rangle$
		$\downarrow$
		$\langle E_3,\rho_3,\beta_2,\kappa_4\rangle$
	$\swarrow$	
	$\vdots$	
$\langle m_k,\eta_k,\alpha_k\rangle$		
	$\searrow$	
		$\langle E_{2k},\rho_{2k},\eta'_k,\kappa_{2k+1}\rangle$
		$\downarrow$
		$\langle E_{2k+1},\rho_{2k+1},\beta_{k+1},\kappa_{2k+2}\rangle$
	$\swarrow$	
	$\vdots$	

Fig. 4.1 the game $G^T_{\kappa_0}$

R1. 各 k につき $E_k \in V_\delta$ であり, $(\langle E_k \mid k<n\rangle, \langle \rho_k \mid k<n\rangle)$ は ω-closed な alternating chain をなす.

この **R1.** が守られている限りにおいて, $M_{k+1} := \mathrm{Ult}(M_{k\dot{-}1}, E_k)$ として $\langle M_k \mid k \le n\rangle$ をつくることができる. ただし $M_0 = V$ だとする. また超巾による M_m の構成にともなう自然な elementary embedding を $i_{m,n}$, ($m<n$, $m=0$ あるいは $n-m$ は偶数) とする.

R2. $\kappa_n = \mathrm{crit}(E_n)$.
R3. $\kappa_{2n} < \alpha_n < \delta$.
R4. $\kappa_{2n+2} > \kappa_{2n+1} > \alpha_n$.
R5. $\beta_0 = c_0$, $\beta_{n+1} < i_{2n,2n+2}(\beta_n)$.
R6. $t_n := \langle\, i_{2k,2n\dot{-}2}(\eta_k) \mid k<n \,\rangle$ とおくとき, $\langle\, \langle\, m_k \mid k \le n \,\rangle,\, t_{n+1} \,\rangle \in i_{0,2n}(T)$.
R7. $u_n := \langle\, i_{2k+1,2n\dot{-}1}(\eta'_k) \mid k<n \,\rangle$ とおくとき, $\langle\, \langle\, m_k \mid k \le n \,\rangle,\, u_{n+1} \,\rangle \in i_{0,2n+1}(T)$.
R8. η'_n は $V_{c_2} \cap M_{2n+1}$ の中で $V_{\kappa_{2n+1}+1} \cap M_{2n+1}$ の元および δ, $i_{0,2n+1}(T)$, c_0 をパラメータとする式によって一意的に定義できる.

無限ゲーム $G^T_{\kappa_0}$ は open ゲームであり, 先手または後手の必勝法が存在する. このゲームの持つ意味としては次のように見ることができる. われわれはこれから $\neg \mathrm{p}[T]$ が embedding normal form を持つことを証明しようとしており, そのためには内部モデルの系列を構成しなければならない. そこで alternating chain の二つの branch のうち, EVEN と呼ばれる $\{\, 2n \mid n \in \omega \,\}$ に沿ったモデルの列をこの目的に充てようというのである. 先手の選ぶ m_k と η_k は T の path を選んでいくものであり, 後手は先手の選ぶ path に対応する alternating chain を作っていく. ルール **R5.** は, この alternating chain の branch EVEN に沿う内部モデル列の limit に順序数の無限下降列が存在するようにするためのものである. ルール **R6.** と **R7.** により, 先手は $\langle\, M_{2n} \mid n \in \omega \,\rangle$ の, 後手は $\langle\, M_{2n+1} \mid n \in \omega \,\rangle$ の中に $\langle\, m_k \mid k \in \omega \,\rangle \in \mathrm{p}[T]$ の証人を作っていくことを強いられる. また **R8.** は後手の選択の自由度を制限するために付け加えられたものである.

ここでまずある特別な場合に後手の必勝法が存在することを示す.

<u>補題 4.1.1</u>

いま δ は Woodin cardinal であるものとする. T を $\omega \times \lambda$ 上の tree とするとき $G^T_{\kappa_0}$ に後手の必勝法が存在するような $\kappa_0 < \delta$ 全体の集合は δ で unbounded である.

[証明] $\kappa_0 < \delta$ を $\langle T\rangle$ において (c_0+1)-reflecting な基数であるものとして, $G^T_{\kappa_0}$ に後手の必勝法があることを証明すればよい (補題 3.2.1 参照). そのために, 各 stage で後手がどのように手を選択すればよいかをまず記述し, 次にそれが必勝法であることを示すという方法を採る.

先手と後手がそれぞれ n 回の選択をして未だ勝敗が決定していないものとする. またここまでの各局面では次の条件が満たされてきていると仮定する.

$(*)_n$ $n>0$ であれば $\kappa_{2n} \le \rho_{2n-1}$.
$(**)_n$ M_{2n} の中での $\langle i_{0,2n}(T)\rangle\hat{\ } i_{2n\dot{-}2,2n}(t_n)$ の (κ_{2n}, β_n+1)-type は $M_{2n\dot{-}1}$ の中での $\langle i_{0,2n\dot{-}1}(T)\rangle\hat{\ } u_n$ の (κ_{2n}, c_0+1)-type と一致する.

$(***)_n$　κ_{2n} は M_{2n} の中で $\langle i_{0,2n\dot{-}1}(T)\rangle^\frown i_{2n\dot{-}2,2n}(t_n)$ において (β_n+1)-reflecting である.

$\beta_0 = c_0$ なので κ_0 のとり方から $(*)_0$, $(**)_0$, $(***)_0$ はいずれも正しい. したがって $(*)_n$, $(**)_n$, $(***)_n$ を (帰納法の) 仮定に付け加えることにはとりあえずなんの不都合もない.

さていま先手が $\langle m_n, \eta_n, \alpha_n \rangle$ という手を打ってきたとする. ここまでに **R1.**–**R8.** が守られていることから, 次のように One-Step Lemma を適用することができる.

$$(4\text{-}1)\qquad \begin{cases} M \longleftarrow M_{2n}, \\ N \longleftarrow M_{2n\dot{-}1}, \\ \kappa \longleftarrow \kappa_{2n}, \\ \eta \longleftarrow \alpha_n, \\ \beta \longleftarrow \beta_n+1, \\ \beta' \longleftarrow c_0+1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi \longleftarrow \beta_n, \\ x \longleftarrow \langle i_{0,2n}(T)\rangle^\frown i_{2n\dot{-}2,2n}(t_n), \\ x' \longleftarrow \langle i_{0,2n\dot{-}1}(T)\rangle^\frown u_n \\ y \longleftarrow \langle \eta_n \rangle, \\ \varphi(v) \longleftarrow \text{“}\delta+v \text{ is the greatest ordinal”} \end{cases}$$

One-Step Lemma の前提 (a) は **R1.** と $(*)_n$ からわかる. また (b), (c) はそれぞれ $(**)_n$, $(***)_n$ そのものである. (d) も明らかに満たされている.

One-Step Lemma によって E, ξ^*, y^* の存在が保証される. ここで c_0 が V_δ に属する extender の超巾で動かされないことから, (d*) によって $\xi^* = c_0$ であることがわかる. One-Step Lamma の (a*) により, $E_{2n} := E$, $\rho_{2n} := \kappa^*$, $M_{2n+1} := \mathrm{Ult}(M_{2n\dot{-}1}, E_{2n})$ とおけばここまでに選択された系列は依然として alternating chain である. 次に (b*) により y^* は長さ 1 の順序数列なのでその唯一の因子を η'_n とする, また $\kappa_{2n+1} := \kappa^*$ とおく. これで後手番の前半の部分が特定された.

$$E_{2n} := E, \quad \rho_{2n} := \kappa^*, \quad \eta'_n := y^*(0), \quad \kappa_{2n+1} := \kappa^* .$$

ここまでの選択で後手がルールを破っていないことを確かめよう. まず上に述べたように系列 $(\langle M_k \mid k \le 2n+1 \rangle, \langle E_k \mid k < 2n+1 \rangle \langle \rho_k \mid k < 2n+1 \rangle)$ が alternating chain をなすことは One-Step Lemma の (a*) と帰納法の仮定 $(*)_n$ によって保証される. したがって後手のこの選択によってはまだ **R1.** は守られている. One-Step Lemma の (vii) から $\mathrm{crit}(E) = \kappa^* = \kappa_{2n+1}$ なので **R2.** も守られている. **R3.** は先手の責任において守られていると仮定している. **R4.** は One-Step Lemma の (viii) によって $\alpha_n = \eta < \kappa^* = \kappa_{2n+1}$ なので守られている.

κ_{2n+1} と ρ_{2n} の選び方と (b*), (c*) から次のことがわかる.

$(*)'_n$　$\kappa_{2n+1} \le \rho_{2n}$.

