92
数理解析研究所講究録
第 742 巻 1991 年 92-110

超曲面の単純K3特異点

筑波大学数学研究科　米村 崇（Takashi Yonemura）

1. 序　2次元正規孤立特異点 (X, x) で、その minimal resolution $\pi : (\tilde{X}, E) \longrightarrow (X, x)$ の例外集合 E が非特異楕円曲線1本となるものを単純楕円型特異点といい、X が超曲面の場合には、適当な局所座標 x, y, z をとれば、次の3つのいずれかの形に書くことができる（斎藤[6]）。

$\tilde{E}_6$: $x^3+y^3+z^3+\lambda_1 xyz$, $\lambda_1^3+27\neq 0$　$(E^2=-3)$

$\tilde{E}_7$: $x^2+y^4+z^4+\lambda_2 xyz$, $\lambda_2^4-64\neq 0$　$(E^2=-2)$

$\tilde{E}_8$: $x^2+y^3+z^6+\lambda_3 xyz$, $\lambda_3^6-432\neq 0$　$(E^2=-1)$

ここに λ_i は楕円曲線 E の moduli に対応するパラメータである。上の3つの式はそれぞれ weight が $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ の擬斉次多項式で、minimal resolution π はこの weight に関する blow-up 1回で得られる。

逆に、非退化な多項式 $f=\sum a_\nu z^\nu$ $(a_\nu \in \mathbb{C})$ が超曲面の単純楕円型特異点を定義することと、f の Newton boundary

$\Gamma(f) = (\bigcup_{a_\nu \neq 0} (\nu + \mathbb{R}^3_{\geq 0})$ の convex hull の compact face の和）

が、点 $(1,1,1)$ を含むような2次元の face Δ を持つことは

同値な条件であり（渡辺[9]）、擬斉次多項式 $f_0=\sum_{\nu\in\Delta}a_\nu z^\nu$ の weight は前記の3種しか現われないことが容易にわかる。

単純K3特異点は、単純楕円型特異点の3次元版として、渡辺公夫[3]により定義された。ここでは非退化な多項式 f で定義される単純K3特異点 (X,x) に対し、f_0 の weight を分類し、この weight に関する blow-up で得られる写像 $\pi:(\tilde{X},E)\longrightarrow(X,x)$ を調べる。π は一般に resolution にはならないが、$\tilde{X}$, E（Eは正規K3曲面になる）の特異点は、f がある性質をもてば f_0 の weight から完全に決定されることがわかる。この morphism π は次の性質を持つ（泊[7]）。すなわち、π は $\tilde{X}-E\cong X-\{x\}$ を満たす proper morphism で $\tilde{X}$ の特異点は高々 terminal singularity、さらに $K_{\tilde{X}}$ は π に関して numerically effective である。以下、この性質をもつ morphism を (X,x) の minimal resolution と呼ぶことにする。（2次元の場合は、この条件は本来の minimal resolution の定義と同値である。）

2. 単純K3特異点　　単純K3特異点を定義するために必要な事項を以下にまとめる。詳しくは[2],[3],[8],[9]を参照していただきたい。(X,x) を n 次元正規孤立特異点、$\pi:(\tilde{X},E)\longrightarrow(X,x)$ を1つの good resolution とする。

また必要に応じて X は十分小さな x の Stein 近傍とする。

定義 1.（渡辺 [8]）　正規孤立特異点 (X, x) に対して、多重種数 $\{\delta_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ を次のように定義する。

$$\delta_m := \dim_{\mathbb{C}} \Gamma(X-\{x\}, \mathcal{O}(mK)) / L^{2/m}(X-\{x\})$$

ここに $L^{2/m}(X-\{x\})$ は x で局所 $L^{2/m}$-可積な $X-\{x\}$ 上の正則 m 重 n 形式全体の集合である。

任意の $m\in\mathbb{N}$ に対して $\delta_m=1$ となる特異点を純楕円型特異点という。

以下 (X, x) は quasi-Gorenstein、すなわち $X-\{x\}$ 上いたる所 0 にならない正則 n 形式が存在すると仮定する。このとき、$\tilde{X}$ の canocical divisor を

$$K_{\tilde{X}} = \pi^* K_X + \sum_{i\in I} m_i E_i - \sum_{j\in J} m_j E_j \ , \quad m_i \geq 0,\ m_j > 0$$

と表わし　$E_J := \sum_{j\in J} m_j E_j$　を π の essential part と呼ぶ。(X, x) が純楕円型のとき E_J は reduced になる（石井 [2]）。

定義 2（石井 [2]）　純楕円型特異点 (X, x) が $(0, i)$-型であるとは、$H^{n-1}(E_J, \mathcal{O}_E)$ が $(0, i)$-Hodge 成分 $H^{0,i}(E_J)$ から成ることをいう。ただしここで

$$\mathbb{C} \cong H^{n-1}(E_J, \mathcal{O}_E) = Gr_F^0 H^{n-1}(E_J) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} H^{0,i}(E_J)$$　である。

