数理解析研究所講究録
第 742 巻 1991 年 56-69

平面尖点曲線と$\mathbb{P}^2$の３重被覆

新潟大数養　吉原久夫 (Hisao YOSHIHARA)

§1. Introduction

(1.1) 平面曲線Γに対して特異性はどれくらい許されるか？ ここで特異性とは① 重複度 ② 特異点の性質（接線が何本あるか等）などをいう．よく知られたものにΓが既約のとき genus formula がある．しかしこれは数値の組がこの公式を満すように与えられても ②の与え方によっては，曲線が存在しないことが沢山あるし，また cusp (局所既約な特異点のこと) と node も区別しない．その他に変曲点公式，双対曲線の次数を与える式などもある．我々はこれらの他にΓが存在するための必要条件を与える式を求めたい．まず次の結果が 'orchard problem' (line arrangements) との関係から示された ([H])： Γを reduced plane curve of degree d (可約でもよい) とし特異性は高々２重点であるとする．$\mu(\Gamma)$をΓの各特異点での Milnor 数の総和とすると，

<u>Th. 1.1</u>　$d = 2k$（偶数）のとき $\mu(\Gamma) \leqq 3k^2 - 3k + 1$.

この式は，ちょうど Γ で分岐する $\mathbb{P}^2$ の２重被覆を考えそれの特異点解消をしてピカール数を比較することで得られる．なお $d = 2k + 1$ のときは，

<u>Th. 1.1′</u>　$\mu(\Gamma) \leqq 3k^2 + k - 1$.

が示せるが，次の不等式が成立すると思われる（[Y1]）.

<u>予想.</u>　$\mu(\Gamma) \leqq 3k^2$.

これらの一つの応用として，平面曲線の"非存在"を示せる．典型的なものを一つあげると：　Cは平面曲線としたとき，$C - \{P\} \cong \mathbb{A}^1$, $\mathrm{mult}_P C = 2$ なら $d \leqq 5$，が成立する．

(1.2)　以上と同様のことを重複度が３以下のときにやってみよう．

Cを irreducible plane curve of degree d とし，特異点 P_i は <u>cusp</u> で $\mathrm{mult}_{P_i} C \leqq 3$ であるとする．

μ_i を P_i での Milnor 数とする．このとき

$$\mu = \mu(C) = \sum_i 6[\mu_i/6] \quad (\text{ここに } [\ ] \text{ はガウス記号})$$

とおくと次の不等式が成立する（cf. [Y2]）：

<u>Th. 1.2.</u> $7\mu < 6d^2 - 9d$

g を C の normalization の genus とするとこの式から次が従う：

<u>Cor. 1.3.</u> $14g \geqq d^2 - 12d + 16$，とくに C が有理なら $d \leqq 10$.

genus formula からは $\overline{\lim\limits_{d\to\infty}} \dfrac{\mu}{d^2} \leqq 1$ がいえるが，上の定理からは $\overline{\lim\limits_{d\to\infty}} \dfrac{\mu}{d^2} \leqq \dfrac{6}{7}$ がわかる．Th 1.2 の証明は C の embeded resolution に対して宮岡不等式の logarithmic version を適用してなされる．しかし 1.1 の証明のときのように，C で分岐する $\mathbb{P}^2$ の triple covering を用いれば（d が小さいときは）もっと良い評価式が得られる．（但し d は 3 の倍数のとき）．triple covering で得られる曲面から 1-canonical map が birational morphism となるような minimal surface of general type の例が沢山作れることもわかる.

§2. Results and outline of proof

C を irreducible plane curve of degree $d = 3e$ として, 各 singular point は cusp で重複度 $\leqq 3$ とする.