$(**)'_n$　$\langle i_{0,2n+1}(T) \rangle^\frown u_{n+1}$ の M_{2n+1} の中での (κ_{2n+1}, c_0)-type は, $\langle i_{0,2n}(T) \rangle^\frown t_{n+1}$ の M_{2n} の中での (κ_{2n+1}, β_n)-type と一致する.

$(***)'_n$　κ_{2n+1} は M_{2n+1} の中で $\langle i_{0,2n+1}(T) \rangle^\frown u_{n+1}$ において c_0-reflecting である.

R6., つまり $\langle \langle m_k \mid k \le n \rangle, t_{n+1} \rangle \in i_{0,2n}(T)$ が成立しているという事実は $\langle i_{0,2n}(T) \rangle^\frown t_{n+1}$ の (κ_{2n+1}, β_n)-type の中にその証人をもつ. $(**)'_n$ から同じ証人は $\langle i_{0,2n+1}(T) \rangle^\frown u_{n+1}$ の (κ_{2n+1}, c_0)-type に属し, $\langle \langle m_k \mid k \le n \rangle, u_{n+1} \rangle \in i_{0,2n+1}(T)$ を保証する. これは **R7.** にほかならない.

One-Step Lemma の (e*) により y^* (すなわち $\langle \eta'_n \rangle$) は $V_{c_0+1} \cap M_{2n+1}$ の中で $V_{\kappa_{2n+1}+1} \cap M_{2n+1}$ の元と δ, $\langle i_{0,2n}(T) \rangle$ ^ $i_{2n\dot{-}1,2n+1}(u_n)$ をパラメータとする式によって一意的に定義できる. ここで

$$i_{2n\dot{-}1,2n+1}(u_n) = i_{2n\dot{-}1,2n+1}(\langle i_{2k+1,2n\dot{-}1}(\eta'_k) \mid k < n \rangle) = \langle i_{2k+1,2n+1}(\eta'_k) \mid k < n \rangle$$

であり, $k < n$ のとき各 η'_k はすでに $V_{c_2} \cap M_{2k+1}$ の中で $V_{\kappa_{2n+1}+1} \cap M_{2k+1}$ の元と δ, $i_{0,2k+1}(T)$, c_0 から定義可能であることが, ここまでに **R8.** が守られてきていることによって保証されている. したがって η'_n も $V_{\kappa_{2n+1}+1} \cap M_{2n+1}$ の元と δ, $i_{0,2n+1}(T)$, c_0 をパラメータとする式によって定義可能である. これで **R8.** が守られていることもわかった. 後手番の残りの部分を定めるためにもう一度 One-Step Lemma に訴える. そのため次のことにまず注意しよう.

$(**)''_n$ $\langle i_{0,2n+1}(T) \rangle$ ^ u_{n+1} の M_{2n+1} の中での (κ_{2n+1}, c_1)-type は $\langle i_{0,2n}(T) \rangle$ ^ t_{n+1} の M_{2n} の中での (κ_{2n+1}, β_n)-type と同じである.

$(***)''_n$ κ_{2n+1} は M_{2n+1} の中で $\langle i_{0,2n+1}(T) \rangle$ ^ u_{n+1} において c_1-reflecting である.

これらは $(**)'_n$ と $(***)'_n$ から c_0 を c_1 と書き換えることによって得られる. ここのところでこの subsection の最初に述べたトリックが利用されるわけである. さて今度は次のようにおいて One-Step Lemma を適用する.

$$\text{(4-2)} \qquad \begin{cases} M \longleftarrow M_{2n+1}, \\ N \longleftarrow M_{2n}, \\ \kappa \longleftarrow \kappa_{2n+1}, \\ \eta \longleftarrow \kappa_{2n+1}, \\ \beta \longleftarrow c_1, \\ \beta' \longleftarrow \beta_n, \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi \longleftarrow c_0 + 1, \\ x \longleftarrow \langle i_{0,2n+1}(T) \rangle\hat{\ } u_{n+1}, \\ x' \longleftarrow \langle i_{0,2n}(T) \rangle\hat{\ } t_{n+1}, \\ y \longleftarrow \phi, \\ \varphi(v) \longleftarrow \text{“}v \text{ is a successor ordinal”} \end{cases}$$

One-Step Lemma の前提条件のうち (a) はここまでに **R1.** が守られているのでよい. また (b), (c) はそれぞれ $(**)''_n$ と $(***)''_n$ そのものである. (d) は明らかに成立している. 結果として E, κ^*, ξ^*, y^* が得られる. とくに $y = \phi$ であるから $y^* = \phi$ であり, また (d*) により ξ^* は successor ordinal である. 後手番の選択は

$$E_{2n+1} := E, \quad \rho_{2n+1} := \kappa^*, \quad \beta_{n+1} := \xi^* \dot{-} 1, \quad \kappa_{2n+2} := \kappa^*$$

とすることによって完了する. あとは **R1.**–**R8.** が守られ, 帰納法の仮定 $(*)_{n+1}$, $(**)_{n+1}$, $(***)_{n+1}$ が成立していることを確かめれば補題の証明は終了する.

先ほどと同様 (a*) によって **R1.** が保証される. そこで $M_{2n+2} := \mathrm{Ult}(M_{2n}, E_{2n+1})$ とおけば, (b*), (c*) はそれぞれ $(**)_{n+1}$, $(***)_{n+1}$ そのものである. $(*)_{n+1}$ は $\kappa_{2n+2} = \kappa^* = \rho_{2n}$ なので明らかに成立している. **R2.** は One-Step Lemma の (vii) より $\kappa_{2n+2} = \kappa^* = \mathrm{crit}(E_{2n+1})$ なので守られている. One-Step Lemma の (viii) から $\kappa_{2n+2} = \kappa^* > \eta = \kappa_{2n+1}$ であり **R4.** も守られている. 最後に **R5.** は One-Step Lemma の (viii) により

$$\beta_{n+1} = \xi^* \dot{-} 1 < \xi^* < i_{2n,2n+2}(\beta') = i_{2n,2n+2}(\beta_n)$$

なので守られている. 以上で全てのルール(先手の責任に帰す **R3.** と **R6.** を除く)が守られ, また帰納法の仮定 $(*)_{n+1}$, $(**)_{n+1}$, $(***)_{n+1}$ が成立することが確かめられた. [証明終]

すでに述べたようにこの補題 4.1.1 を用いて, 次の定理 4.1.2 を証明することができる. この定理は次の subsection で証明する Martin-Steel の定理の弱い形である.

定理 4.1.2

基数 δ は Woodin cardinal であるものとする. T が $\omega \times \lambda$ 上の δ^+-homogeneous tree であれば, $\neg \mathrm{p}[T]$ は embedding normal form をもつ.

[証明] 基数 $\kappa_0 < \delta$ を無限ゲーム $G^T_{\kappa_0}$ に後手の必勝法 τ が存在するように選ぶ. そのためには補題 4.1.1 に示したように κ_0 は $\langle T \rangle$ において (c_0+1)-reflecting となるようにとればよい.

証明の方針はつぎのとおり. まず各 $\langle s,t \rangle \in {}^{<\omega}(\omega \times \lambda)$ に対して長さ $2\mathrm{lh}(s)+1$ の alternating chain

$$(\langle M_k(s,t) \mid k \leq 2\mathrm{lh}(s) \rangle, \langle E_k(s,t) \mid k < 2\mathrm{lh}(s) \rangle, \langle \rho_k(s,t) \mid k \leq 2\mathrm{lh}(s) \rangle)$$

を τ を用いて対応させ, T が homogeneous であることを用いてこれらのうちから t に依存しない等質な列

$$(\langle M_k(s) \mid k \leq 2\mathrm{lh}(s) \rangle, \langle E_k(s) \mid k < 2\mathrm{lh}(s) \rangle, \langle \rho_k(s) \mid k \leq 2\mathrm{lh}(s) \rangle)$$

を選ぶ. これらの alternating chain は必勝法 τ を用いて構成されているので整合的な列である. つまり $s_1 \subseteq s_2 \in {}^{<\omega}\omega$, $k < 2\mathrm{lh}(s_1)$ のとき,

$$E_k(s_1) = E_k(s_2), \qquad \rho_k(s_1) = \rho_k(s_2)$$

が成立している. 目的の embedding normal form はこの alternating chain の, branch EVEN に対応する列

$$(\langle M_{2\mathrm{lh}(s)}(s) \mid s \in {}^{<\omega}\omega \rangle, \langle i_{2\mathrm{lh}(s_1),2\mathrm{lh}(s_2)}(s_2) \mid s_1 \subseteq s_2 \in {}^{<\omega}\omega \rangle)$$

として得られる. この系列が実際 embedding normal form をなすことの証人も同時に τ を用いて構成される.