<u>定義－命題３（渡辺－石井［３］）</u>　３次元正規孤立特異点 (X,x) が単純K３特異点であるとは次の同値な２条件が成り立つことをいう。

(1) (X,x) は Gorenstein かつ $(0,2)$-型の純楕円型。

(2) (X,x) は quasi-Gorenstein で、任意の minimal resolution
$\pi:(\tilde{X},E)\longrightarrow(X,x)$ に対し E は正規K３曲面。

また超曲面の特異点に関しては次が知られている。

<u>定理４（渡辺［９］）</u>　$f\in\mathbb{C}[z_1,z_2,z_3,z_4]$ を非退化な多項式で $X=\{f=0\}\subset\mathbb{C}^4$ が $x=0\in\mathbb{C}^4$ に孤立特異点を持つとする。$\Gamma(f)$ を f の Newton boundary とするとき、

$$(X,x):\text{純楕円型} \Longleftrightarrow (1,1,1,1)\in\Gamma(f)$$

さらに Δ を $(1,1,1,1)$ を相対内部に含む $\Gamma(f)$ の face とすると

$$(X,x):(0,2)\text{-型} \Longleftrightarrow \dim_{\mathbb{R}}\Delta=3$$

3. 単純K３特異点の weight

非退化な多項式 $f=\sum a_\nu z^\nu\in\mathbb{C}[z_1,z_2,z_3,z_4]$ が単純K３特異点を定義するならば、定理４より $f_0:=\sum_{\nu\in\Delta}a_\nu z^\nu$ は擬斉次多項式で、その weight が一意的に定まる。それを $\alpha(f)$ と書く。すなわち、

$$\alpha(f)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\in\mathbb{Q}_+^4,\quad \sum_{i=1}^{4}\alpha_i\nu_i=1\quad({}^\forall\nu\in\Delta)$$

とする。特に $\sum_{i=1}^{4}\alpha_i=1$ である。従って単純K3特異点のweight の集合 W_4 は次のように表わすことができる。

$$W':=\{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\in\mathbb{Q}_+^4 \mid \sum_{i=1}^{4}\alpha_i=1\}$$

とおき、$\alpha\in W'$ に対して

$$T(\alpha):=\{\nu\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^4 \mid \alpha\cdot\nu=1\}$$

と定めるとき

$$W_4=\{\alpha\in W' \mid (1,1,1,1)\in\mathrm{Int}\,(\text{convex hull of } T(\alpha) \text{ in } \mathbb{R}^4)\}$$

である。$\alpha\in W_4$ は $\alpha_1\geqq\alpha_2\geqq\alpha_3\geqq\alpha_4$ と仮定しておく。$\alpha\in W_4$ を

(*) $\alpha=\left(\frac{p_1}{p},\frac{p_2}{p},\frac{p_3}{p},\frac{p_4}{p}\right),\ p,p_i\in\mathbb{Z}_+,\ \gcd(p_1,p_2,p_3,p_4)=1$

の形に書くと、定義より次が成立することがわかる。

<u>命題5</u> (1) $p_1+p_2+p_3+p_4=p$

(2) 相異なる i,j,k に対して、$\gcd(p_i,p_j,p_k)=1$

(3) $a_{ij}:=\gcd(p_i,p_j)$ とおくと $a_{ij}\mid p$

また W_4 の weight は、手間はかかるが初等的な方法ですべて求めてしまうことができる。その結果は最後に表15としてまとめてある。分類の過程で次がわかる。

命題5（続き）　(4)　$\# W_4 = 95$

(5) 任意の i に対して $p_i | p$ または $p_i | (p - p_j)$ for $\exists j$

注6.　M.Reid 氏は論文 [5] の中で、ある性質をもった weight の集合 A_4' を定義し、それが次のように特徴づけられ 95個の元から成ることを述べている。

$A_4' = \{ \alpha \in \mathbb{Q}_+^4 \mid \alpha$ を(*)の形に書くとき①〜③が成立 $\}$

① $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = p$

② 任意の i に対して $p_i | (p - p_j)$ for $\exists j$ ($i = j$ でもよい)

③ ②ですべての $i = 1, 2, 3, 4$ に対し j が同一のものにならないようにとれる。

この③の条件は、命題5の(2)でおきかえられることが容易に確かめられる。従って $A_4' = W_4$ であり、さらに M.Reid 氏の結果により、W_4 は命題5の(1), (2), (5)で特徴づけられることがわかる。

補足7.　変数の数を一般に n として W_n を定義すると、$W_3 = \{ (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \}$ で、任意の i に対して $p_i | p$ が成り立つが、$n \geq 5$ の場合は命題5の(5)も成り立たなくなる。すなわち擬斉次多項式では定義できない $(0, n-1)$-型の純楕円型特異点の weight が存在する。

