数理解析研究所講究録
第 740 巻 1991 年 126-137

パラメトリック散逸非線形シュレディンガー方程式の数値解

東大理 梅木 誠 (Makoto Umeki)

§1. はじめに

パラメトリック散逸非線形シュレディンガー方程式

$$i(r_t+\alpha r)+Br_{xx}+(\beta+A|r|^2)r+A_0r^*=0 \quad (1)$$

(α, B, β, A, A_0 は実定数，r^* は r の複素共役) は可積分なソリトン方程式に外力 (A_0 の項) と散逸 (α の項：線形減衰) の加わった系であり，低自由度カオスや，空間コヒーレンスの欠如した時空カオスが生じると期待される。(1) は Miles (1984) が，鉛直加振をうける細長い長方形容器内の水面波の (0,1) モード (短い辺方向にのみ一つ節のあるモード) の長辺方向への modulation を記述する方程式として，平均ラグランジュ法により導いたものである。対応する実験が Wu. etal (1984) により行われ，sech 型の孤立波や，2つの孤立波の衝突，すりぬけの繰り返しの現象が発見されている。

本研究では(1)の周期境界条件下での解の分岐を，解析的及び数値的に調べ，pseudospectral 法により数値計算を行なっ

た。特に２つのパラメータ（ β, A_0 ）に対する依存性を詳細に調べ、定常解の安定性を吟味する。鉛直加振をうける水面波の場合、各パラメータの物理量との対応は次の通りである。

$\alpha = a_{0min}/a_1\epsilon^2$, $\beta = (\omega^2-\omega_1^2)/2\epsilon^2\omega^2$, $A_0 = a_0/a_1\epsilon^2$,

$a_{0(min)}$ ：（最小励起）加振振幅.

$a_1 = (\kappa_1 \tanh \kappa_1 d)^{-1}$, $\kappa_1 = \pi/\ell_y$, ℓ_y ：容器の幅 $(\ell_y \ll \ell_x)$

d ：液体の深さ. $\omega_1 = \{(1+\lambda^2\kappa_1^2)g/a_1\}^{\frac{1}{2}}$ ：モード(0,1)の固有振動数

g ：重力加速度. λ ：表面張力. 2ω ：加振の角振動数

ϵ ：展開パラメータ($\ll 1$). A, Bは定数。

A, B は $\kappa d \to +\infty$ のときに１に近づく事が知られており. A = B = １とする。

§２. 定常解の分類

(1)の定常解（ $r_t = 0$ ）は. 零解（ $r = 0$ ），一様解（ $r = const$ ），非一様解に分類され. 非一様解には位相 $Arg(r)$ が一定な. クノイダル波と dn 波が存在する。解析的な表現を以下に示す。

一様解： $r = r_{c\pm} = |r_{c\pm}|e^{i\varphi_\pm}$

$$|r_{c\pm}| = \{(-\beta \pm s)/A\}^{\frac{1}{2}} \quad , s = (A_0^2-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\varphi_+ = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{\alpha}{A_0}, \quad \varphi_- = \frac{1}{2}(\pi - \sin\frac{\alpha}{A_0}) \qquad (2)$$

（±は 振幅の大小を区別するために用いた。）

クノイダル波解　$r = R^n(x)\, e^{i\varphi_n}$

$$R^n(x) = n\frac{\kappa K}{\kappa_0 K_0}\ \mathrm{cn}\,(4nKx/L\ ;\kappa)\qquad ,\ n=1,2,3,\cdots$$
$$\varphi_n = \frac{1}{2}\cos^{-1}\{(\beta_n^c-\beta)/A_0\}\qquad (3)$$

但し．$A_0=\{\alpha^2+(\beta-\beta_n^c)^2\}^{1/2}$，$\beta_n^c = -An^2\frac{\kappa^2K^2}{\kappa_0^2K_0^2}(1-\kappa^{-2}/2)$，
$K\equiv K(\kappa)$，$K_0\equiv K(\kappa_0)$は第一種完全楕円積分．$L=4\kappa_0K_0\sqrt{\frac{2B}{A}}$は空間$x$の周期境界のサイズである。

dn波解　$r = R^n(x)\ e^{i\varphi_n}$

$$R^n(x) = n\frac{\kappa K}{2\kappa_0 K_0}\ dn\,(2nKx/L\ ;\ \kappa)\qquad ,\ n=1,2,3,\cdots$$
$$\varphi_n = \frac{1}{2}\cos^{-1}\{(\beta_n^d-\beta)/A_0\}\qquad (4)$$