数列 $\underbrace{(2, \cdots, 2)}_{m\text{ケ}}$ を $2(m)$, $\underbrace{(3, \cdots, 3)}_{n\text{ケ}}$ を $3(n)$

$(\underbrace{3, \cdots, 3}_{n\text{ケ}}, 2)$ を $3(n)+2$ と表わすことにする. P を C の cusp とするとき, P の infinitely near singular points の multiplicity sequence を単に P の sequence という.

$$\begin{cases} P_i \text{ を sequence } 2(m_i) \text{ をもつ cusp } (i=1, \cdots, r), \\ Q_i \text{ を sequence } 3(n_i) \text{ をもつ cusp } (i=1, \cdots, s) \\ Q_j \text{ を sequence } 3(n_i)+2 \text{ をもつ cusp } (j=s+1, \cdots, s+t) \end{cases}$$

とする. 他の型の sequence をもつ cusp は無い. このとき

$$m = \sum_{i=1}^{r} \left[\frac{m_i}{3}\right], \quad n = \sum_{i=1}^{s+t} n_i, \quad M = m+n$$

$$k = \sum_{i=1}^{r} \left(m_i - 3\left[\frac{m_i}{3}\right]\right)$$

とおく. g を C の normalization の genus とすると, $2g = (d-1)(d-2) - 6M - 2t - 2k$ が成立

しており，次の主張がすぐわかる．

<u>Lem. 2.1.</u> C の P_i 又は Q_i での局所方程式は各々 $y^2+x^{2m_i+1}$ 又は $y^3+a(x)y+x^{N_i}=0$ である．但し，

$N_i=3n_i+1$ $[\text{resp. } 3n_i+2]$ かつ $\operatorname{ord} a(x)\geqq 2n_i+1$ $[\text{resp. } 2n_i+2]$ ここに $i=1,\cdots,s$ $[\text{resp. } s+1,\cdots,s+t]$．よって特に Q_i において $\mu_i=6n_i$ $[\text{resp. } 6n_i+2]$．

上のことより次がわかる．

<u>Cor. 2.2.</u> μ_i を P_i 又は Q_i での Milnor 数とすると
$$M=\sum_i[\mu_i/6]=\frac{1}{6}\mu.$$

さて Th.1.2 に対応する次の Th が成立する．

<u>Th. 2.3.</u> $10M+4k+4t\leqq 13e^2-9e+2$ あるいは同じことだが，$5g\geqq 3e^2-9e+k+t+2$．

これは d が小さいとき（$d\leqq 48$）のときには Th.1.2 より良い評価を与えている．また次の系がなりたつ．

<u>Cor. 2.4.</u>　C が rational [elliptic] なら $d = 3$ or 6 [3, 6 or 9] である.

さて $d = 3$ で C が rational なら $y^2 + x^3 = 0$ (で定義される曲線) に射影同値であるが, $d = 6$ のとき次のことが言える.

<u>Ex. 2.5.</u>　$C - \{P\} \cong \mathbb{A}^1$, $\mathrm{mult}_P C = 3$, $d = 6$ とすると P の sequence は $3(3) + 2$ で $M = 3$, $t = 1$, であり, このような C は必ず $\alpha \in \mathbb{C}$ が存在して,

$$C_\alpha : (y - x^2)^3 + \alpha(y - x^2)y^4 + xy^5 = 0$$

に射影同値である. 更に "C_α と C_β とが射影同値 $\Longleftrightarrow$ $\alpha^5 = \beta^5$" も成立している.

さて C の defining equation を $F(z_0, z_1, z_2) = 0$ として, weighted projective space $\mathbb{P}(1, 1, 1, e)$, $\deg z_i = 1$ for $i = 0, 1, 2$ $\deg z_3 = e$, 内で