4. Minimal resolution　　ここでの minimal resolution とは、1の最後に述べた一般には resolution ではない morphism のこととする。$f \in \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3, z_4]$ を非退化な多項式とし、$X = \{f = 0\} \subset \mathbb{C}^4$ が $x = 0 \in \mathbb{C}^4$ に単純K3特異点をもつとき、

定理8（泊[7]）　$\pi : (\tilde{X}, E) \longrightarrow (X, x)$ を weight $\alpha(f)$ の filtered blow-up とすると、π は (X, x) の minimal resolution である。

$\tilde{X}, E$ の特異点を具体的に記述するため、この morphism π を torus embedding により構成する。

$\alpha \in W_4$ に対し $\mathbb{C}^4$ の原点 0 の weight α の blow-up を

$$\Pi : (V, F) \longrightarrow (\mathbb{C}^4, 0)$$

とする。Π は次のように構成される。

$$E_1 = (1,0,0,0), \cdots, E_4 = (0,0,0,1), P = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^4$$

とし、$\mathbb{R}^4$ の第一象限 $\sigma = \langle E_1, E_2, E_3, E_4 \rangle := \sum_{i=1}^{4} \mathbb{R}_{\geq 0} E_i$ を4つの cone

$$\sigma_i = \langle E_j, E_k, E_l, P \rangle \qquad \{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

に分割し、cone の包含関係 $\sigma_i \subset \sigma$ より得られる morphism

$$V_i := \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[\check{\sigma}_i \cap \mathbb{Z}^4] \longrightarrow \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[\check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^4] = \mathbb{C}^4$$

をはり合わせてできる morphism

$$V := \bigcup_{i=1}^{4} V_i \longrightarrow \mathbb{C}^4$$

がΠである。($\check{\sigma}$はσの dual cone を表わす。) Πの例外集合Fは weighted projective space $\mathbb{P}(p_1, p_2, p_3, p_4)$ である。Fの divisor D_i を $D_i := F - V_i$ で定義する。

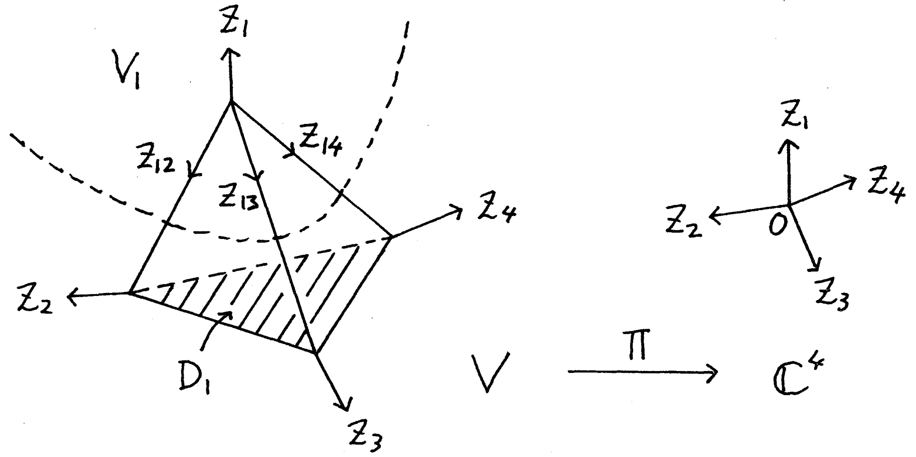
このとき$\tilde{X}$はΠによるXの proper transform であり、

$$\pi = \Pi|_{\tilde{X}}, \quad E = \pi^{-1}(x)$$

となる。V_i の parameter system として、

$z_i, z_{ij}, z_{ik}, z_{il}$ ただし $z_{ij} = z^{b_{ij}}$, $b_{ij} = (p_i E_j - p_j E_i)/a_{ij}$

がとれる。



fに関する非退化という条件より、$\tilde{X}, E$ の特異点を調べるには、Vおよび $F = \mathbb{P}(p_1, p_2, p_3, p_4)$ の特異点を調べればよいことがわかる。命題5の(2)を満たす任意の(p_1, p_2, p_3, p_4)に関する blow-up に対して次の命題が成り立つ。

命題9　(1) $V_i \cap V_j \cong \mathbb{C}^* \times \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\check{\tau}_{ij} \cap \mathbb{Z}^3]$

ただし、$\tau_{ij} = \langle (0,1,0), (0,0,1), (a_{ij}, p_k, p_l) \rangle$

(2) $\{z_{ij} = 0\}$ in $V_i \cong \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\check{\rho}_{ij} \cap \mathbb{Z}^3]$