さて, いま $\langle s,t \rangle \in {}^{<\omega}(\omega \times \lambda)$ が与えられたとする. ゲーム $G^T_{\kappa_0}$ において, 次のように対局を進行させてみよう. 後手は必勝法 τ に従い, 先手は $\langle s(0), t(0), \kappa_0 \rangle$ から始めて, 順次, $s(k)$, $(i_{0,2k}(s,t))(t(k))$ および直前に後手によって選択された κ_{2k} を打っていく. ここで $i_{0,2k} = i_{0,2k}(s,t)$ は後手の選択する手によって作られつつある alternating chain における elementary embedding である. さらに $u_k(s,t) := \langle (i_{2\ell+1,2k\dot{-}1}(s,t))(\eta'_\ell(s,t)) \mid \ell < k \rangle$ とおけば, 結果として

$$\text{(4-3)} \qquad \begin{aligned} &\langle E_k(s,t) \mid n < 2m \rangle, \\ &\langle \rho_k(s,t) \mid n < 2m \rangle, \\ &\langle \beta_k(s,t) \mid k \leq m \rangle, \\ &\langle u_k(s,t) \mid k \leq m \rangle, \end{aligned}$$

が得られる (**Fig. 4.2** 参照). ただしここで $m = \mathrm{lh}(s) = \mathrm{lh}(t)$ だとする. これらの列はいずれも V_δ の元であるか, あるいは少なくとも V_{c_2} の中で V_δ の元と δ, c_0, T をパラメータとして定義可能である. そこで, これらの列の選択の可能性は高々 δ とおりしかない (このことを保証するのが $G^T_{\kappa_0}$ のルール **R8.** の目的なのである).

$$
\begin{array}{ccc}
(\text{先手}) & & (\text{後手}) \\
\langle\, s(0), t(0), \kappa_0 \,\rangle & & \\
& \searrow & \\
& & \langle\, E_0, \rho_0, \eta'_0, \kappa_1 \,\rangle \\
& & \downarrow \\
& & \langle\, E_1, \rho_1, \beta_1, \kappa_2 \,\rangle \\
& \swarrow & \\
\langle\, s(1), i_{0,2}(t(1)), \kappa_2 \,\rangle & & \\
& \searrow & \\
& & \langle\, E_2, \rho_2, \eta'_1, \kappa_3 \,\rangle \\
& & \downarrow \\
& & \langle\, E_3, \rho_3, \beta_2, \kappa_4 \,\rangle \\
& \swarrow & \\
& \vdots & \\
\langle\, s(m \dot{-} 1), i_{0,2m \dot{-} 2}(t(m \dot{-} 1)), \kappa_{2m \dot{-} 2} \,\rangle & & \\
& \searrow & \\
& & \langle\, E_{2m \dot{-} 2}, \rho_{2m \dot{-} 2}, \eta'_{m \dot{-} 1}, \kappa_{2m \dot{-} 1} \,\rangle \\
& & \downarrow \\
& & \langle\, E_{2m \dot{-} 1}, \rho_{2m \dot{-} 1}, \beta_m, \kappa_{2m} \,\rangle
\end{array}
$$

Fig. 4.2 $G^T_{\kappa_0}$ を用いた **alternating chain** の構成

いま $\langle \mu_s \mid s \in {}^{<\omega}\omega \rangle$ を T が δ^+-homogeneous tree であることの証人だとすると. 上に述べたことから各 $s \in {}^{<\omega}\omega$ につき次のような $X_s \subseteq T_s$ をとることができる.

(1) $\mu_s(X_s) = 1$ である.

(2) すべての k につき, $E_k(s,t)$, $\rho_k(s,t)$, $u_k(s,t)$, $\beta_k(s,t)$ はそれぞれ, すべての $t \in X_s$ に対して一定値をとる.

ここで measure の列 $\langle \mu_s \mid s \in {}^{<\omega}\omega \rangle$ の整合性から, $s_1 \subseteq s_2$ のとき

(4-4) $$\{ t \restriction \mathrm{lh}(s_1) \mid t \in X_{s_2} \} \subseteq X_{s_1}$$

となっているものと仮定してよい. この (2) にいうその一定値を $M_k(s)$, $\rho_k(s)$, $u_k(s)$, $\beta_k(s)$ と書こう.

系列 (4-3) はすべての s, t につき同一の必勝法 τ によって得られるので, $s_1 \subseteq s_2$, $t_1 \subseteq t_2$ であれば必ず

$$\begin{aligned} E_k(s_1,t_1) &= E_k(s_2,t_2), && \text{for all } k < 2\mathrm{lh}(s_1), \\ u_k(s_1,t_1) &= u_k(s_2,t_2), && \text{for all } k \leq \mathrm{lh}(s_1) \end{aligned}$$

等となっている. これと上に述べた, X_s たちの射影に対する性質 (4-4) から, $s_1 \subseteq s_2$ のとき

$$\begin{aligned} E_k(s_1) &= E_k(s_2), && \text{for all } k < 2\mathrm{lh}(s_1), \\ u_k(s_1) &= u_k(s_2), && \text{for all } k \leq \mathrm{lh}(s_1) \end{aligned} \tag{4-5}$$

等となることがわかる.

内部モデル $M_k(s)$ と elementary embedding

$$i_{k_1,k_2}(s) : M_{k_1}(s) \to M_{k_2}(s),$$
$$\text{ただし } k_1 \leq k_2 \leq 2\mathrm{lh}(s)+1 \text{ で, } k_1 = 0 \text{ であるかまたは } k_2 - k_1 \text{ は偶数}$$

は extender の列 $\langle\, E_k(s) \mid k < 2\mathrm{lh}(s),\ s \in {}^{<\omega}\omega \,\rangle$ から自然な超巾による構成で得られるものだとする. ここでこの系列の偶数部分

$$(\langle\, M_{2\mathrm{lh}(s)}(s) \mid s \in {}^{<\omega}\omega \,\rangle, \langle\, i_{2\mathrm{lh}(s_1),2\mathrm{lh}(s_1)}(s_2) \mid s_1 \subseteq s_2 \in {}^{<\omega}\omega \,\rangle)$$

が $\neg\mathrm{p}[T]$ の embedding normal form をなすことを示せば定理の証明は終わる. そのためには $x \in {}^{\omega}\omega$ について

$$x \in \mathrm{p}[T] \iff M_{\mathrm{EVEN}}(x) \text{ is not wellfounded}$$

となることを証明すればよい. ただし, $M_{\mathrm{EVEN}}(x)$ とは $\langle\, M_{2k}(x \restriction k) \mid k \in \omega \,\rangle$, $\langle\, i_{k,\ell}(x \restriction \ell) \mid k \leq \ell \in \omega \,\rangle$ の帰納極限である.

まず $x \in \mathrm{p}[T]$ と仮定するとある $f : \omega \to \lambda$ で

$$(\forall n \in \omega)\,[\, f \restriction n \in X_{x \restriction n} \,]$$

となる (補題 1.2.1 参照). この $\langle x, f \rangle$ から $G^T_{\kappa_0}$ によって得られる alternating chain を考えると, X_s たちの条件 (2) からそれは

$$(\langle\, M_{2k}(x \restriction (k+1)) \mid k < \omega \,\rangle, \langle\, E_{2k}(x \restriction (k+1)) \mid k < \omega \,\rangle, \langle\, \rho_{2k}(x \restriction (k+1)) \mid k < \omega \,\rangle)$$

である. $G^T_{\kappa_0}$ のルール **R5.** からこのとき

$$\beta_{k+1}(x \restriction (k+1)) < (i_{2k,2k+2}(x \restriction (k+1)))(\beta_k(x \restriction (k+1)))$$

となっている. したがって $\langle \beta_k(x \restriction k) \mid k < \omega \rangle$ が $M_{\mathrm{EVEN}}(x)$ が wellfounded でないことの証人となっている.

