数理解析研究所講究録
第 750 巻 1991 年 91-94

正則包合的な二重特性多様体を持つ双曲型方程式
—解の性質についての一注意.

岡田 靖則 (お茶大・理)
戸瀬 信之 (東大・理)

Mを実解析的多様体、Xをその複素化としよう。$\rho \in \dot{T}^*_M X$の近傍で定義された microdifferential operator $P = P_1 P_2 + (\text{lower})$を考える。$p_j = \sigma(P_j)$ $(j=1,2)$として次の条件を考える。

(1) p_jは$T^*_M X$上実数値

(2) $dp_1 \wedge dp_2 \wedge \omega_M \neq 0 \quad \text{at } \rho$

(3) $\{p_1, p_2\}\big|_{p_1 = p_2 = 0} = 0$

(4) $p_1(\rho) = p_2(\rho) = 0$

この作用素の解の特異性の伝播は、第2超局所的に戸瀬[1, 2]により研究されてきた。この小論では、岡田[3]により得られたC^∞級の特異性に関する結果がC^ω級の枠組でも成立することを示す。

定理: $u \in \mathcal{C}_{M,\rho}$が$Pu = 0$を満たすとしよう。この時、$u_1, u_2 \in \mathcal{C}_{M,\rho}$が存在し次の(a)-( )を満たす。

(a) $u = u_1 + u_2$

(c) $\mathcal{P} u_j = 0 \quad (j=1,2)$

(d) $\mathrm{supp}(u_j)$ は H_{p_j} により不変である.

(証明) 実量子化接触変換に $\mathcal{P} = D_1 D_2 + (\text{lower})$ と仮定してもよい。$\mathcal{P}$ の二重特性多様体 $V = \{(x;\sqrt{-1}\xi\cdot dx);\ \xi_1 = \xi_2 = 0\}$ 上でのみ考えると十分.

$V^{\mathbb{C}}$ を V の T^*X 中の複素化として, V の部分複素化 $\tilde{V}$ を $V^{\mathbb{C}}$ の陪特性体で V を通るものとする。$\mathcal{C}_{\tilde{V}}$ を (z_1, z_2) を正則パラメーターに持つマイクロ函数の層とするとき,

$$\mathcal{A}^2_V := \mathcal{C}_{\tilde{V}}\big|_V$$

とおく。$\dot{T}^*_V\tilde{V}$ 上には相原の層 $\mathcal{C}^2_V$ が構成されている. 更には, その部分層 $\tilde{\mathcal{C}}^2_V$ があり次の完全列を満たす。

$$0 \to \mathcal{A}^2_V \to \mathcal{C}_M\big|_V \to \dot{\pi}_*\tilde{\mathcal{C}}^2_V \to 0$$

ここに $\dot{\pi}: \dot{T}^*_V\tilde{V} \to V$ は自然な射影とする。$\tilde{\mathcal{C}}^2_V$ は脆弱層であることが知られている. (cf. 岡田－戸瀬[4], 片岡－岡田－戸瀬[5])

さて, 定理の証明に入ろう。戸瀬[1]によると, $u \in \mathcal{C}_M$ が $\mathcal{P} u = 0$ を満たすならば

$$SS^2_V(u) \setminus V \subset \{(x;\xi'';x_1^*, x_2^*) \in \dot{T}^*_V\tilde{V};\ x_1^* = 0 \text{ or } x_2^* = 0\}$$

が分る。$\tilde{\mathcal{C}}^2_V$ の section はマイクロ函数で大局的に代表出来るので、$\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \in \mathcal{C}_{M,q}$ が存在して

$$\begin{cases} u = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2, \quad P\tilde{u}_j \in A^2_V \quad (j=1,2) \\ SS^2_V(u_j) \setminus V \subset \{x_j^* = 0\} \quad (j=1,2) \end{cases}$$

を満たすことが分る.

$$0 = Pu = P\tilde{u}_1 + P\tilde{u}_2$$

より、$g = P\tilde{u}_1$ とおけば, Bony-Schapira [6] を用いると $w \in A^2_V$ で $Pw = g$ を満たすものが存在していることが分っているので、

$$u_1 = \tilde{u}_1 - w, \quad u_2 = \tilde{u}_2 + w$$

が求める u_1, u_2 であることが分る.

(証明了)

最後に岡田[3]の結果について述べよう。岡田[3]では、P に Levi 条件を課して、定理を distributionの中で示している。更には、u_j が z_j を正則パラメーター付の distribution で代表できることも示している.

文献表:

[1] 戸瀬信之：東京工業大学理学部紀要 33(1986), 619-634

[2] ———— : Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 67(1988), 23-37.

[3] 岡田靖則： 本研究集会での講演

[4] 岡田靖則-戸瀬信之：Journal de Mathématiques Pures

et Appliquées に出版予定。(cf. 東大理学部数学科プレプリント No. 5, 1989年)

[5] 片岡清臣－岡田靖則－戸瀬信之：準備中.

[6] J.M. Bony - P. Schapira: Annales de l'Institut Fourier 26 (1976), 81-140.