ただし、$\rho_{ij} = \langle (0,1,0), (0,0,1), (p_i, p_k, p_l) \rangle$

特に $\alpha \in W_4$ のときは命題5(1),(3)より次を得る。

系10　(1) $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\check{\tau}_{ij} \cap \mathbb{Z}^3]$ の特異点は高々 terminal

(2) $p_i | (p - p_j)$ ならば $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\check{\rho}_{ij} \cap \mathbb{Z}^3]$ も高々 terminal

また F の特異点についてはやはり一般に命題5(2)を満たす (p_1, p_2, p_3, p_4) に対して次が成り立つ。$p_i = a_i a_{ij} a_{ik} a_{il}$ によって整数 a_i を定める。

命題11　(1) $\det(\sigma_{ij}) = a_{ij}$ となる $\mathbb{R}^2$ の cone σ_{ij} があって

$$F - (D_i \cup D_j) \cong \mathbb{C}^* \times \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\check{\sigma}_{ij} \cap \mathbb{Z}^2]$$

さらに $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\check{\sigma}_{ij} \cap \mathbb{Z}^2]$ の特異点が A 型となるための必要十分条件は $a_{ij} | (p_k + p_l)$ となることである。

(2) $D_i - D_j$ の特異点が A 型となるための必要十分条件は $p_j | (a_{jk} p_l + a_{jl} p_k)$ となることである。このとき特異点は $A_{a_j a_{ij} - 1}$ 型になる。よって特に $\alpha \in W_4$ で $p_j | (p - p_i)$ なら

ば $D_i - D_j$ の特異点は A_{p_j-1} 型になる。

5. Eの特異点　　4で準備した命題を用いて E の特異点を記述する。f は4と同じでさらに次の条件を仮定する。

(☆) 各 i に対して、f_0 は z_i^n または $z_i^m z_j$ の形の項を持つ。

命題5 (5) より任意の $\alpha \in W_4$ に対して (☆) を満たす f で $\alpha(f) = \alpha$ となるものがとれる。命題11 および 図[4, Lemma 4.8 とその証明] を用いて次の結果を得る。

<u>補題12</u>　(1) E は $A_{a_{ij}-1}$ 型特異点を γ_{ij} 個持つ。ただし $\gamma_{ij} := \#\{\nu \in \Delta \cap \mathbb{Z}^4 \mid \nu_k = \nu_l = 0\} - 1$ である。

(2) f_0 が z_i^n の形の項を持たず、$z_i^m z_j$ の形の項を持てば、E は A_{p_i-1} 型特異点を1個持つ。

(3) E の特異点は上記の (1), (2) のみである。

この補題は E の特異点が (weight ではなく) Δ の情報、すなわち f の Newton boundary $\Gamma(f)$ から記述されることを示すものであるが、実は f_0 が (☆) を満たす場合には weight さえ同じならば $\Gamma(f)$ (従って Δ) が変化しても E の特異点は変わらない。すなわち次が成立する。

<u>定理13</u>　Eの特異点の種類および個数は $\alpha(f)$ によって決まり f のとり方によらない。その内容は

$$A_{a_{ij}-1} \text{ が } t_{ij} \text{ 個}, \quad A_{p_i-1} \text{ が } \sigma_i \text{ 個}$$

である。ただしここで、

$$t_{ij} = \#\{\nu \in T(\alpha) \mid \nu_k = \nu_\ell = 0\} - 1$$

$$\sigma_i = \begin{cases} 0 & (p_i | p \text{ のとき}) \\ 1 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

である。

証明は省くが、その本質的な部分は命題5の(5)において $p_i|p$ と $p_i|(p-p_j)$ が同時に成立するとき（すなわち f_0 が z_i^n, $z_i^m z_j$ の形の項を同時に含み得るとき）、$a_{ij}=p_i$ となり、命題11の(1)と(2)の特異点が共に $A_{a_{ij}-1}$ 型となる点にある。

また定理13において f_0 に関する条件(☆)は必要である。実際 weight $(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{5})$ を持つ次の3つの多項式

$g_0 = x^4+y^4+z^4+w^4$　　（これだけが(☆)を満たす。）

$g_1 = x^4+y^4+z^4+(x^2+y^2+z^2)w^2+w^5$

$g_2 = x^4+y^4+z^4+(x^2w+y^2w+z^3)w+w^5$

を考えると、Eの特異点は順に、なし、A_1 1つ、A_2 1つ となる。

6. Eの特異点のrankとf_0のパラメータの個数の関係

定理13よりfが(☆)を満たせば$\alpha(f)$からEの特異点が決まるから、そのrankを$r(\alpha)$と書く。すなわち

$$r(\alpha)=\sum_{i<j} t_{ij}(a_{ij}-1)+\sum_{i=1}^{4}\sigma_i(p_i-1)$$

である。

また$\alpha(f)=\alpha$となる多項式fに対し、f_0は一般に$t(\alpha):=\#T(\alpha)$個の項を持つ。このときweight αを保つ座標変換$z\longmapsto w$

$$z_i=\sum_{\nu\in N_i(\alpha)} b_{i\nu}w^{\nu},\quad N_i(\alpha)=\{\nu\in T(\alpha)\mid \sum_{j=1}^{4}\nu_j p_j=p_i\}$$