$$z_3^{\ 3} = F(z_0, z_1, z_2)$$

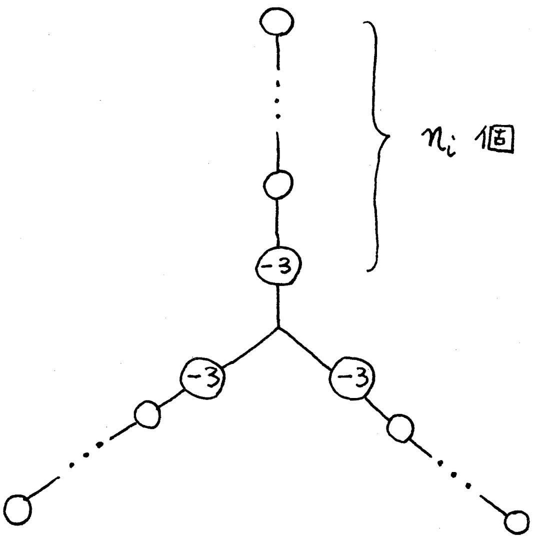
によって定義される曲面を F とする. このとき

$$\pi : F \longrightarrow \mathbb{P}^2$$

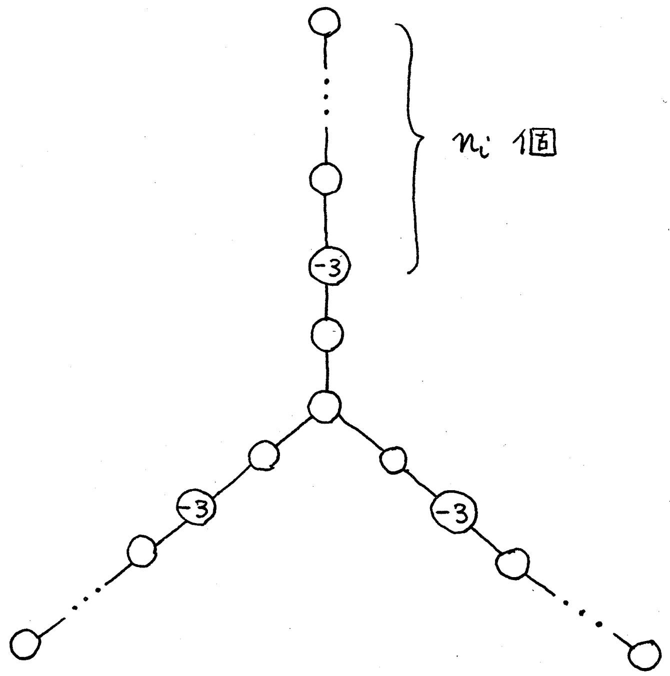
はCに沿って分岐している$\mathbb{P}^2$の triple covering である．Fの特異点はCのそれに対応しており，Fは normal Gorenstein surface である．$\sigma : S \longrightarrow F$ を minimal resolution とする．

KをSの canonical divisor，χをSの topological Euler characteristic とする．そこでFの resolution を調べる．概略を述べると．P_i, Q_iに対応したFの特異点を各々P_i^*，Q_i^*と表わす．するとP_i^*の近くでの局所方程式は $z^3 = y^2 + x^{2m_i+1}$，Q_i^*の近くでの局所方程式は $z^3 = y^3 + a(x)y + x^{N_i}$ である．ところで，(F, P_i^*) の resolution はよく知られており $g(P^*) = \dim (R^1\sigma_* \mathcal{O}_S)_{P^*}$ とおくと，$g(P_i^*) = [m_i/3]$ かつ P_i^* の arithmetic genus p_a は 1．一方 (F, Q_i^*) の方は $g(Q_i^*) = n_i$ $(1 \leqq i \leqq s+t)$ かつ $p_a = 1$，であり，$\sigma^{-1}(Q_i^*)$ の dual graph は：（$a(x) = 0$ のときと同じ）

（イ）$1 \leqq i \leqq s$ のとき $3n_i$ 個の頂点があり



(ロ) $s+1 \leqq i \leqq s+t$ のとき $3n_i+4$ 個の頂点があり



従って特に $M = \dim H^0(F, R^1\sigma_* \mathcal{O}_S)$ が成立している。
即ちMはF上の特異点の幾何種数の総和である。

さてCの特異点は cusp なので $\chi(C) = 2-2g$. Fは$\mathbb{P}^2$の3重被覆でCに沿って分岐しているから $\chi(F) = 5+4g$.
これより上記 resolution のグラフをみて

$$\chi = \chi(S) = m + 3n + 4k + 4t + 4g + 5 \qquad \text{——(1)}$$

今 $h = \dim H^1(S, \Omega_S^1)$ とおくと,

$$\chi = 2 - 4q + 2p_g + h \qquad \text{——(2)}$$

ここに $p_g = \dim H^2(S, \mathcal{O}_S)$, $q = \dim H^1(S, \mathcal{O})$.
exceptional curves は $H^2(S, \mathbb{Q})$ で一次独立であって，それらの既約成分数は $m+3n+4k+4t$ であった。Sは ample

divisor もっているから

$$h \geqq m + 3n + 4k + 4t + 1 \qquad \text{———(3)}$$

また Leray spectral sequence より次の exact sequence がある.