つぎに $x \notin \mathrm{p}[T]$ と仮定する. $G^T_{\kappa_0}$ のルール **R7.** により,

$$\langle x \restriction (k+1),\, u_{k+1}(x \restriction (k+1)) \rangle \in (i_{0,2k+1}(x \restriction (k+1)))(T)$$

いいかえれば (以下 $u_k(x \restriction (k+1))$ と x を明示せずにただ u_{k+1} と書くが),

$$u_{k+1} \in i_{0,2k+1}(T(x))$$

である. $T(x)$ は wellfounded tree であるから, この u_{k+1} についてその $i_{0,2k}(T(x)$-rank が定まる. それを γ_k とすると

$$\begin{aligned}
i_{2k+1,2k+3}(\gamma_k) &= i_{0,2k+3}(T(x))\text{-rank of } i_{2k+1,2k+3}(u_{k+1}) \\
&= i_{0,2k+3}(T(x))\text{-rank of } i_{2k+1,2k+3}(\langle i_{2\ell-1,2k+1}(\eta'_\ell) \mid \ell < k \rangle) \\
&= i_{0,2k+3}(T(x))\text{-rank of } \langle i_{2\ell-1,2k+3}(\eta'_\ell) \mid \ell < k \rangle \\
&> i_{0,2k+3}(T(x))\text{-rank of } \langle i_{2\ell-1,2k+3}(\eta'_\ell) \mid \ell < k+1 \rangle \\
&= i_{0,2k+3}(T(x))\text{-rank of } i_{2k+1,2k+3}(u_{k+2}) \\
&= \gamma_{k+1}
\end{aligned}$$

となる. この $\langle \gamma_k \mid k < \omega \rangle$ を補題 2.3.2 の $\langle \xi_n \mid n \in \omega - b \rangle$ と思えば (ここでは b =EVEN), $M_{\mathrm{EVEN}}(x)$ が wellfounded であることは補題 2.3.2 からすぐにわかる. [証明終]

4.2. T^* が homogeneous であることの証明.

前の subsection で構成した alternating chain は subsection 1.4 で定義した T^* が homogeneous tree になることの証明に利用できる. 以下にその方法を述べる. 念のため T^* の定義を再度述べると, T が $\omega \times Z$ 上の homogeneous tree であるものとして,

$$\begin{aligned}
\langle s, t \rangle \in T^* \iff s \in {}^{<\omega}\omega \ \&\ t \in {}^{<\omega}\mathrm{Ord} \ \&\ \mathrm{lh}(s) = \mathrm{lh}(t) \\
\&\ (\forall m, n < \mathrm{lh}(s))\,[\, m < n \implies j_{s\restriction m, s\restriction n}(t(m)) < t(n)\,],
\end{aligned}$$

ただし, $\langle j_{s_1,s_2} \mid s_1 \subseteq s_2 \in {}^{<\omega}\omega \rangle$ は T が homogeneous tree であることの証人として現れる超巾モデルの系列 $\langle \mathrm{Ult}(V, \mu_s) \mid s \in {}^{<\omega}\omega \rangle$ に対応した elementary embedding だとする. subsection 1.4 で述べたように, このとき

$$\mathrm{p}[T^*] = \mathrm{p}[T^* \restriction 2^{|Z|^+}] = \neg\mathrm{p}[T]$$

となる. 定理の証明の際には elementary embedding が他の elementary embedding に作用するという状況を考える必要が出てくる. このことに関連していくらか準備が必要となる. まず, 内部モデルの elementary embedding

$$i : M \to \overline{M} \qquad (x \overset{i}{\mapsto} \bar{x})$$

による proper class $A \subseteq M$ の像 $\overline{A}$ は次の式で定義される.

$$x \in \overline{A} \iff (\exists y \in A)\,[\,x \in \overline{y \cap A}\,]\,.$$

他の elementary embedding に対する i の作用もこの意味で定義する. 例えば V の内部モデル N の N' への elementary embedding

$$j : N \to N'$$

は V 自身の elementary embedding $i : V \to M$ によって

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\ j\ } & N' \\ {\scriptstyle i\restriction N}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i\restriction N'} \\ i(N) & \xrightarrow[i(j)]{} & i(N') \end{array}$$

という状況へと移される. ここで j が例えば measure や extender による超巾の elementary embedding の場合には, $i(j)$ もやはり同種の超巾の elementary embedding になる.

<u>補題 4.2.1</u>

δ は到達不能基数,

$$\mathcal{T} = (\,\prec, \langle\, E_k \mid k < \alpha\dot{-}1\,\rangle, \langle\, \rho_k \mid k < \alpha\dot{-}1\,\rangle\,)$$

は V_δ に属する iteration tree, T は $\omega \times Z$ 上の δ^+-homogeneous tree であるものとする. また measure の列 $\langle\, \mu_s \mid s \in {}^{<\omega}\omega\,\rangle$ を T が δ^+-homogeneous であることの証人とする. さらに, $i_{m,n}$, $(m \preceq n)$ を iteration tree $\mathcal{T}$ に, j_{s_1,s_2}, $(s_1 \subseteq s_2)$ を $\langle\, \mu_s \mid s \in {}^{<\omega}\omega\,\rangle$ にそれぞれ関連して現れる elementary embedding とする. このとき次のことが成り立つ.

(1) $$i_{0,n}(j_{s_1,s_2}) = j_{s_1,s_2} \restriction j_{\phi,s_1}(M_n)\,.$$

(2) $$(j_{\phi,s_1}(i_{m,n})) \restriction \mathrm{Ord} = i_{m,n} \restriction \mathrm{Ord}\,.$$

[証明] (1) iteration tree の順序 $\prec$ に関する帰納法で証明する. $s \in {}^{<\omega}\omega$ が与えられたとせよ. 帰納法の仮定として $k < \ell < \mathrm{lh}(s)$ なる任意の k, ℓ に対して

$$i_{0,m^*}(j_{s\restriction k, s\restriction \ell}) = j_{s\restriction k, s\restriction \ell} \restriction j_{\phi, s\restriction k}(M_{m^*})$$

が成立しているものと仮定する. ここに m^* は $\prec$ の意味での $m+1$ の直前者であるものとする. この仮定のもとで $k+1 < \mathrm{lh}(s)$ なる任意の k について

$$i_{0,m+1}(j_{s\restriction k, s\restriction k+1}) = j_{s\restriction k, s\restriction k+1} \restriction j_{\phi, s\restriction k}(M_{m+1})$$

が成立することを証明すればよい.

記号の煩雑さを避けるために以下では $j_{k,\ell} := j_{s\restriction k, s\restriction \ell}$, $N^k_n := j_{0,k}(M_n)$ とおく.

さていま任意の $u \in N^k_{m+1}$ が与えられたとする. $N^k_{m+1} = (j_{0,k}(i_{0,m^*}))(N^k_{m^*})$ であり, 帰納法の仮定によりこれは $j_{k,k+1}(N^k_{m^*})$ に等しい. そこで u はある関数 F の超積として $u = [\![F]\!]^{N^k_{m^*}}_{a,E_m}$ となる. ここで F は

$$F : {}^{\mathrm{lh}(a)}(V_{\kappa_m}) \cap N^k_{m^*} \to N^k_{m^*}, \quad F \in N^k_{m^*}$$

となっているものとしてよい. また $a \in {}^{<\omega}(\mathrm{support}(E_m))$ であり, $\kappa_m = \mathrm{crit}(E_m)$ だとする. T が δ^+-homogenoous であることから, a, E_m, κ_m, $\mathrm{support}(E_m)$ 等はすべての $j_{k,\ell}$ で固定されていることに注意.

いま β を十分大きくかつすべての $i_{m,n}$ で固定されるように取る. そのためには例えば cofinality が δ より大きい強極限基数をとればよい. そうすれば

$$\begin{aligned}
(i_{0,m+1}(j_{k,k+1}))(u) &= (i_{0,m+1}(j_{k,k+1} \restriction V_\beta^{N^k_{m+1}}))(u) \\
&= (i_{m^*,m+1}(i_{0,m^*}(j_{k,k+1} \restriction V_\beta^{N^k_{m+1}})))(u) \\
&= (i^{N^k_{m^*}}_{E_m}(i_{0,m^*}(j_{k,k+1} \restriction V_\beta^{N^k_{m+1}})))([\![F]\!]^{N^k_{m^*}}_{a,E_m}) \\
&= [\![i_{0,m^*}(j_{k,k+1} \restriction V_\beta^{N^k_{m^*}}) \circ F]\!]^{N^k_{m^*}}_{a,E_m}
\end{aligned}$$

となる. ここで F の定義域が $j_{k,k+1}$ で不変なことから,

$$i_{0,m^*}(j_{k,k+1}) \circ F = (i_{0,m^*}(j_{k,k+1}))(F) = j_{k,k+1}(F)$$

である. この最後の等号は帰納法の仮定による. 以上のことから,

$$(i_{0,m+1}(j_{k,k+1}))(u) = [\![j_{k,k+1}(F)]\!]^{N^k_{m^*}}_{a,E_m}$$

となることがわかった. 他方

$$j_{k,k+1}(u) = j_{k,k+1}([\![F]\!]^{N^k_{m^*}}_{a,E_m}) = [\![j_{k,k+1}(F)]\!]^{j_{k,k+1}(N^k_{m^*})}_{a,E_m} = [\![j_{k,k+1}(F)]\!]^{N^{k+1}_{m^*}}_{a,E_m}$$

であるから, $(i_{0,m+1}(j_{k,k+1}))(u) = j_{k,k+1}(u)$ を証明するにはあと次の claim を証明すればよい.