を適当にとれば、$f(w)$が$t(\alpha)-n(\alpha)+4$個の項を持つようにでき、そのうちの4つは係数を1にとれる。ただしここで、$n(\alpha):=\sum_{i=1}^{4}\#N_i(\alpha)$とする。すなわち$t(\alpha)-n(\alpha)$を$f_0$のパラメータの個数と考えられる。このとき次が成り立つ。

<u>系14</u>　$\alpha\in W_4$に対し、$t(\alpha)-n(\alpha)+r(\alpha)=19$

最後に、W_4に属する95個のweightと、fの例、Eの特異点、$t(\alpha)$, $n(\alpha)$, $r(\alpha)$を表にまとめておく。実はfとして擬斉次多項式（すなわち$f=f_0$）となるものがとれる。ここではそのうち項の数が最小になるようなfを選んである。

表15

No.	α	f	Eの特異点	$t(\alpha)$	$n(\alpha)$	$r(\alpha)$
1	$(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$	$x^4+y^4+z^4+w^4$	なし	35	16	0
2	$(\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{6})$	$x^3+y^4+z^4+w^6$	$3A_1+4A_2$	15	7	11
3	$(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6})$	$x^3+y^3+z^6+w^6$	$3A_1$	30	14	3
4	$(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{12})$	$x^3+y^3+z^4+w^{12}$	$3A_3$	21	11	9
5	$(\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6})$	$x^2+y^6+z^6+w^6$	なし	39	20	0
6	$(\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{10})$	$x^2+y^5+z^5+w^{10}$	$5A_1$	28	14	5
7	$(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{8})$	$x^2+y^4+z^8+w^8$	$2A_1$	35	18	2
8	$(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{12})$	$x^2+y^4+z^6+w^{12}$	$2A_1+2A_2$	27	14	6
9	$(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{20})$	$x^2+y^4+z^5+w^{20}$	A_1+2A_4	23	13	9
10	$(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{12},\frac{1}{12})$	$x^2+y^3+z^{12}+w^{12}$	A_1	39	21	1
11	$(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{10},\frac{1}{15})$	$x^2+y^3+z^{10}+w^{15}$	$3A_1+2A_2+A_4$	18	10	11
12	$(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{18})$	$x^2+y^3+z^9+w^{18}$	$3A_1+A_2$	30	16	5
13	$(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{8},\frac{1}{24})$	$x^2+y^3+z^8+w^{24}$	$2A_2+A_3$	27	15	7
14	$(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{7},\frac{1}{42})$	$x^2+y^3+z^7+w^{42}$	$A_1+A_2+A_6$	24	14	9
15	$(\frac{1}{3},\frac{4}{15},\frac{1}{5},\frac{1}{5})$	$x^3+y^3z+z^5+w^5$	$5A_2+A_3$	12	6	13
16	$(\frac{1}{3},\frac{7}{24},\frac{1}{4},\frac{1}{8})$	$x^3+y^3w+z^4+w^8$	$A_1+4A_2+A_6$	9	5	15
17	$(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{2}{15})$	$x^3+y^3+z^5+zw^6$	A_1+3A_4	14	8	13
18	$(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{9},\frac{1}{9})$	$x^3+y^3+z^4w+w^9$	A_1+3A_2	23	11	7