$$0 \longrightarrow H^1(F, \mathcal{O}_F) \longrightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S) \longrightarrow H^0(F, R^1\sigma_* \mathcal{O}_S)$$
$$\longrightarrow H^2(F, \mathcal{O}_F) \longrightarrow H^2(S, \mathcal{O}_S) \longrightarrow 0$$

なお F については次が成立している.

$$H^1(F, \mathcal{O}_F) = 0,$$

$\omega \cong \mathcal{O}_F(2e-3)$, ω は F の dualizing sheaf,

$$\dim H^0(F, \mathcal{O}_F(2e-3)) = \frac{1}{2}(e-1)(5e-4).$$

よって次の等式が得られる.

$$M + P_g = \frac{1}{2}(e-1)(5e-4) + q \qquad \text{———(4)}$$

また C の genus formula は

$$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - 3M - t - k \qquad \text{———(5)}$$

(1) ～ (5) をまとめると

$$10M + 4k + 4t - 2q \leqq 13e^2 - 9e + 2$$

一方 $x = Z_1/Z_0$, $y = Z_2/Z_0$, $z = Z_3/(Z_0)^e$ として affine 部分 $Z_0 \neq 0$ において F は $z^3 = f(x, y)$ $\left(= F(Z_0, Z_1, Z_2)/Z_0^d\right)$ で定義されている. いま X を $\mathbb{A}^3$ で $z^3 = f(x, y)$ で定義された曲面としてこれの $\mathbb{P}^3$ での閉包をとってその nonsingular model を $\tilde{X}$ とすると, Zariski [Z] によって $q(\tilde{X}) = 0$ が知られている. S と $\tilde{X}$ は双有理同値であるから $q = 0$

である．これで Th. 2.3 と次の Lem. が得られた．

Lem. 2.6. $M = \dim H^0(F, R^1\sigma_* \mathcal{O}_S)$,

$$p_g = (e-1)(5e-4)/2 - M, \quad q = 0,$$
$$\chi = 9(2e^2 - 2e + 1) - 11m - 9n,$$
$$K^2 = 3(2e-3)^2 - (m+3n).$$

するとTh 2.3 とあわせて次の主張が得られる．

Cor. 2.7. $p_g \geqq \frac{3}{5}(2e^2 - 6e + 3)$,
$$K^2 \geqq \frac{3}{10}(27e^2 - 111e + 88).$$

そこで S の構造を調べてみよう．まず $p_g \geqq 1$ なら $|K|$ を調べることにより S は第1種例外曲線なしであることがわかる．以下 MG で *minimal surface of general type* を表わすことにする．次の主張はよく知られている：

“S は第1種例外曲線なしで $P_2 = \dim H^0(S, \mathcal{O}(2K)) \geqq 1$ かつ $K^2 \geqq 1$ $\Longleftrightarrow$ S は MG”

従って，上の Cor. によれば $e \geqq 4$ なら S は MG である．次に 1-canonical map φ を調べる．まず $\mathcal{O}_S(K) \cong \mathcal{O}_S(D) \otimes \sigma^*\mathcal{O}_F(e-3)$，ここに D は $(\pi\sigma)^{-1}(C)$ に台をもつ正因子，である

ことが resolution σ を調べることで示せる．従って φ は $e \geqq 4$ のとき base point なしで $\varphi(S)$ は surface S_0 になることもわかる．従って

<u>Th. 2.8.</u>　$e \geqq 4$ のとき S は MG であり，1-canonical map φ は surface S_0 の上への morphism である．

さて，φ は C-isomorphism（定義は [B-P-V] の P. 215 を参照）になるかどうかを見よう．まず $K^2 \geqq (\deg \varphi)\cdot(\deg \varphi(S))$ がなりたつ．Lem. 2.6 によると $5m + 3n < 3(e^2 + 3e - 9)$ のとき $\deg \varphi < 3$ であることがわかる．なぜなら $\deg \varphi(S) \geqq 2p_g - 4$ であるから．従って $\deg \varphi = 1$ を得られ，Z.M.T. より φ は C-isomorphism である．また $\psi = \sigma \varphi^{-1}$ も同じく Z.M.T. より morphism になることがわかり次の結論が得られる．