但し．$A_0=\{\alpha^2+(\beta-\beta_n^d)^2\}^{\frac{1}{2}}$，$\beta_n^d = -An^2\frac{K^2}{4\kappa_0^2K_0^2}(1-\kappa^2/2)$。

図１，２に零解と一様解の線形安定性ダイアグラムを示す。$\kappa\to 0$の極限で、クノイダル波解のA_0の表式は．$A_0=\{\alpha^2+(\beta-Bk_n^2)^2\}^{1/2}$，$k_n=2\pi n/L$に近づき、図１の安定性の変化する境界曲線と一致する。ゆえにクノイダル波解は零解からの分岐解であり．さらに．$\beta>(<)Bk_n^2$ではこの分岐がsupercritical（subcritical）であることがわかる。同様に$\kappa\to 0$でdn波解のA_0は$A_0=\{\alpha^2+(\beta+Bk_n^2/2)^2\}^{\frac{1}{2}}$となり，図２の境界線と一致する。よって$dn$波解は一様解からの分岐である。

図２において、別のタイプの安定性の境界線が存在し，

$A_0=\{\alpha^2+(Bk_n^2/2)^2\}^{1/2}$ と表される。この境界線の近傍でLindstedtの方法を用いることにより、位相の一定でない摂動解が得られる。(Umeki, 1990) また、定常解の方程式は、xを時間変数と見直すと、中心力場の平面内の粒子のHamilton方程式に、非中心力的な摂動と、ハミルトン的でない摂動の加わった系であることが示され、一般には、非周期的な解が存在すると予想される。

§3. クノイダル波の安定性.

クノイダル波解とdn波解は、Fourier級数表示が知られているため、比較的簡単に安定性が調べられる。ここでは、クノイダル波解について手法を説明する。

$r=\bar{r}+\hat{r}$;($\bar{r}$: クノイダル波, $\hat{r}$; 摂動)とおいて(1)に代入し、$\hat{r}$について1次の項のみ残す。

$$\hat{r}_\tau+\alpha\hat{r}-i\,(B\hat{r}_{xx}+\beta\hat{r}+2A|\bar{r}^2|\hat{r}+2\bar{r}^2\hat{r}^*+A_0\hat{r}^*)=0 \quad (5)$$

$\bar{r}$と$\hat{r}$を打ち切ったフーリエ級数で表すと

$$(\bar{r},\hat{r})=\sum_{m=-N}^{N}(\bar{r}_m,\hat{r}_m)\,e^{ik_mx}, \qquad (6)$$

となる。(5)において非線形項($|\bar{r}|^2\hat{r}$)のフーリエ係数u_mは、

$$u_m=\frac{1}{L}\int_0^L|\bar{r}|^2\hat{r}\,e^{-ik_nx}\,dx$$

$$=\sum_{m_1,m_3}\bar{r}_{m_1}\bar{r}^*_{m_1+m_3-n}\,\hat{r}_{m_3}\equiv\sum_{m_3}I_{m,m_3}\hat{r}_{m_3} \qquad (7)$$

である。但し、

$$I_{m,m_3} \equiv I(m-m_3) = \sum_{m_1} \bar{r}_{m_1} r^*_{m_1+m_3-m} . \tag{8}$$

もう一つの非線形項（$\bar{r}^2 \hat{r}^*$）のフーリエ係数 v_m も同様に、

$$v_m = \sum_{m_1,m_3} \bar{r}_{m_1} \bar{r}_{m_3+m-m_1} \bar{r}^*_{m_3} \equiv \sum_{m_3} J_{m,m_3} \hat{r}^*_{m_3} \tag{9}$$