No.	α	f	Eの特異点	$t(\alpha)$	$n(\alpha)$	$r(\alpha)$
19	$(\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8})$	$x^2y + y^4 + z^4 + w^8$	$4A_1 + A_2$	24	11	6
20	$(\frac{3}{8}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{24})$	$x^2z + y^3 + z^4 + w^{24}$	$A_1 + A_2 + A_8$	18	10	11
21	$(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$	$x^2y + y^5 + z^5 + w^5$	A_1	34	16	1
22	$(\frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{15})$	$x^2z + y^3 + z^5 + w^{15}$	$2A_2 + A_5$	21	11	9
23	$(\frac{5}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$	$x^2z + y^4 + z^6 + w^6$	$6A_1 + A_4$	17	8	10
24	$(\frac{5}{12}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12})$	$x^2z + y^3 + z^6 + w^{12}$	$3A_1 + A_4$	24	12	7
25	$(\frac{4}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9})$	$x^2z + y^3 + z^9 + w^9$	A_3	33	17	3
26	$(\frac{9}{20}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10})$	$x^2w + y^4 + z^5 + w^{10}$	$5A_1 + A_8$	13	7	13
27	$(\frac{11}{24}, \frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12})$	$x^2w + y^3 + z^8 + w^{12}$	$3A_1 + A_{10}$	15	9	13
28	$(\frac{10}{21}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{21})$	$x^2w + y^3 + z^7 + w^{21}$	A_9	24	14	9
29	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{15})$	$x^2 + y^5 + z^6 + yw^6$	$2A_1 + A_2 + A_3 + 2A_4$	10	6	15
30	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{7}{40}, \frac{1}{8})$	$x^2 + y^5 + z^5w + w^8$	$A_3 + 2A_4 + A_6$	8	6	17
31	$(\frac{1}{2}, \frac{5}{24}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8})$	$x^2 + y^4z + z^6 + w^8$	$2A_2 + 2A_3 + A_4$	12	7	14
32	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{14}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7})$	$x^2 + y^4z + z^7 + w^7$	$7A_1 + A_2$	19	9	9
33	$(\frac{1}{2}, \frac{2}{9}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9})$	$x^2 + y^4w + z^6 + w^9$	$4A_1 + 2A_2 + A_3$	16	8	11
34	$(\frac{1}{2}, \frac{7}{30}, \frac{1}{5}, \frac{1}{15})$	$x^2 + y^4w + z^5 + w^{15}$	$5A_1 + A_2 + A_6$	13	7	13
35	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{3}{28})$	$x^2 + y^4 + z^7 + zw^{18}$	$A_1 + A_2 + 2A_6$	12	8	15
36	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{20}, \frac{1}{10})$	$x^2 + y^4 + z^6w + w^{10}$	$2A_1 + A_2 + 2A_4$	16	9	12
37	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{1}{16})$	$x^2 + y^4 + z^5w + w^{16}$	$A_2 + 2A_3$	24	13	8
38	$(\frac{1}{2}, \frac{4}{15}, \frac{1}{5}, \frac{1}{30})$	$x^2 + y^3z + z^5 + w^{30}$	$A_1 + A_2 + A_7$	21	12	10

No.	α	f	Eの特異点	$t(\alpha)$	$n(\alpha)$	$r(\alpha)$
39	$(\frac{1}{2}, \frac{5}{18}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18})$	$x^2+y^3z+z^6+w^{18}$	$2A_2+A_4$	24	13	8
40	$(\frac{1}{2}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{14})$	$x^2+y^3z+z^7+w^{14}$	$3A_1+A_3$	27	14	6
41	$(\frac{1}{2}, \frac{7}{24}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12})$	$x^2+y^3z+z^8+w^{12}$	$2A_1+2A_2+A_6$	16	9	12
42	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10})$	$x^2+y^3z+z^{10}+w^{10}$	A_2	36	19	2
43	$(\frac{1}{2}, \frac{11}{36}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12})$	$x^2+y^3w+z^9+w^{12}$	$A_1+2A_2+A_{10}$	12	8	15
44	$(\frac{1}{2}, \frac{5}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16})$	$x^2+y^3w+z^8+w^{16}$	$2A_1+A_4$	28	15	6
45	$(\frac{1}{2}, \frac{9}{28}, \frac{1}{7}, \frac{1}{28})$	$x^2+y^3w+z^7+w^{28}$	A_1+A_8	24	14	9
46	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{11}, \frac{5}{66})$	$x^2+y^3+z^{11}+zw^{12}$	$A_1+A_2+A_4+A_{10}$	9	7	17
47	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{21}, \frac{1}{14})$	$x^2+y^3+yz^7+w^{14}$	$A_1+2A_2+A_3+A_6$	13	8	14
48	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{48}, \frac{1}{16})$	$x^2+y^3+z^9w+w^{16}$	$2A_2+A_4+A_7$	12	8	15
49	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{42}, \frac{1}{21})$	$x^2+y^3+z^8w+w^{21}$	$3A_1+A_4+A_6$	15	9	13
50	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{15}, \frac{1}{30})$	$x^2+y^3+yz^5+w^{30}$	$A_1+A_3+A_4$	25	14	8
51	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{36}, \frac{1}{36})$	$x^2+y^3+z^7w+w^{36}$	A_4+A_5	24	14	9
52	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{7}{36})$	$x^3+y^4+xz^3+zw^4$	$A_2+A_3+A_6+A_7$	5	4	18
53	$(\frac{1}{3}, \frac{5}{18}, \frac{2}{9}, \frac{1}{6})$	$x^3+y^3w+xz^3+w^6$	$A_1+3A_2+A_3+A_4$	10	5	14
54	$(\frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \frac{5}{21}, \frac{1}{7})$	$x^3+y^3w+yz^3+w^7$	$3A_2+A_4+A_5$	9	5	15
55	$(\frac{7}{20}, \frac{3}{10}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10})$	$x^2y+y^3w+z^4+w^{10}$	$3A_1+A_5+A_6$	11	6	14
56	$(\frac{11}{30}, \frac{4}{15}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6})$	$x^2y+y^3z+z^5+w^6$	$A_1+A_7+A_{10}$	6	5	18
57	$(\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{24}, \frac{1}{6})$	$x^2y+y^4+xz^3+w^6$	$2A_1+A_2+A_4+A_8$	8	5	16
58	$(\frac{3}{8}, \frac{5}{16}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16})$	$x^2z+y^3w+z^4+w^{16}$	$A_1+A_4+A_5$	19	10	10