<u>Claim.</u> ${}^{\mathrm{lh}(a)}(V_{\kappa_m})$ から $N^{k+1}_{m^*}$ への関数全体のクラスは, $N^k_{m^*}$ で考えても $N^{k+1}_{m^*}$ で考えても同じである. いいかえれば,

$$F : {}^{\mathrm{lh}(a)}(V_{\kappa_m}) \cap N^{k+1}_{m^*} \to N^{k+1}_{m^*}, F \in N^k_{m^*} \implies F \in N^{k+1}_{m^*}.$$

以下, この claim の証明 : 各 μ_s が δ^+-complete なので次のことが成立する.

$$(\forall F, c)\,[\, c < \delta \ \&\ F : c \to j_{0,k+1}(V) \ \&\ F \in j_{0,k}(V) \implies F \in j_{0,k+1}(V)\,].$$

この事実を i_{0,m^*} で移行させると次のようになる.

$$(\forall F, c)\,[\,c < \delta \ \ \& \ \ F : V_c \cap (i_{0,m^*}(j_{0,k+1}))(V) \to (i_{0,m^*}(j_{0,k+1}))(V) \\ \& \ \ F \in (i_{0,m^*}(j_{0,k}))(V) \\ \Longrightarrow \ F \in (i_{0,m^*}(j_{0,k+1}))(V)\,]\,.$$

帰納法の仮定により, $i_{0,m^*}(j_{0,k}) = j_{0,k} \restriction M_{m^*}$ かつ $i_{0,m^*}(j_{0,k+1}) = j_{0,k+1} \restriction M_{m^*}$ となる. また $i_{0,m^*}(V) = M_{m^*}$ であるから,

$$(\forall F, c)\,[\,c < \delta \ \ \& \ \ F : V_c \cap j_{0,k+1}(M^*_m) \to j_{0,k+1}(M_{m^*}) \ \ \& \ \ F \in j_{0,k}(M_{m^*}) \\ \Longrightarrow \ F \in j_{0,k+1}(M_{m^*})\,]$$

さらに $j_{0,k}(M_{m^*}) = N^k_{m^*}$, $j_{0,k+1}(M_{m^*}) = N^{k+1}_{m^*}$ ということから結局次のことが成立する.

$$(\forall F, c)\,[\,c < \delta \ \ \& \ \ F : V_c \cap N^{k+1}_{m^*} \to N^{k+1}_{m^*} \ \ \& \ \ F \in N^k_{m^*} \ \Longrightarrow \ F \in N^{k+1}_{m^*}\,]$$

所要の claim はここで $c \leftarrow \kappa_m$ とすることにより得られる. 以上で (1) の証明は完了した.

(2) ここでも (1) と同様の略記法を用いることにすると, (2) を証明するには

$$j_{0,k}(i_{m^*,m+1}) \restriction \mathrm{Ord} = i_{m^*,m+1} \restriction \mathrm{Ord}$$

ということがいえればよい. そのためにまず V で成立している事実

$${}^{\delta}\mathrm{Ord} \subseteq j_{0,k}(V)$$

に注目し, これを i_{0,m^*} によって M_{m^*} に移行させて,

$${}^{\delta}\mathrm{Ord} \cap M_{m^*} \subseteq (i_{0,m^*}(j_{0,k}))(M_{m^*}) = N^k_{m^*}\,.$$

ここでの等式は (1) の証明の中で保証されるものである. このことから,

$${}^{({}^{<\omega}(\mathrm{support}(E_m)))}\mathrm{Ord} \cap M_{m^*} \subseteq N^k_{m^*}$$

であり,

$$j_{0,k}(i_{m^*,m+1}) \restriction \mathrm{Ord} = i^{N^k_{m^*}}_{E_m} \restriction \mathrm{Ord} = i^{M_{m^*}}_{E_m} \restriction \mathrm{Ord} = i_{m^*,m+1} \restriction \mathrm{Ord}$$

がしたがう. [証明終]

定理 4.2.2 (補集合に関する Martin-Steel の定理)

δ は Woodin cardinal, T は $\omega \times Z$ 上の δ^+-homogeneous tree であるものとする．このとき T^* は任意の $\alpha < \delta$ について α-homogeneous である．

[証明] 定理 4.1.2 と同様に，$G^T_{\kappa_0}$ に後手の必勝法が存在するような $\kappa_0 < \delta$ を選ぶことから始める．補題 4.1.1 にいうように，そのような κ_0 は δ の下に unbounded に存在している．そこで T^* が κ_0-homogeneous tree になることを証明すれば十分である．

次に T^* が homogeneous tree であることを証拠立てる measure の列を定義する．前の subsection のとおりに $M_k(s,t)$, $\rho_k(s,t)$, $\beta_k(s,t)$, $u_k(s,t)$ が与えられ，それらのうちの等質な部分 $M_k(s)$, $\rho_k(s)$, $u_k(s)$ がある $X_s \subseteq T_s$ 上の値として得られているものとする．各 $s \in {}^{<\omega}\omega$ と $k < \mathrm{lh}(s)$ に対して順序数 $e_k(s)$ を次の式で定義する．

$$e_k(s) := [\![\langle \beta_k(s \restriction k, t) \mid t \in T_{s\restriction k} \rangle]\!]_{\mu_{s\restriction k}} .$$

この e_k により目的の measure ν_s は次のように定義される．

$$\nu_s(X) = 1 \iff \langle (i_{2k,2\mathrm{lh}(s)}(s))(e_k(s)) \mid k < \mathrm{lh}(s) \rangle \in (i_{0,2\mathrm{lh}(s)}(s))(X) . \tag{4-5}$$

この ν_s の定義はすでに subsection 1.3 で触れた方法によるものである．ただし subsection 1.3 では ω に沿って measure の列を作ったのに対し，ここで定義されたものは ${}^{<\omega}\omega$ に沿う measure の列になっている．この $\langle \nu_s \mid s \in {}^{<\omega}\omega \rangle$ が T^* の κ_0-homogeneous であることの証人になるということを確かめよう．定理 4.1.2 の証明の中で述べたように

$$\mathrm{crit}(E_k(s,t)) = \kappa_k = \rho_k(s,t), \qquad \text{if } k \le 2\mathrm{lh}(s).$$

となっており，$\langle \rho_k(s,t) \mid k \le 2\mathrm{lh}(s) \rangle$ は非減少列である．このことから，

$$\mathrm{crit}(i_{2m,2n}) \ge \rho_0(s,t) = \kappa_0, \qquad \text{if } m < n < \mathrm{lh}(s)$$

である．このとき $\nu_{s\restriction k}$, $(k \le \mathrm{lh}(s))$ はすべて κ_0-complete な measure である．ゆえにすべての ν_s は κ_0-complete な measure である．また $\ell < \mathrm{lh}(s)$ のとき (以下，例によって s を明示することを避けるが),

$$\begin{aligned}
\nu_{s\restriction \ell}(X) = 1 &\iff \langle i_{2k,2\ell}(e_k) \mid k < \ell \rangle \in i_{0,2\ell}(X) \\
&\iff i_{2\ell,2\mathrm{lh}(s)}(\langle i_{2k,2\ell}(e_k) \mid k < \ell \rangle) \in i_{2\ell,2\mathrm{lh}(s)}(i_{0,2\ell}(X)) \\
&\iff \langle i_{2k,2\mathrm{lh}(s)}(e_k) \mid k < \ell \rangle \in i_{0,2\mathrm{lh}(s)}(X) \\
&\iff \langle i_{2k,2\mathrm{lh}(s)}(e_k) \mid k < \mathrm{lh}(s) \rangle \restriction \ell \in i_{0,2\mathrm{lh}(s)}(X) \\
&\iff \langle i_{2k,2\mathrm{lh}(s)}(e_k) \mid k < \mathrm{lh}(s) \rangle \in i_{0,2\mathrm{lh}(s)}(\{ z \mid z \restriction \ell \in X \}) \\
&\iff \nu_s(\{ z \mid z \restriction \ell \in X \}) = 1
\end{aligned}$$

となるので, 系列 $\langle \nu_s \mid s \in {}^{<\omega}\omega \rangle$ は整合的である. 超巾 $\mathrm{Ult}(V, \nu_s)$ の元 $[\![F]\!]_{\nu_s}$ に対して

$$\pi_s([\![F]\!]_{\nu_s}) := i_{0,2\mathrm{lh}(s)}(F)(\langle i_{2k,2\mathrm{lh}(s)}(e_k) \mid k < \mathrm{lh}(s) \rangle)$$

と定義すると, subsection1.3 で述べたようにこれは $\mathrm{Ult}(V, \nu_s)$ の $M_{2\mathrm{lh}(s)}$ への elementary embedding であり, 任意の $x \in {}^{\omega}\omega$ につき次の図は可換である.