となる。 楕円関数 cn のフーリエ級数表示、

$$cn(x) = \frac{\pi}{\kappa K} \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{sech}\{(l+\tfrac{1}{2})\pi K'/K\} \cos\{(l+\tfrac{1}{2})\pi x/K\} \tag{10}$$

$$(K' = K(\sqrt{1-\kappa^2})).$$

を用いて、クノイダル波解 $r = \exp(i\varphi)\cdot R^n$ のフーリエ係数は、

$$r_m = e^{i\varphi} R^n_m ,$$

$$R^n_m = \begin{cases} \dfrac{n\pi}{2\kappa_0 K_0} \mathrm{sech}\dfrac{|m|\pi K'}{2K} , & m = \pm n, \pm 3n, \pm 5n, \cdots \\ 0 & m \neq \pm n, \pm 3n, \pm 5n, \cdots \end{cases} \tag{11}$$

で与えられる。相関係数 I_{m,m_3} は実数であり、J_{m,m_3} は、

$J_{m,m_3} = I(m+m_3)\, e^{2i\varphi}$ で与えられる。

以上より、摂動のフーリエ係数の時間発展は、$r_m = p_m + i q_m$ として、

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} p_m \\ q_m \end{pmatrix} = \tilde{A}_m \begin{pmatrix} p_m \\ q_m \end{pmatrix} + \sum_{m_3} \tilde{B}_{m,m_3} \begin{pmatrix} p_{m_3} \\ q_{m_3} \end{pmatrix} + \tilde{C}_m \begin{pmatrix} p_{-m} \\ q_{-m} \end{pmatrix}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \pm N \tag{12}$$

となる。ここで $\tilde{A}_m$, $\tilde{B}_{m,m_3}$, $\tilde{C}_m$ は 2×2 の行列であり、

$$A_m = \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta + Bk_m^2 \\ \beta - Bk_m^2 & -\alpha \end{pmatrix} \quad B_{m,m_3} = A\begin{pmatrix} -J^2_{m,m_3} & -2I_{m,m_3} + J^1_{m,m_3} \\ 2I_{m,m_3} + J^1_{m,m_3} & J^2_{m,m_3} \end{pmatrix}$$

$C_m = \begin{pmatrix} 0 & A_0 \\ A_0 & 0 \end{pmatrix}$ である。（J^1, J^2 は J の実部と虚部）

(12) の右辺の行列を数値的に解いた結果、クノイダル波があるパラメータで不安定となり、複素数の固有値を生ずることがわかった。（図3）即ち、ホップ分岐が生じている。

図4に(β, A_0)平面で詳細に安定性を調べた結果を示す。

§4. 数値計算

(1)の非定常解を調べるために、pseudspectral法を用いた数値計算を行なった。Aliasingの誤差をとり除くために、モード数Nの2倍の配列を用意し、高波数側半分に0を入れておく。時間ステップは4次のRunge-Kuttaを用いた。

$(\alpha, \beta, A_0) = (0.2, -0.3, 0.5)$, $(\kappa_0, L) = (0.97, 15.73\cdots)$

で初期条件をクノイダル波+数%の摂動で計算したところ、初期の5万ステップ($T = 250$)までは周期的であった解が不安定となり、一時的な不規則状態をすぎ、2重周期状態が現れた。αとβはそのままで$A_0 = 1.0$とすると最初からカオス的な状態が続く。$A_0 = 0.37$の場合は周期状態が計算時間の範囲で続いた。図5に数値計算例を示す。

$(\alpha, \beta) = (0.2, -0.3)$で$A_0$を$0.208 \sim 1.0$まで100通りの計算を上の初期条件で行なったところ、次の事がわかった。

1. ホップ分岐(5ページ)は、A_0が小さい方ではsupercritical, A_0の大きい方でsubcriticalである。

2. カオス的な状態とdn波の$n = 2, 3$や一様解の状態が安定に共存する範囲がある。

また、$A_0 = 0.37, 0.5$で現れた周期解は実空間での波形を

見ると、2つの山$\xrightarrow{\text{衝突}}$1つの山$\xrightarrow{\text{すり抜け}}$2つの山→… と解釈でき、Wu. et. alの実験を説明するものである。

§5まとめ.

鉛直加振をうけた水面波のダイナミクスを、弱非線形理論で導かれた、パラメトリック散逸非線形シュレディンガー方程式によって解析し、孤立波や、2つの山の衝突、すり抜け現象を再現した。

§6. 参考文献

Miles, J. W. (1984) J. Fluid Mech. <u>148</u> pp 451-460

Wu, J., Keolian, R & Rudnick, I (1984) Phys. Rev. Lett. <u>52</u> pp. 1421-1424

Umeki (1990) preprint.