No.	α	f	Eの特異点	$t(\alpha)$	$n(\alpha)$	$r(\alpha)$
59	$(\frac{8}{21}, \frac{1}{3}, \frac{5}{21}, \frac{1}{21})$	$x^2z+y^3+z^4w+w^{21}$	A_4+A_7	18	10	11
60	$(\frac{7}{18}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{1}{18})$	$x^2z+y^3+yz^3+w^{18}$	$A_1+A_3+A_6$	19	10	10
61	$(\frac{11}{28}, \frac{1}{4}, \frac{3}{14}, \frac{1}{7})$	$x^2z+y^4+z^4w+w^7$	$2A_1+A_5+A_{10}$	7	5	17
62	$(\frac{2}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{3}{20})$	$x^2z+y^4+z^5+yw^5$	$A_2+2A_3+A_7$	10	6	15
63	$(\frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10})$	$x^2z+y^3w+z^5+w^{10}$	$2A_1+A_2+A_3$	23	11	7
64	$(\frac{5}{12}, \frac{7}{24}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8})$	$x^2z+y^3w+z^6+w^8$	$A_1+A_6+A_9$	10	7	16
65	$(\frac{14}{33}, \frac{1}{3}, \frac{5}{33}, \frac{1}{11})$	$x^2z+y^3+z^6w+w^{11}$	A_4+A_{13}	9	7	17
66	$(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7})$	$x^2z+y^3w+z^7+w^7$	A_1+A_2	31	15	3
67	$(\frac{3}{7}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{2}{21})$	$x^2z+y^3+z^7+yw^7$	$A_1+2A_2+A_8$	14	8	13
68	$(\frac{13}{30}, \frac{1}{3}, \frac{2}{15}, \frac{1}{10})$	$x^2z+y^3+yz^5+w^{10}$	$A_1+A_3+A_{12}$	10	7	16
69	$(\frac{7}{16}, \frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{1}{8})$	$x^2w+y^4+yz^4+w^8$	$4A_1+A_2+A_6$	14	7	12
70	$(\frac{4}{9}, \frac{5}{18}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9})$	$x^2w+y^3z+z^6+w^9$	$2A_1+A_4+A_7$	14	8	13
71	$(\frac{7}{15}, \frac{4}{15}, \frac{1}{5}, \frac{1}{15})$	$x^2w+y^3z+z^5+w^{15}$	A_3+A_6	22	12	9
72	$(\frac{7}{15}, \frac{1}{3}, \frac{2}{15}, \frac{1}{15})$	$x^2w+y^3+yz^5+w^{15}$	A_1+A_6	26	14	7
73	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{4}{25}, \frac{7}{50})$	$x^2+y^5+yz^5+zw^6$	$A_1+A_4+A_6+A_7$	6	5	18
74	$(\frac{1}{2}, \frac{7}{32}, \frac{5}{32}, \frac{1}{8})$	$x^2+y^4w+yz^5+w^8$	$2A_3+A_4+A_6$	9	6	16
75	$(\frac{1}{2}, \frac{5}{22}, \frac{2}{11}, \frac{1}{11})$	$x^2+y^4w+y^2z^3+z^5w+w^{11}$	$5A_1+A_3+A_4$	14	7	12
76	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{13}, \frac{5}{26}, \frac{1}{13})$	$x^2+y^4w+yz^4+w^{13}$	$4A_1+A_4+A_5$	13	7	13
77	$(\frac{1}{2}, \frac{7}{26}, \frac{5}{26}, \frac{1}{26})$	$x^2+y^3z+z^5w+w^{26}$	A_4+A_6	21	12	10
78	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{11}, \frac{2}{11}, \frac{1}{22})$	$x^2+y^3z+yz^4+w^{22}$	$A_1+A_3+A_5$	22	12	9

