数理解析研究所講究録
第 743 巻 1991 年 104-108

Quasi-Similarity on Unbounded Operators

九州芸工大　太田 昇一　(Schôichi Ôta)

1. T を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ において、稠密な定義域をもつ linear operator とする。もしも、T が

$$\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^*) \quad \text{かつ}$$

$$\|Tx\| \geqq \|T^*x\| \quad \text{for } \forall x \in \mathcal{D}(T)$$

($\mathcal{D}(T)$: T の定義域) を満たすとき、T は formally hyponormal と言われる。さらに、T が $TT^* = T^*T$ を満たすとき、T は normal と言われる。

T が subnormal であるとは、$\mathcal{H}$ を closed subspace として含む適当な Hilbert 空間 K と、K 上の normal operator N が存在して、

$$\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(N) \quad \text{かつ}$$

$$T\eta = N\eta \quad \text{for } \forall \eta \in \mathcal{D}(T)$$

が成り立つときをいう。

subnormal operator は formally hyponormal であることを注意しておきます。さらに、formally hyponormal operator T は closable で、その closure $\overline{T}$ もまた formally hyponormal になることも注意する。

2. X を Hilbert 空間 $\mathcal{H}_1$ から $\mathcal{H}_2$ への bounded operator とします。X が one to one で dense range をもつとき，X を quasi-invertible と呼ぶことにします。　A, B をそれぞれ $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ における稠密な定義域をもつ linear operator とします。A が B に quasi-affine であるとは、適当な $\mathcal{H}_1$ から $\mathcal{H}_2$ への quasi-invertible operator X_{AB} が存在して、

$$X_{AB} \cdot A \subseteq B \cdot X_{AB}$$

を満たすことをいう。

A が B に quasi-affine であり，B も A に quasi-affine なとき，A は B に quasi-similar という。

quasi-similarity は equivalence relation であり，A と B が quasi-similar ならば，A^* と B^* も quasi-similar である。

3. 次の定理は有界作用素論において知られている Clary (1975) の結果に対応している．

<u>定理</u>. Quasi-similar closed formally hyponormal operators のスペクトルは同じ。

4. 次の定理は Douglas (1969) の結果が、非有界でも成立することを言っている．

<u>定理</u>. A と B を normal operators とする。A が B に

quasi-affine ならば、AとBは unitarily equivalent である。

5. 作用素の quasi-similarity に関する諸結果は、非有界 *-表現論においてあらわれるそれらと酷似している。たとえば、[4] において得られた「π を *-環の closed *-representation としたとき、もしその adjoint 表現 π^* が π に quasi-affine ならば、π は Powers の意味で selfadjoint ($\pi=\pi^*$) になる」に対応して、「closed symmetric operator T の adjoint T^* が T に quasi-affine ならば、T は selfadjoint である」なる命題が考えられるが、これは初等的計算ですぐわかる。

6. 上記の5に関連して、T を normal にすると一般に T^* が T に unitarily equivalent でも T は selfadjoint にならない(有界作用素の範囲で反例が知られている)が、normal operator A が、ある selfadjoint operator に quasi-affine ならば A は selfadjoint になる。

次の定理は、Stampfli-Saffern, Radjavi-Rosenthal の結果(1970)を非有界な場合に拡張したものです。$\rho(T)$ は T の resolvent 集合を示す。

<u>定理</u>. S を $\rho(\bar{S})\neq\phi$ なる subnormal operator とする。もしも、ある normal operator B があって、B が S に quasi-affine

ならば、$\overline{S}$もnormalで$\overline{S}$とBはunitarily equivalentになる。

7. もっと一般には次の定理が得られる.

<u>定理</u> AをHilbert space $\mathcal{H}$におけるsubnormal operatorとする。$\mathcal{H}$上のnormal operatorでAにquasi-affineなものが存在するとする。このとき,

(イ) Aは同じHilbert space $\mathcal{H}$上にunique normal extension $\overline{A}_1 + i\overline{A}_2$をもつ. ここに、$A_1$, A_2はAのreal-, imaginary partを示す.

(ロ) NをAの(possibly larger) Hilbert space Kへのnormal extensionとするとき、Nの$\mathcal{H}$への制限$N|_{\mathcal{D}(N)\cap\mathcal{H}}$は$\mathcal{H}$上のnormal operatorで, $\overline{A}_1 + i\overline{A}_2$とunitarily equivalentになる.

8. Hilbert space $\mathcal{H}$上のdensely defined operator $A = A_1 + iA_2$ (A_1, A_2 : essentially selfadjoint)が与えられていたとする. もしも、$\overline{A}_1$と$\overline{A}_2$のspectral projectionsが互いに可換ならば、Aは同じ空間$\mathcal{H}$上にuniqueにnormal extension $\overline{A}_1 + i\overline{A}_2$をもつ.

文献

1. S. Clary, *Equality of quasi-similar hyponormal operators*, Proc. Amer. Math. Soc., 53 (1975), 88–90

2. R. G. Douglas, *On the operator equations $S^*XT = X$ and related topics*, Acta Sci. Math., (Szeged), 30 (1969), 19–32

3. S. Ôta and K. Schmüdgen, *On some classes of unbounded operators*, Integral Equations and Operator Theory, 12 (1989), 211–226

4. S. Ôta, *Quasi-affinity for unbounded representations*, to appear in Math. Nachr.

5. H. Radjavi and P. Rosenthal, *On roots of normal operators*, J. Math. Anal. Appl., 34 (1971), 653–664

6 B. Sz-Nagy and C. Foias, *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*, North-Holand, Amsterdam 1970.

7. J. P. Williams, *Operators similar to their adjoints*, Proc. Amer. Math. Soc., 20 (1969), 121–123.