<u>Th. 2.9.</u>　$e \geqq 4$ かつ $5m + 3n < 3(e^2 + 3e - 9)$ のとき

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \circlearrowleft & F \\ & S_0 \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

φ は C-isomorphism であって，morphism $\psi : S_0 \longrightarrow F$ で $\sigma = \psi\varphi$ を満すものが存在する．即ち resolution は高々有理2重点のみをもっている S_0 を経由して完

成されている。

C が nonsingular で $e \geqq 3$ なら $F = S$ でそれは MG で K は very ample である。

<u>Rem. 2.10.</u> $e = 3$ 又は 2 のとき S は MG か elliptic surface か rational surface である。とくに Ex. 2.5 から得られるものは rational surface である。これは $(\pi\sigma)^{-1}$ による C の proper transform を C' と表わすとき C' は nonsingular で

$$C'^2 = 2m + 3n + 2g - 6e^2 + 9e - 2$$

であることに注目すれば容易にわかる。S が MG でないときは C' を fiber とする fiber space が作れるのである。

Cor. 2.4 と関係して次の問いが解けない。もしそのような C が存在すれば C' を fiber とする elliptic surface S が得られる。

<u>Problem 2.11</u> elliptic curve C で $d = 9$, $r = t = 0$ かつ $n = 9$ となるものは存在するか？

この § の初に掲げた性質をもつ curve C は沢山存在

することは，ほぼ明らかであるが，なお上の remark のように微妙なこともある．そこでいくつかの具体例を作ってみよう．それに対応して曲面 S が存在することになる．

Ex. 2.12. curve C_i, $i=1,2$, は $f_i=0$ で定義されているとする．

(イ). $\deg f_1 = 3$, $\deg f_2 = e$, $e \not\equiv 0\ (3)$ かつ C_1 と C_2 は transversal に交わっているとする．このとき $\lambda_1 f_1^{\,e} + \lambda_2 f_2^{\,3}$ で定義される curve Λ は（general な λ_1, λ_2 に対して）次の性質を満している．

(1). Λ は irreducible.

(2). 各特異点は cusp で その sequence は，$3(k)$ [resp. $3(k)+2$]，ここに $e=3k+1$ [resp. $3k+2$].

(3). Λ の cusp の個数は $3e$，従って $M = 3ek$.

とくに，$k \geqq 1$ なら Th. 2.9 の条件は満されている．

(ロ). $f_1 = y^3 + x^{3e-i} + x^{3e}$ $(i = 1$ or $2)$, f_2 は一次式で C_1 と C_2 は $(0,0)$ 以外で transversal に交わっているとする．このとき $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2^{\,3e}$ で定義される curve Λ は次の性質を満している．

(1). Λ は irreducible.

(2). Λ はただ1個の特異点をもちそれは cusp

である．かつその sequence は $3(e-1)+2$ [resp. $3(e-1)$]，但し $i=1$ [resp. $i=2$].

とくに $e \geqq 4$ なら Th. 2.9 の条件は満されている．

以上 §2 の内容について詳しい証明等は [Y3] を御覧下さい。

References

[B-P-V] BARTH,W., PETERS,C., VAN DE VEN,A.: Compact complex surfaces, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3.Folge, Band 4, Springer 1983

[H] HIRZEBRUCH,F.: Some examples of algebraic surfaces. Contemporary Math. 9, 55-71(1982)

[Y1] YOSHIHARA,H.: A note on the existence of some curves. Algebraic Geometry and Commutative Algebra in Honor of M. Nagata. 801-804(1987)

[Y2] ___________ : Plane curves whose singular points are cusps. Proc. Amer. Math. Soc. 103, 737-740(1988)

[Y3] ___________ : Plane curves whose singular points are cusps and triple coverings of $\mathbf{P}^2$. manuscripta math. 64, 169-187 (1989)

[Z] ZARISKI,O.: On the linear connection index of the algebraic surfaces $z^n = f(x,y)$. Proc. Nat. Acad. Sci. 15, 494-501(1929)