(4-6)
$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \xrightarrow{j_{k-1,k}} & \mathrm{Ult}(V, \nu_{x\restriction k}) & \xrightarrow{j_{k,k+1}} & \mathrm{Ult}(V, \nu_{x\restriction (k+1)}) & \xrightarrow{j_{k+1,k+2}} & \cdots \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_{x\restriction k}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_{x\restriction (k+1)}} & & \\
\cdots & \xrightarrow[i_{2k-2,2k}]{} & M_{2k} & \xrightarrow[i_{2k,2k+2}]{} & M_{2k+2} & \xrightarrow[i_{2k+2,2k+4}]{} & \cdots
\end{array}$$

このことから, 両系列の帰納極限のあいだには elementary embedding

$$\pi_\infty : \mathrm{Ult}(V, \langle \nu_{x\restriction k} \mid k < \omega \rangle) \to M_{\mathrm{EVEN}}(x)$$

の存在することがわかる. 定理 4.1.2 により

$$x \in \mathrm{p}[T^*] \iff x \notin \mathrm{p}[T] \iff M_{\mathrm{EVEN}}(x) \text{ is wellfounded}$$

であるから,

$$x \in \mathrm{p}[T^*] \implies \mathrm{Ult}(V, \langle \nu_{x\restriction k} \mid k < \omega \rangle) \text{ is wellfounded}$$

が成立する. そこであとは各 $s \in {}^{<\omega}\omega$ について $\nu_s(T^*{}_s) = 1$ となることを言えばよい.

ν_s の定義に従えば,

$$\nu_s(T^*{}_s) = 1 \iff \langle i_{2k,2\mathrm{lh}(s)}(e_k) \mid k < \mathrm{lh}(s) \rangle \in i_{0,2\mathrm{lh}(s)}(T^*{}_s)$$

であるが, T^* の定義によりこれはさらに

$$i_{2\ell,2\mathrm{lh}(s)}(e_\ell) < (i_{0,2\mathrm{lh}(s)}(j_{k,\ell}))(i_{2k,2\mathrm{lh}(s)}(e_k)), \text{ if } k < \ell < \mathrm{lh}(s)$$

ということである. したがって特に $k+1 < \mathrm{lh}(s)$ なる k について

$$i_{2k+2,2\mathrm{lh}(s)}(e_{k+1}) < (i_{0,2\mathrm{lh}(s)}(j_{k,k+1}))(i_{2k,2\mathrm{lh}(s)}(e_k)),$$

であることを示せばよい. この式の elementary embedding $i_{2k+2,\mathrm{lh}(s)}$ に関する “逆像” を考えると, それは

$$e_{k+1} < (i_{0,2k+2}(j_{k,k+1}))(i_{2k,2k+2}(e_k)),$$

であり, 補題 4.2.1 によってこれは

(4-7) $$e_{k+1} < j_{k,k+1}(i_{2k,2k+2}(e_k))$$

ということにほかならない. そこで, 任意の k についてこの式が成立することを証明すれば定理の証明は完了する. ルール **R5.** により, 各 $\mu_{s\restriction(k+1)}$-ほとんどすべての t について,

$$\beta_{k+1}(s\restriction(k+1),t) < i_{2k,2k+2}(\beta_k(s\restriction k, t\restriction k))$$

である. したがって $\mu_{s\restriction(k+1)}$ による超巾をおこなって

(4-8) $$e_{k+1} < [\![\langle\, i_{2k,2k+2}(\beta_k(s\restriction k, t\restriction k)) \mid t \in T_{s\restriction(k+1)} \,\rangle]\!]_{\mu_{s\restriction(k+1)}}$$

ここで $\mu_{s\restriction k}$ が $\mu_{s\restriction(k+1)}$ の射影であることから, この右辺は

$$j_{k,k+1}\left([\![\langle\, i_{2k,2k+2}(\beta_k(s\restriction k,t)) \mid t \in T_{s\restriction k} \,\rangle]\!]_{\mu_{s\restriction k}}\right)$$

に等しく, またそれは 超積を評価すれば

$$j_{k,k+1}\left((j_{0,k}(i_{2k,2k+2}))(e_k)\right)$$

に等しい. 補題 4.2.1 の (2) より,

$$j_{0,k}(i_{2k,2k+2})\restriction \mathrm{Ord} = i_{2k,2k+2}\restriction \mathrm{Ord}$$

なので結局 (4-8) の右辺は $j_{k,k+1}(i_{2k,2k+2}(e_k))$ である. これで (4-7) が示され, 定理は証明された. [証明終]

4.3. $\tilde{T}$ の場合.

Projective Determinacy に関する定理 (subsection 1.4. 参照) を得るためには, 前の subsection で証明した T^* に関する定理 4.2.2. と同様の事実を $\tilde{T}$ に対して確立しなくてはならない. $\tilde{T}$ とは (subsection 1.4. で定義したとおり) 次のようなものである. いま T を $(\omega\times\omega)\times Z$ 上の homogeneous tree であるものとして,

$$\begin{aligned}\langle s,t\rangle \in \tilde{T} \iff\ & s\in {}^{<\omega}\omega \ \&\ t \in {}^{<\omega}\mathrm{Ord} \ \&\ \mathrm{lh}(s)=\mathrm{lh}(t)\\ & \&\ (\forall m,n<\mathrm{lh}(s))\,[\,(m<n \ \&\ r_m \subsetneq r_n)\\ & \qquad \Longrightarrow j_{\langle s\restriction \mathrm{lh}(r_m),r_m\rangle,\langle s\restriction \mathrm{lh}(r_n),r_n\rangle}(t(m)) > t(n)\,]\end{aligned}$$

ここで, $\langle\, r_n \mid n\in\omega \,\rangle$ は ${}^{<\omega}\omega$ の適当な番号付けであり, $j_{\langle s_1,r_1\rangle,\langle s_2,r_2\rangle}$ は T が homogeneous tree であることの証人となる measure の列 $\langle\, \mu_{\langle s,r\rangle} \mid \langle s,r\rangle \in {}^{<\omega}(\omega\times\omega) \,\rangle$ による超巾に関連した elementary embedding であるものとする. このとき

$$\mathrm{p}[\tilde{T}] = \mathrm{p}[\tilde{T}\restriction 2^{|Z|^+}] = \{\, x \mid (\forall y)[\,\langle x,y\rangle \notin \mathrm{p}[T]\,]\,\} = \neg\exists^{\mathbb{R}}(\mathrm{p}[T])$$

となる.

以下 $Z = \lambda$ とし, $\mu_{\langle s,r\rangle}$ はすべての $\langle s, r\rangle$ について δ^+-complete であるものとする (δ と λ は今までどおり). 任意の $\alpha < \delta$ について $\tilde{T}$ が α-homogeneous tree となることを証明するために, T^* に関するここまでの議論を少し変形して $\tilde{T}$ に対して適用する.

たとえば, $\mathrm{p}[T^*]$ が embedding normal form をもつことを証明する際には alternating chain が用いられたが, 今度は次の順序 $\prec$ に沿った iteration tree を用いることになる (いわゆる dovetail chain).

$$
\begin{aligned}
m \prec n \iff m < n \ \&\ [&m = 0 \\
&\vee (\exists m', n')\,(m = 2m' \ \&\ n = 2n') \\
&\vee (\exists m', n')\,(m = 2m' + 1 \ \&\ n = 2n' + 1 \ \&\ r_{m'} \subsetneq r_{n'})]
\end{aligned}
$$

この順序 $\prec$ は各 $y \in {}^\omega\omega$ に対応する branch

$$b_y = \{\, 2m + 1 \mid r_m \subseteq y \,\} \cup \{0\}$$

と, 一つの特別な branch

$$\mathrm{EVEN} = \{\, 2n \mid n \in \omega \,\}$$

とを持つ. この順序に沿って iteration tree

(4-9) $(\prec \restriction 2\mathrm{lh}(s) + 1, \langle\, M_k(s) \mid k \leq 2\mathrm{lh}(s) \,\rangle, \langle\, E_k(s) \mid k < 2\mathrm{lh}(s) \,\rangle, \langle\, \rho_k(s) \mid k < 2\mathrm{lh}(s) \,\rangle)$

を以前と同様のいわば "連続な" 仕方で構成しようというわけである.

