数理解析研究所講究録
第 738 巻 1991 年 42-47

Monge－Ampère 方程式の対称全域解について

広大理 草野 尚 (Kusano Takaŝi)

1. Monge-Ampère 方程式

$$\det(D^2u) = Lu + f(x, u, Du), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

$$Du = (\partial u/\partial x_1, \dots, \partial u/\partial x_N), \quad D^2u = (\partial^2 u/\partial x_i \partial x_j)$$

L : 2階楕円型作用素 ($L \equiv 0$ も許す)

の空間 $\mathbb{R}^N$ 全域で定義される解 (これを全域解と呼ぶ) の存在を論じることは，数学的に意味のある問題であると思われる。しかし，この問題を一般的な L，f に対して解くことは極めて難しい。ここでは，この問題への接近の最初の試みとして，方程式を

$$\text{(A)} \qquad \det(D^2u) = \alpha \Delta u + f(|x|, u, |Du|), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

Δ $\partial^2 u/\partial x_1^2 + \cdots + \partial^2 u/\partial x_N^2$， α : 非負整数

$|\cdot|$ はベクトルの Euclid 長さ

という特別なものに限定し，また解も対称な (つまり $|x|$ だけに依存する) 正値全域解に限定して議論をしてみよう。

$u(x) = y(|x|) \in C^2(\mathbb{R}^N)$ ならば， $t = |x|$， $' = d/dt$ として，

$$\det(D^2u)=t^{1-N}(y')^{N-1}y'', \quad \Delta u = t^{1-N}(t^{N-1}y')'$$

となるから，(A)の対称正値全域解 $u(x)=y(|x|)$ を求める問題は，常微分方程式

(B) $$(y')^{N-1}y''-\alpha(t^{N-1}y')' = t^{N-1}f(t, y, |y'|), \quad t>0$$

の解 $y\in C^2(\overline{\mathbb{R}}_+)$ で，$y(0)=c>0$，$y'(0)=0$，$y(t)>0, t\geqq 0$ を満たすものを求めるという問題に帰着する。

以下叙述を簡単にするために考察を $N=2$ の場合に限ることにする。

2. $\alpha=0$ の場合

$N=2$, $\alpha=0$ の場合，(B)は

(C) $$\frac{d}{dt}[y'(t)]^2 = 2tf(t, y, |y'|), \quad t>0$$

となる。(C)の解 $y(t)$ で，$y'(t)\geqq 0$ を満たすものだけを考える。(C)から2回の積分によって

(D) $$y(t) = c+\int_0^t\left[2\int_0^s r f(r, y(r), y'(r))dr\right]^{1/2}ds, \quad t\geqq 0$$

が得られる。(D)の正値解 $y\in C^2(\overline{\mathbb{R}}_+)$ を求めればよい訳である。

非線形項 f に対する条件は下記の通り：

(f_1) f は $\mathbb{D}=\overline{\mathbb{R}}_+\times\mathbb{R}_+\times\overline{\mathbb{R}}_+$ で連続かつ正値；

(f_2) $f(t, y, z)$ は y，z に関して単調増加；

(f_3) $\exists a>0:\ \int_0^\infty t f(t, at+a, a)\,dt < \infty;$

(f_4) $k^{-2}f(t, ky, kz)$ は $k\in(0, k_0]$ の増加関数で，

$\lim_{k\to+0} k^{-2}f(t, ky, kz)=0,\quad \forall(t, y, z)\in \mathbb{D};$

(f_5) $k^{-2}f(t, ky, kz)$ は $k\in[k_0, \infty)$ の減少関数で，

$\lim_{k\to+\infty} k^{-2}f(t, ky, kz)=0,\quad \forall(t, y, z)\in \mathbb{D}.$

最初に得られる結果は次の定理である。

定理 1. $\{(f_1)-(f_3), (f_4)\}$ 又は $\{(f_1)-(f_3), (f_5)\}$ が成立つとき，方程式 (A) ($N=2, \alpha=0$) は $\lim_{|x|\to\infty} u(x)/|x| = \mathrm{const}>0$ を満たす狭義凸な対称正値全域解を無数に持つ.

(証明の方針) $\{(f_1)-(f_3), (f_4)\}$ の場合のみを考える。(f_4) は

$$\lim_{k\to+0} k^{-2}\int_0^\infty t f(t, k(t+1), k)\,dt = 0$$

を導くから

$$\exists c_*>0 \quad \forall c\in(0, c_*] \Rightarrow 2\int_0^\infty t f(t, c(t+1), c)\,dt \leqq c^2$$

が成立する。集合 $Y\subset C^1(\overline{\mathbb{R}}_+)$ と写像 $\mathcal{F}: Y\to C^1(\overline{\mathbb{R}}_+)$ を次のように定義する：

$$Y=\{y\in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+):\ y(0)=c,\ 0\leqq y'(t)\leqq c,\ t\geqq 0\};$$

$$\mathcal{F}y(t)= c+\int_0^t\left[2\int_0^s r f(r, y(r), y'(r))\,dr\right]^{1/2}ds,\quad t\geqq 0.$$

簡単な計算によって，$\mathcal{F}(Y)\subset Y$，$\mathcal{F}$ は連続写像，$\mathcal{F}(Y)$ は相対コンパクト集合，であることが証明されるから，$\mathcal{F}$ は