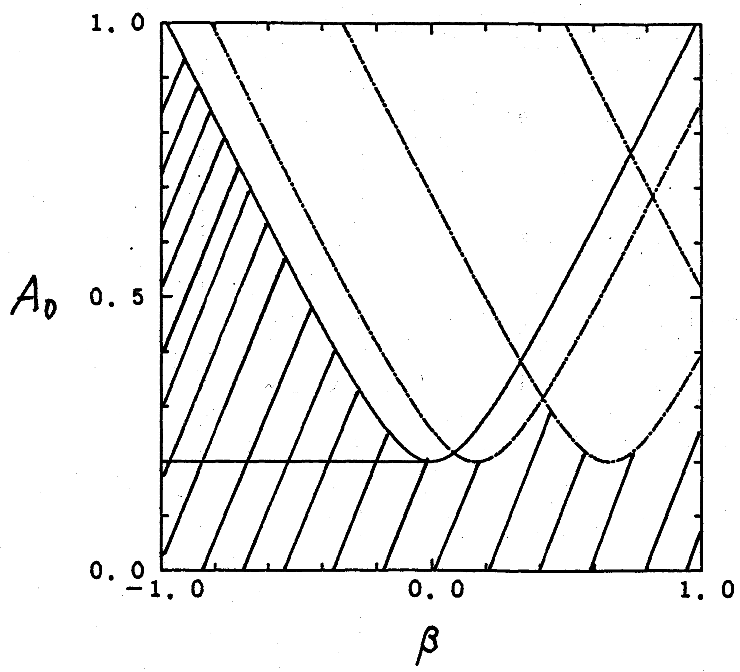


図１　零解の安定性ダイアグラム
斜線部が安定領域

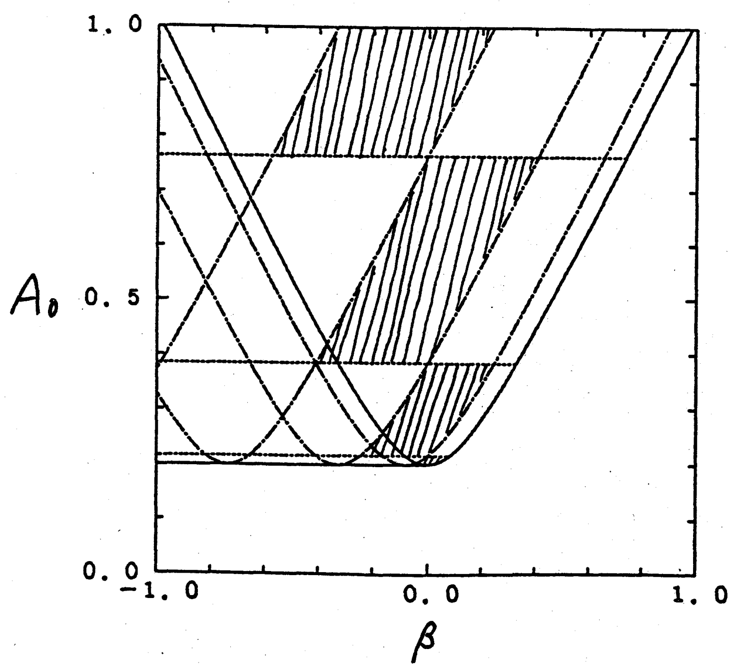


図２　一様解（r_{c+}）の安定性ダイアグラム
斜線部が安定領域

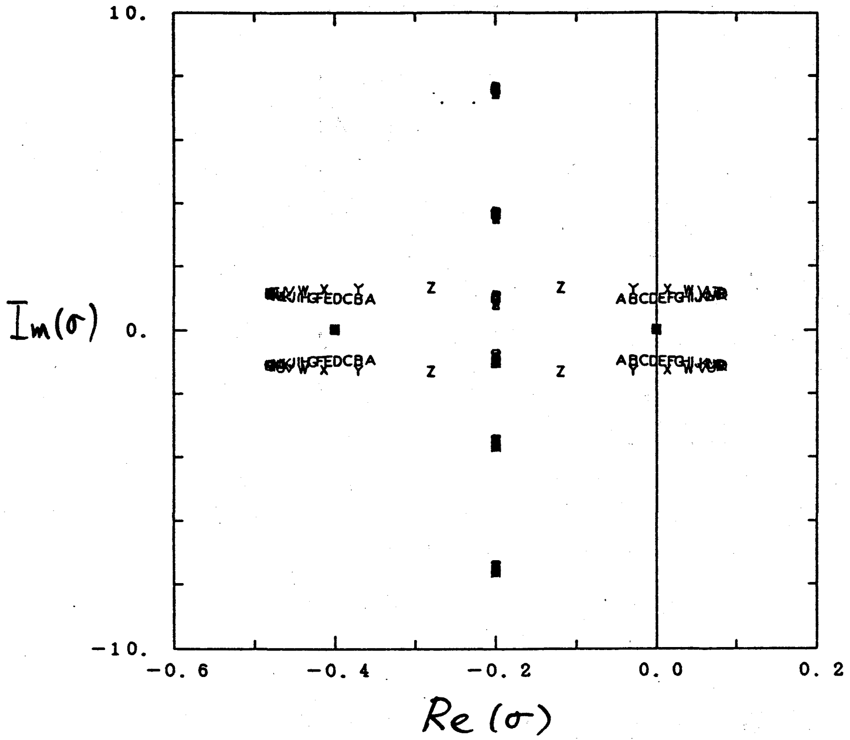


図3 安定性解析による固有値σの変化