さて $\kappa_0 < \delta$ は今までと同じく $\langle T\rangle$ において $(c_0 + 1)$-reflecting な基数だとする. iteration tree の構成は以前の無限ゲーム $G^T_{\kappa_0}$ と類似した次のルールにのっとって行われる.

- $\widetilde{\mathbf{R}}\mathbf{1.}$ $(\prec \restriction 2n + 1, \langle\, M_k(s,t) \mid k \leq 2n \,\rangle, \langle\, E_k(s,t) \mid k < 2n \,\rangle, \langle\, \rho_k(s,t) \mid k < 2n \,\rangle)$ は長さ $2n + 1$ の iteration tree をなす.
- $\widetilde{\mathbf{R}}\mathbf{2.}$ $\rho_k(s,t) \geq \kappa_k = \mathrm{crit}(E_k(s,t))$, $(k < 2n)$ が成立する.
- $\widetilde{\mathbf{R}}\mathbf{3.}$ $\rho_k(s,t)$ は $k \leq 2n$ に関して単調増大列をなす.
- $\widetilde{\mathbf{R}}\mathbf{4.}$ $\mathrm{crit}(E_k(s,t))$ は $k \leq 2n$ に関して単調増大列をなす.
- $\widetilde{\mathbf{R}}\mathbf{5.}$ $\beta_0(s,t) = c_0$ であり, $k < n$ のとき $\beta_{k+1}(s,t) < (i_{2k,2k+2}(s,t))(\beta_k(s,t))$ が成立する.
- $\widetilde{\mathbf{R}}\mathbf{6.}$ 省略.
- $\widetilde{\mathbf{R}}\mathbf{7.}$ $\ell := \mathrm{lh}(r_n)$ とし $k \leq \ell$ について $r_n \restriction k$ の番号を m_k と表す. このとき, $u_n(s,t) := \langle\, i_{2m_{k+1} \dot{-} 1, 2n \dot{-} 1}(\eta'_{m_{k+1}}) \mid k < \ell \rangle$ とおけば, $\langle \langle\, s \restriction \ell, r_n \,\rangle, u_n(s,t) \rangle \in i_{0,2\ell \dot{-} 1}(T)$ が成り立つ.
- $\widetilde{\mathbf{R}}\mathbf{8.}$ η'_n は $V_{c_2} \cap M_{2n \dot{-} 1}$ の中で $V_{\rho_{2n \dot{-} 1}+1} \cap M_{2n \dot{-} 1}$ の元および δ, $(i_{0,2n \dot{-} 1}(s,t))(T)$, c_0 をパラメータとする式によって一意的に定義できる.

ここで M_m や i_{m_1,m_2} は $\widetilde{\mathbf{R}}\mathbf{1.}$ で保証される iteration tree に関連して現れるものであるとする. これらはもちろん s と t に依存するがここではそれを明示していない.

証明のもっとも重要なポイントは κ_0 が $\langle T\rangle$ において (c_0+1)-reflecting であれば, 任意の $\langle s,t\rangle \in {}^{<\omega}(\omega\times\lambda)$ について, $\prec$ に沿う iteration tree を各 $n\le \mathrm{lh}(s)$ で上記のルール $\widetilde{\mathbf{R}}\mathbf{1.}$–$\widetilde{\mathbf{R}}\mathbf{8.}$ が守られているように対応させせることができる, という点である. この事実の証明は本質的には補題 4.1.1 の証明と同様であり, いくらかの補助的な考察を必要とするので省略する. 注意すべきは $E_k(s,t)$, $\rho_k(s,t)$, $\eta'_k(s,t)$, $\beta_k(s,t)$ はいずれも $\langle\, s\restriction k, t\restriction k\,\rangle$ のみに依存するという点である. このことも, 構成がゲームの形式を取っていることから納得されよう.

目的の iteration tree(4-9) は次のようにして得られる. いま T が δ^+-homogeneous であり, ルール $\widetilde{\mathbf{R}}\mathbf{8.}$ によって各 stage での選択の幅が高々 δ とおりに限られていることから各 $s\in{}^{<\omega}\omega$ につき次のような X_s が存在する (定理 4.1.2 における議論を参照).

(1) X_s は ${}^{\mathrm{lh}(r_\ell)}\lambda$ の部分集合で, $\mu_{\langle s\restriction \ell, r_\ell\rangle}(X_s)=1$ である. ただしここで $\ell=\mathrm{lh}(s)$ であるものとする.

(2) すべての k につき, $E_k(s,t)$, $\rho_k(s,t)$, $\eta'_k(s,t)$, $\beta_k(s,t)$ は $t\in X_s$ によらず一定の値をとる.

そこで (4-9) にあらわれる $E_k(s)$, $\rho_k(s)$, $\eta'_k(s)$ として, (2) の意味での一定値を採用することにすればよい. このとり方から, $M_k(s)$, $E_k(s)$, $\rho_k(s)$, $u_k(s)$ などは $s\restriction k$ のみに依存する.

補題 4.3.1

$\mathrm{p}[\tilde{T}]$ すなわち $\neg\exists^{\mathbb{R}}(\mathrm{p}[T])$ は embedding normal form をもつ.

[証明] 定理 4.1.2 と同様, 目的の embedding normal form は上に述べた手順で構成された

$$(4\text{-}10)\qquad (\langle\, M_{2n}(x\restriction n)\mid n\in\omega\,\rangle, \langle\, i_{2m,2n}(x\restriction n)\mid m\le n\in\omega\,\rangle)$$

である. これが実際 $\neg\exists^{\mathbb{R}}(\mathrm{p}[T])$ の embedding normal form になっていることを証明する.

まず $(\exists y)\,[\,\langle x,y\rangle\in \mathrm{p}[T]\,]$ であったと仮定しよう. そのような $y\in{}^\omega\omega$ をひとつ固定し, $y\restriction k$ の番号を m_k と書くことにする. T は homogeneous なので, ある $f:\omega\to\lambda$ があって

$$f\restriction k\in X_{x\restriction m_k},\qquad \text{for all } k\in\omega$$

となっている. このとき $\widetilde{\mathbf{R}}\mathbf{5.}$ よりすべての $k\in\omega$ につき

$$\begin{aligned}
&\beta_{k+1}(x\restriction(k+1))\\
&=\beta_{k+1}(x\restriction(k+1), f\restriction(k+1)) < \big(i_{2k,2k+2}(x\restriction(k+1))\big)\,(\beta_k(x\restriction(k+1), f\restriction(k+1)))\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \big(i_{2k,2k+2}(x\restriction(k+1))\big)\,(\beta_k(x\restriction k))
\end{aligned}$$

である. したがって $\langle\, \beta_k(x\restriction k)\mid k\in\omega\,\rangle$ は $M_{\mathrm{EVEN}}(x)$ すなわち $\langle\, M_{2k}(x\restriction k)\mid k\in\omega\rangle$, $\langle\, i_{2m,2n}(x\restriction n)\mid m\le n\in\omega\,\rangle$ の帰納極限が wellfounded でないことの証人となる. したがって

$$(\exists y)[\,\langle x,y\rangle\in T\,] \implies M_{\mathrm{EVEN}}(x) \text{ is not wellfounded}$$

が成立する.

次に $(\forall y)[\langle x,y\rangle \notin \mathrm{p}[T]]$ と仮定する. このとき $T(x)$ は $\omega\times\lambda$ 上の wellfounded tree になっている. そこで, 各 y につき,

$$\gamma_k^y := \Big(((i_{0,2m_k\dot{-}1}(x\restriction m_k))(T(x))\Big)\text{-rank of }\langle\, y\restriction k,\ u_k(x\restriction m_k)\,\rangle$$

と定義する. $\widetilde{\mathbf{R}}\mathbf{7}$. によって γ_k^y はすべての y, k について定義できる. またその値は $y\restriction k$ のみに依存する. 作り方から

$$(i_{2m_k\dot{-}1,2m_{k+1}\dot{-}1}(x\restriction m_{k+1}))(u_k(x\restriction m_k))\subseteq u_{k+1}(x\restriction(k+1))$$

であるから,

$$\gamma_{k+1}^y < (i_{2m_k\dot{-}1,2m_{k+1}\dot{-}1}(x\restriction m_{k+1}))(\gamma_k^y)$$

である. そこで $\xi_{2n\dot{-}1}:=\gamma_{\mathrm{lh}(r_n)}^{r_n}$ として補題 2.3.2 を適用すれば $M_{\mathrm{EVEN}}(x)$ が wellfounded であることがわかる (ここで $\gamma_{\mathrm{lh}(r_n)}^{r_n}$ と書いたがこれは $y'\restriction k=r_n$ となる任意の y' に関する $\gamma_k^{y'}$ という意味である). そこで

$$(\forall y)[\langle x,y\rangle\notin T\,] \implies M_{\mathrm{EVEN}}(x)\text{ is wellfounded}$$

が成立する. 以上で (4-10) が $\neg\exists^{\mathbb{R}}(\mathrm{p}[T])$ の embedding normal form であることが証明された. [証明終]

<u>定理 4.3.2(演算 $\neg\exists^{\mathbb{R}}$ に関する Martin-Steel の定理)</u>

任意の $\alpha<\delta$ について $\tilde{T}$ は α-homogeneous tree である.