No.	α	f	Eの特異点	$l(\alpha)$	$n(\alpha)$	$r(\alpha)$
79	$(\frac{1}{2},\frac{9}{32},\frac{5}{32},\frac{1}{16})$	$x^2+y^3z+z^6w+w^{16}$	$2A_1+A_4+A_8$	13	8	14
80	$(\frac{1}{2},\frac{13}{44},\frac{5}{44},\frac{1}{11})$	$x^2+y^3z+z^8w+w^{11}$	$A_1+A_4+A_{12}$	9	7	17
81	$(\frac{1}{2},\frac{4}{13},\frac{3}{26},\frac{1}{13})$	$x^2+y^3w+yz^6+w^{13}$	$3A_1+A_2+A_7$	16	9	12
82	$(\frac{1}{2},\frac{7}{22},\frac{3}{22},\frac{1}{22})$	$x^2+y^3w+yz^5+w^{22}$	A_2+A_6	25	14	8
83	$(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{5}{54},\frac{2}{27})$	$x^2+y^3+z^{10}w+yw^9$	$A_1+A_3+A_4+A_8$	10	7	16
84	$(\frac{1}{3},\frac{7}{27},\frac{2}{9},\frac{5}{27})$	$x^3+y^3z+xz^3+yw^4$	$A_2+A_4+A_5+A_6$	6	4	17
85	$(\frac{5}{14},\frac{2}{7},\frac{3}{14},\frac{1}{7})$	$x^2y+y^3w+xz^3+w^7$	$3A_1+A_2+A_3+A_4$	13	6	12
86	$(\frac{9}{25},\frac{7}{25},\frac{1}{5},\frac{4}{25})$	$x^2y+y^3w+z^5+zw^5$	$A_3+A_6+A_8$	7	5	17
87	$(\frac{5}{13},\frac{4}{13},\frac{3}{13},\frac{1}{13})$	$x^2z+xy^2+z^4w+w^{13}$	$A_2+A_3+A_4$	20	10	9
88	$(\frac{11}{27},\frac{1}{3},\frac{5}{27},\frac{2}{27})$	$x^2z+y^3+z^5w+xw^8$	$A_1+A_4+A_{10}$	11	7	15
89	$(\frac{5}{11},\frac{3}{11},\frac{2}{11},\frac{1}{11})$	$x^2w+xy^2+yz^4+w^{11}$	$A_1+A_2+A_4$	24	12	7
90	$(\frac{1}{2},\frac{7}{34},\frac{3}{17},\frac{2}{17})$	$x^2+y^4z+y^2w^5+z^5w+zw^7$	$2A_1+A_3+A_5+A_6$	8	5	16
91	$(\frac{1}{2},\frac{4}{19},\frac{3}{19},\frac{5}{38})$	$x^2+y^4z+yz^5+yw^6+z^3w^4$	$A_1+A_4+A_5+A_7$	7	5	17
92	$(\frac{1}{2},\frac{11}{38},\frac{5}{38},\frac{3}{38})$	$x^2+y^3z+yw^9+z^7w+zw^{11}$	$A_2+A_4+A_{10}$	10	7	16
93	$(\frac{1}{2},\frac{5}{17},\frac{2}{17},\frac{3}{34})$	$x^2+y^3z+yz^6+yw^8+zw^{10}$	$A_1+A_2+A_3+A_9$	11	7	15
94	$(\frac{7}{19},\frac{5}{19},\frac{4}{19},\frac{3}{19})$	$x^2y+y^3z+z^4w+xw^4$	$A_2+A_3+A_4+A_6$	9	5	15
95	$(\frac{7}{17},\frac{5}{17},\frac{3}{17},\frac{2}{17})$	$x^2z+xy^2+z^5w+yw^6$	$A_1+A_2+A_4+A_6$	13	7	13

なお、正規K3曲面Eの特異点に関して、A.R.Fletcher氏の論文[1]に、これと同じ表が存在する。

参考文献

[1] A.R. Fletcher, Plurigenera of 3-folds and weighted hypersurfaces, thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy at the University of Warwick, 1988.

[2] S. Ishii, On isolated Gorenstein singularities, Math. Ann. 270 (1985), 541-554.

[3] S. Ishii and K. Watanabe, *On simple K3 singularities* (in Japanese), *Notes appearing in the Proceedings of the Conference on Algebraic Geometry at Tokyo Metropolitan Univ*, 1988, 20-31.

[4] M. Oka, *On the resolution of hypersurface singularities*, in Complex *Analytic Singularities* (T. Suwa and P. Wagreich, eds.), *Advanced Studies in Pure Math*. 8, Kinokuniya, Tokyo and North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1986, 405-436.

[5] M. Reid, *Canonical 3-folds*, *Journées de Géometrie algébrique d'Angers*, (A. Beauville, ed.), Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980, 273-310

[6] K. Saito, Einfach-elliptische Singularitäten, Invent. Math. 23 (1974), 289-325.

[7] M. Tomari, The canonical filtration of higher dimensional

purely elliptic singularity of a special type, preprint, 1989.

[8] K. Watanabe, *On plurigenera of normal isolated singularities, I*, Math. Ann. 250 (1980), 65-94.

[9] K. Watanabe, *On plurigenera of normal isolated singularities, II*, in Complex Analytic Singularities (T. Suwa and P. Wagreich, eds.), Advanced Studies in Pure Math. 8, Kinokuniya, Tokyo and North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1986, 671-685.