不動元 $y \in Y$ を持つ。明らかに y は微積分方程式 (D) の解である。$y \in C^2(\bar{\mathbb{R}}_+)$ であることは容易に検証され，また

$$\lim_{t\to\infty} y(t)/t = 2\left[\int_0^\infty r f(r, y(r), y'(r))dr\right]^{1/2}$$

が成立つことも示される。$u(x) = y(|x|)$ とおけば，$u(x)$ が (A) の求める正値全域解になる。

3．$\alpha > 0$ の場合

この場合，方程式 (B) は次の形に書ける：

(E) $$\frac{d}{dt}[y'(t)]^2 - 2\alpha\frac{d}{dt}[ty'(t)] = 2tf(t, y(t), |y'(t)|),\quad t > 0.$$

前項と同じく，$y'(t) \geqq 0$, $t \geqq 0$ をみたす正値解 $y \in C^2(\bar{\mathbb{R}}_+)$ を求めよう。(E) を積分して $y'(t)$ に関する2次方程式を解き，それをさらに積分すると，微積分方程式

(F) $$y(t) = c + \int_0^t \left\{\alpha s + \left[2\int_0^s (\alpha^2 r + rf(r, y(r), y'(r)))dr\right]^{1/2}\right\}ds,\quad t \geqq 0$$

が得られる。今度は，(E) の $C^2(\bar{\mathbb{R}}_+)$-級の正値解 $y(t)$ を求めればよいのである。

f に対する仮定：(f_1) と (f_2) は前と同じように要求し，(f_3) − (f_5) を下記の条件で置き換える．

(f$_6$) $\Phi(k) = \sup_{t\geqq 0} f(t, k(t^2+1), 2kt) < \infty, \quad \forall k>0;$

(f$_7$) $\lim_{k\to\infty} k^{-2}\Phi(k) = 0.$

定理2. (f$_1$), (f$_2$), (f$_6$) 及び (f$_7$) を仮定する。このとき方程式(A)（$N=2$, $\alpha>0$）は

$$0<\liminf_{|x|\to\infty}\frac{u(x)}{|x|^2}, \quad \limsup_{|x|\to\infty}\frac{u(x)}{|x|^2}<\infty$$

を満たす狭義凸な正値対称全域解を無数に持つ.

（証明の方針） (f$_6$), (f$_7$) によって

$$c \geqq \alpha, \quad \Phi(2c)\leqq c^2$$

を満たす正の定数cが無数に存在する。その1つを固定し,

$$Y=\{y\in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+) : y(0)=c,\ 0\leqq y'(t)\leqq 4ct,\ t\geqq 0\}$$

なる集合 $Y\subset C^1(\overline{\mathbb{R}}_+)$ と

$$\mathcal{F}y(t) = c+\int_0^t\left\{\alpha s+\left[2\int_0^s(\alpha^2 r + r f(r,y(r),y'(r)))dr\right]^{1/2}\right\}ds, \quad t\geqq 0$$

なる写像 $\mathcal{F}: Y\to C^1(\overline{\mathbb{R}}_+)$ を考える。$\mathcal{F}$はYを自分自身の中に写し, 連続で, $\mathcal{F}$によるYの像は相対コンパクトであることは困難なく証明される。従って $\mathcal{F}$ の不動元 $y\in Y$ が少くとも1つ存在する。このyは(F)の解で,

$$0<\liminf_{t\to\infty} y(t)/t^2, \quad \limsup_{t\to\infty} y(t)/t^2<\infty$$

を満たし, しかも $C^2(\overline{\mathbb{R}}_+)$-級であるから, $u(x)=y(|x|)$ が求める(A)の正対称全域解になる。

例. 2次元 Monge-Ampère 方程式

$$(G)\quad \det(D^2u) = \alpha\Delta u + p(|x|)u^{\gamma}(1+|Du|^2)^{\delta},\quad x\in\mathbb{R}^2$$

を考える。$\gamma\geqq 0$, $\delta\geqq 0$, $\gamma+\delta>0$, p は $\overline{\mathbb{R}}_+$ で連続かつ正値とする。

(i) $\int_0^{\infty} t^{1+\gamma}p(t)\,dt<\infty$ とする. 定理1の条件 (f_1)–(f_3) は明らかに満たされる。$\{\gamma>2,\ \delta=0\}$ ならば (f_4) が, $\{\gamma<2,\ \delta=0\}$ 又は $\{\gamma+2\delta<2,\ \delta>0\}$ ならば (f_5) が成立する。

(ii) 定理2の条件 (f_6) は $p(t)=O(t^{-2\gamma-2\delta})$ as $t\to\infty$ ならば満たされ, (f_7) は $\gamma+2\delta<2$ ならば満たされる。

上記の事項の詳細ならびにその拡張については以下の拙著を参照されたい。

[1] T. Kusano and C. A. Swanson, Existence theorems for elliptic Monge-Ampère equations in the plane, Differential and Integral Equations (to appear)

[2] T. Kusano and C. A. Swanson, Entire solutions of real and complex Monge-Ampère equations, SIAM J. Math. Anal. (to appear)

[3] T. Kusano and C. A. Swanson, Existence theorems for Monge-Ampère equations in $\mathbb{R}^N$, submitted for publication.