[証明] 定理 4.2.2 の証明と同様に, 今度は

$$e_k(s):=[\![\,\langle\,\beta_k(s\restriction\mathrm{lh}(r_k),t)\mid t\in T_{\langle s\restriction\mathrm{lh}(r_k),r_k\rangle}\,\rangle\,]\!]_{\mu_{\langle s\restriction\mathrm{lh}(r_k),r_k\rangle}}$$

と定義し,

$$\nu_s(X)=1 \iff \langle\, i_{2k,2\mathrm{lh}(s)}(e_k)\mid k<\mathrm{lh}(s)\,\rangle\in i_{0,2\mathrm{lh}(s)}(T)$$

とすれば, この $\langle\,\nu_s\mid s\in{}^{<\omega}\omega\,\rangle$ によって $\tilde{T}$ が κ_0-homogeneous になることが保証されるのである. その証明の手順は以前とほとんど同じである. [証明終]

補遺 1. Section2 への追加

Section 2 で述べるべき重要な補題が原稿作成時の事故により脱落しているのでここで補足することにした. 内容は subsection2.1 の続きである.

<u>補題 2.1.9</u>

宇宙 V の内部モデル M への elementary embedding $j : V \to M$ によって導入された extender E を考える. いま写像 $k : \mathrm{Ult}(V, E) \to M$ を次の式で定義する.

$$k([\![F]\!]_a) = j(F)(a), \qquad \text{where } F \in {}^{\mathrm{lh}(a)}V.$$

このとき k は elementary embedding であって, $k \restriction \mathrm{support}(E) = \mathrm{id} \restriction \mathrm{support}(E)$ である. さらに次の可換図式が得られる.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "i_E"'] & & M \\
& \mathrm{Ult}(V, E) \arrow[ur, "k"'] &
\end{tikzcd}$$

[証明] Łoś の定理を用いれば k が elementary embedding であることは容易に確かめられる. また i_E の定義に戻って考えれば, 上記の図式が可換であることもすぐわかる. $k \restriction \mathrm{support}(E)$ が identity であることをみるためには $y \in \mathrm{support}(E)$ のとき

$$y = [\![H_0^{\langle y \rangle}]\!]_{\langle y \rangle}$$

であることに注意すればよい. [証明終]

<u>補題 2.1.10</u>

j は V の内部モデル M への elementary embedding で, $\kappa = \mathrm{crit}(j)$ とする. また E は j によって導入された extender で, $\mathrm{support}(E) \in M$ かつ $V_{\mathrm{rank}(\mathrm{support}(E))+1} \subseteq M$ となるものとする. このとき $E \in M$ である.

[証明] measure と ultrafilter の自然な対応関係により, E は写像

$$E : {}^{<\omega}(\mathrm{support}(E)) \to \mathcal{P}\mathcal{P}({}^{<\omega}V_\kappa)$$

とみなすことができる. したがってまた E は

$${}^{<\omega}(\mathrm{support}(E)) \times V_{\kappa+2}$$

の部分集合とみなすことができる. [証明終]

補遺 2. Shelah cardinal が Woodin cardinal であることの証明

ここでは，補題 3.1.2 のうち (3) を証明する．証明の手法は補題 3.1.3 のそれと同様であるが，いくぶん単純である．extender の概念に慣れるための用例として適当であると判断したのでここで紹介する次第である．

以下，σ を Shelah cardinal とし，$f : \sigma \to \sigma$ を任意に与えられた関数とする．但しここで f は progressive である，すなわちすべての $\gamma < \sigma$ で $f(\gamma) \geq \gamma$ となっていると仮定してさしつかえない．
いま $\tilde{f}(\gamma) := f(\gamma) + \omega_1 + 3$ と定義し，この $\tilde{f}$ に関して Shelah cardinal の定義にいうような elementary embedding $j : V \to M$ をとると次のことがいえる．

$$\mathrm{crit}(j) = \sigma,$$
$$V_{j(f)(\sigma)+\omega_1+3} \subseteq M.$$

E は j によって導入された $V_{j(f)(\sigma)+\omega_1}$ を support とする extender だとする．このとき次のことが成り立つ．

$$\mathrm{crit}(E) = \sigma,$$
$$V_{j(f)(\sigma)+\omega_1} \in V_{i_E(\sigma)} \cap M.$$

とくに補題 2.1.10 より $E \in M$ である．
超巾 $\mathrm{Ult}(V, E)$ の M への自然な elementary embedding を k としよう．このとき $k \circ i_E = j$ であり，$k \restriction V_{j(f)(\sigma)+\omega_1}$ は identity と一致する．一方 $f \in V_{\sigma+1}$ より，$i_E(f) = i_E^M(f)$ である．
$j(f) = k(i_E(f))$ かつ $k(\sigma) = \sigma$ なので

$$\begin{aligned} i_E(f)(\sigma) \leq & k(i_E(f)(\sigma)) = k(i_E(f))(k(\sigma)) \\ = & j(f)(\sigma) < j(f)(\sigma) + \omega_1. \end{aligned}$$

最後の不等号が成り立つことから $j(f)(\sigma) = k(i_E(f)(\sigma)) = i_E(\sigma)$ となり，$i_E(f)(\sigma) = j(f)(\sigma)$ がいえる．したがってまた $i_E^M(f)(\sigma) = j(f)(\sigma)$ でもある．

さて $\mathrm{crit}(j) = \sigma$ なので $j(f) \restriction \sigma = f$ である．このことから

$$i_E^M(j(f)) \restriction i_E^M(\sigma) = i_E^M(j(f) \restriction \sigma) = i_E^M(f).$$

とくに $i_E^M(j(f))(\sigma) = i_E^M(\sigma) = j(f)(\sigma)$ である．ゆえに

$$V_{i_E^M(j(f))(\sigma)} = V_{j(f)(\sigma)} \subseteq \mathrm{support}(E).$$

また同じく $j(f)\restriction\kappa = f$ であることから $j(f)``\sigma \subseteq \sigma$ である. 以上のことをまとめると,

(0*) $E \in M$ は extender.
(1*) $\mathrm{crit}(E) = \sigma < j(\sigma)$.
(2*) $j(f)``\sigma \subseteq \sigma$.
(3*) $V_{i_E^M(j(f))(\sigma)} \subseteq \mathrm{support}(E)$.

このような E が存在するという M での主張を j で V に引き戻せば, V に次のような E' が存在することになる.

(0′) E' は extender.
(1′) $\mathrm{crit}(E') = \kappa < \sigma$.
(2′) $f``\kappa \subseteq \kappa$.
(3′) $V_{i_{E'}(f)(\kappa)} \subseteq \mathrm{support}(E')$.

$f : \sigma \to \sigma$ は任意の (progressive な) 関数だったから, これで σ が Woodin cardinal になることが証明された.

参考文献

D. A. Martin and J. Steel

[MS1] *Projective Determinacy, Proc. Nat. Acad. Sci. vol. 85, pp. 6582-6586* (1988)

[MS2] *A Proof of Projective Determinacy, Jour. Amer. Math. Soc. vol. 2, pp.71-125* (1989)

[MS3] *Iteration Trees, to appear* (-)

D. A. Martin and R. M. Solovay

[MaSo] *A Basis Theorem for Σ^1_3 Sets of Reals, Ann. of Math. vol. 89, pp. 138-159* (1986)

D. A. Martin

[Ma] *Measurable Cardinals and Analytic Games, Fund. Math. vol. 66, pp. 287-291* (1970)

A. S. Kechris

[Ke] *Homogeneous Trees and Projective Scales, Cabal Seminar 1976-79 Springer L. N. M. no. 839* (1981)

W. H. Woodin

[Wo] *Supercompact Cardinals, Sets of Reals and Weakly Homogeneous Trees, Proc. Nat. Acad. Sci. vol. 85, pp. 6587-6591* (1988)

Y. N. Mochovakis

[Mo] **Descriptive Set Theory,** North-Holland, Amsterdam (1980)

R. M. Solovay, W. Reinhardt and A. Kanamori

[SRK] *Strong Axioms of Infinity and Elementary Embeddings, Ann. Math. Logic vol. 13, pp. 73-116* (1978)