A → Zに従い、A_0を大きく変化させた。
2度 Hopf 分岐が起こっている。

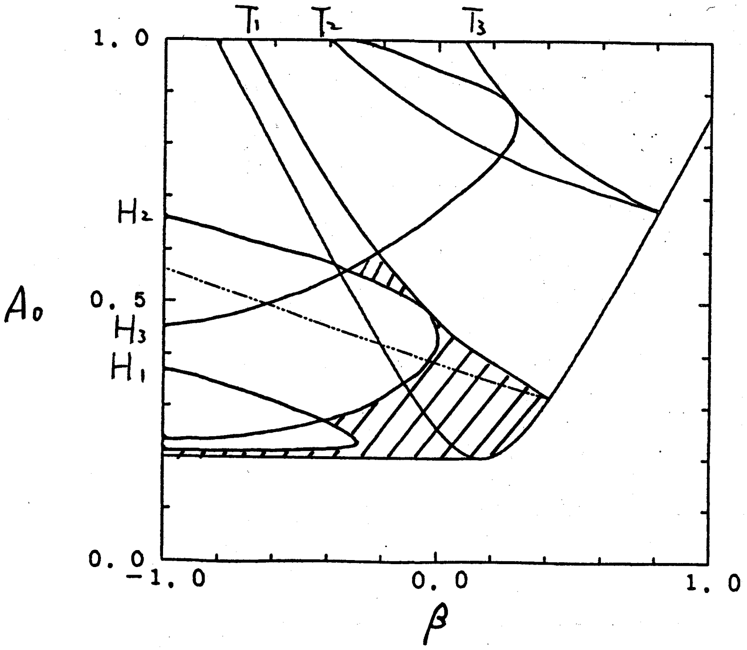


図4 クノイダル波 $(n=1)$ の安定性ダイアグラム
斜線部が安定領域

H_1, H_2, H_3 は $Re(\sigma)=0$, $Im(\sigma)\neq 0$ の曲線.
T_1, T_2, T_3 は $Re(\sigma)=Im(\sigma)=0$ の曲線.

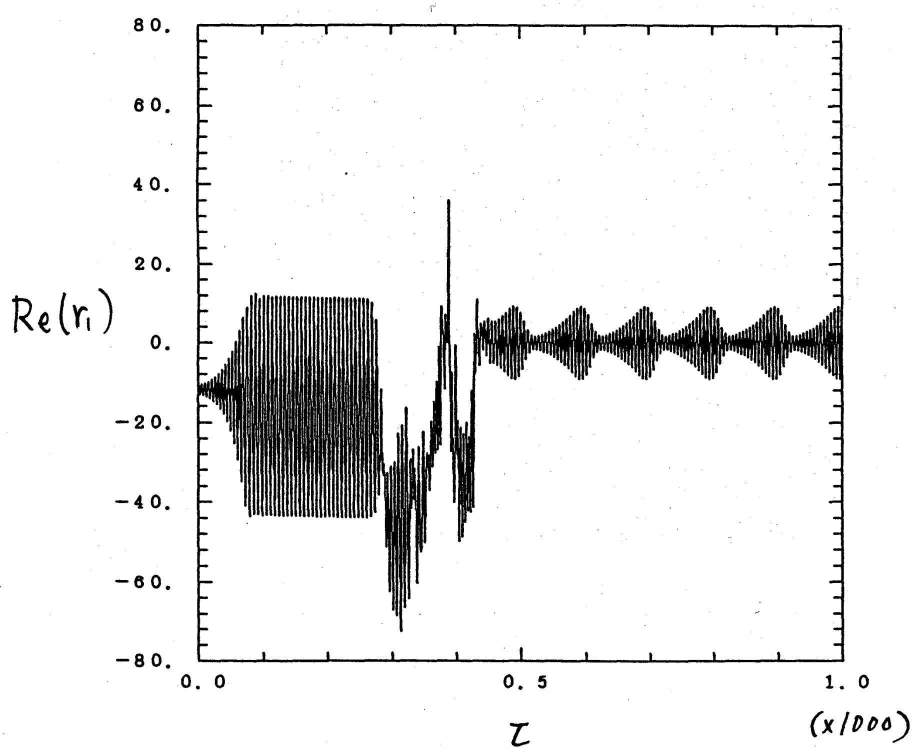
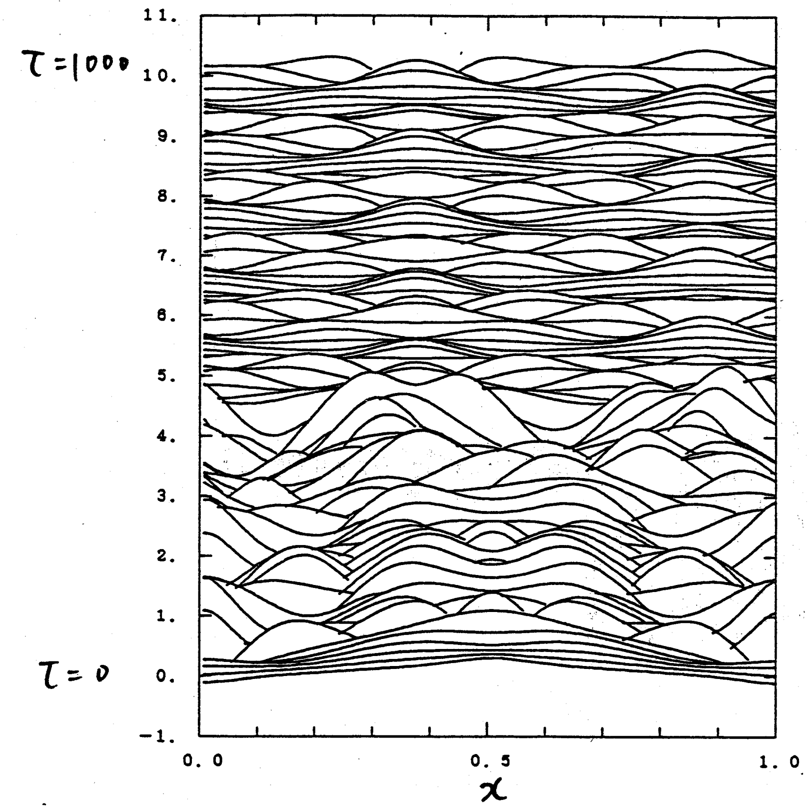


図 5.1. $(\alpha, \beta, A_0) = (0.2, -0.3, 0.5)$ での フーリエ係数 $r_1(\tau)$ の実部の時間発展



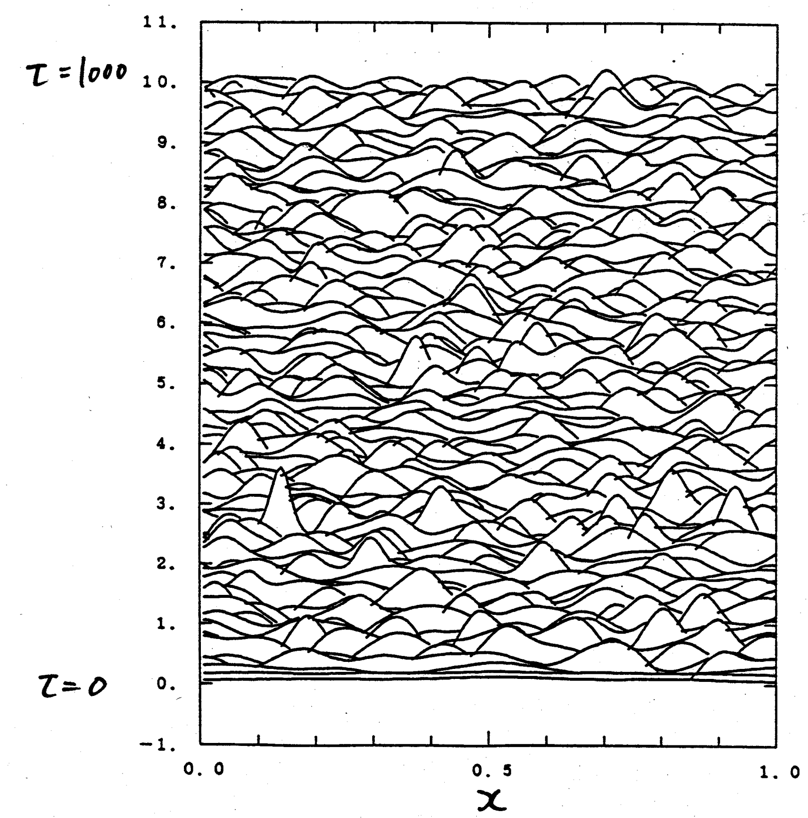


図 5.2, 5.3, Re(γ)の時間発展. $\alpha=0.2$, $\beta=-0.3$
(上) (下) 上: $A_0=0.5$, 下: $A_0=1.0$

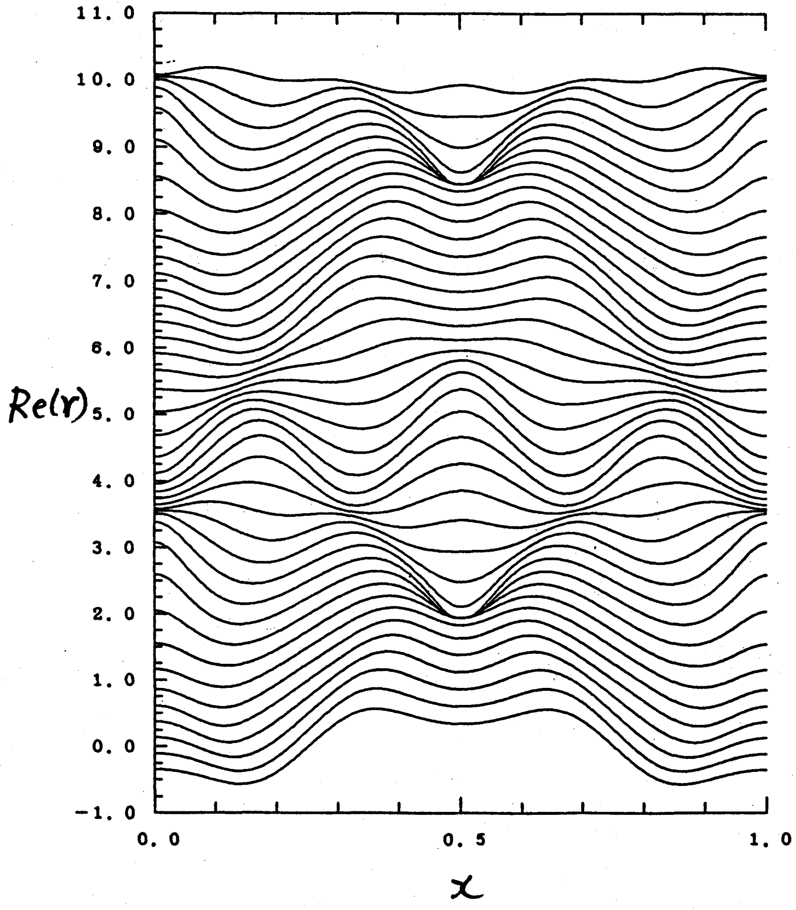


図 5.4 孤立波の衝突.すり抜け現象。($x=0.25 \sim 0.75$ を実際の容器のサイズとみなす。) $A_0=0.5$, $\alpha=0.2$, $\beta=-0.3$