数理解析研究所講究録
第752巻 1991年 23-31

$\Gamma_o(p^2)$ の Hecke 環について

早大理工: 橋本喜一朗

§0. はじめに. (問題と動機)

K を $\wp$-進体,G を K 上の線型代数群, B をその開部分群とするとき, 対 (G,B) の Hecke 環が定まる.

$$H(G,B) := \text{free } \mathbf{Z}\text{-module on } \{[x] = BxB; x \in G\}$$

$$\text{積: } [x].[y] = \sum_{[z]} m([x],[y];[z])\ [z] \quad (m([x],[y];[z]) \in \mathbf{Z})$$

積は [Shi] の様に定義されるが, H(G,B) を G 上の (Z-値) 両側 B-不変, compact support をもつ函数の全体と同一視すると, G の Haar 測度による convolution と一致する. この時

問題 (1) $H(G,B)$ の環構造を求めること. 例へば, 生成元と (基本) 関係式を与えること.
問題 (2) $H(G,B)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{C}$ の有限次元表現 (特に 1 次元表現) を分類, 構成すること.

は基本的な問題であり, 多くの研究がなされているが, まだ調べられていない事柄も多いと思われる. ここでは, 最も易しい場合: $G := SL_2(\mathbf{Q}_p)$ について述べる. 開部分群 B として本質的に重要なのは

$$B_n := \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Q}_p); c \equiv 0\ (mod\ p^n)\} \quad (n = 0,1,2,\ldots)$$

である. ($B_0 = SL_2(\mathbf{Z}_p)$ = 極大開部分群). 実際, G の既約 admissible 表現 (π, V_π) に対して

$$V_\pi^B := \{f \in V_\pi; \pi(x)f = f\ (\forall x \in B)\}$$

の上に $H(G,B)$ の既約な表現 (φ_π, V_π^B) が引き起こされ, $V_\pi^B \neq \{0\}$ なる部分上ではこの対応は 1 対 1 である. 更に, (π, V_π) の conductor $f_\pi = p^n$ なら $\dim V_\pi^{B_n} = 1$ となる.

$H(G,B_0), H(G,B_1)$ については上記 問題 (1),(2) の解答は良く知られている.

Fact 1. (Hecke) $\quad H(G,B_0) = \mathbf{Z}[T^*(p)],\ T^*(p) = B_0\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p^{-1} \end{pmatrix}B_0,$

Fact 2. (Matsumoto) $\quad H(G,B_1) = \mathbf{Z}[T_1,T_2]_{nc},$

$T_i = B_1 s_i B_1,\ \ (i = 1,2) \quad s_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \ s_2 := \begin{pmatrix} 0 & p^{-1} \\ -p & 0 \end{pmatrix},$

relation: $(T_i+1)(T_i-p)=0 \ \ (i=1,2)$

そこで, 次に問題となるのは, $H(G,B_n)$ $(n \geq 2)$ の構造を上記の如く具体的に求めることである. 筆者は, 2 年程前から n = 2 の場合を調べているが, (この報告書を書く時点でも) 未だ完成していない. これは, 以下に見る如く, Hecke 環の構造がきわめて複雑になる事による. にも拘らず, この問題は十分に興味ある課題であると思うので, これまでに得られた結果と予想について報告する. まず, motivation から述べる:

動機 (1). 上記の様に $G=SL_2(\mathbf{Q}_p)$ や $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ の表現論は完成しているがこれを Hecke 環の表現との具体的な関連 (生成元の image 等) で記述する事は良く判っていない. さて, G の離散群Γ に対する,Ihara-Selberg 型ゼータ函数 $\zeta_\Gamma(u)$ は $L^2(G/\Gamma)$ に現れるスペクトルのうち, $V_\pi^{B_1} \neq \{0\}$ なる部分 (即ち, conductor = p^n ,$n \leq 1$) を統制している ([Has-1]). これを一般化して, 任意の conductor を持つスペクトルを統制するゼータ函数を求めたい. 問題 (1),(2) はそのための重要な step である.

動機 (2). Level N の primitive cusp form $f(z) \in S_2^0(\Gamma_0(N))$ の Fourier 係数が皆有理数とすると, f に対応する $\mathbf{Q}$ 上の 楕円曲線 E_f は conductor N を持つ. 従って楕円曲線の conductor の理論から $p>3$ なる任意の素数に対して, $ord_p(N) \leq 2$ でなければならないが, この事実 (及び weight $k>2$ への一般化) の "modular proof" (i.e., 楕円曲線, Galois 表現を用いない証明) は可能であろうか? この問題に迫るには $p^n \mid N$ $(n \geq 2)$ に於ける, T(p) 以外の "Hecke 作用素" を導入する必要がある. その為には, Hecke 環 $H(G,B_n)$ をキチンと調べる必要がある.

§1. $B_2 \ \longrightarrow \ B_{1,1}$.

以下では p は奇素数とし, $n=2$ のみを考える. この場合,

$$B_{1,1} := \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Q}_p); b,c \equiv 0 \ (mod\ p) \}$$

は B_2 と $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ 内で共役な開部分群で $H(G,B_2) \cong H(G,B_{1,1})$ となるので, 以下, 本稿では $H(G,B_{1,1})$ を考える. すると部分環 $H(B_0,B_{1,1})$ は reduction mod p によって

$$H(B_0,B_{1,1}) \cong H(\mathbf{G},\mathbf{T}) = \mathrm{End}_{\mathbf{G}}(\mathrm{Ind}_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\mathbf{1_T})), \quad \mathbf{1_T} \cong \mathbf{Z}\text{: trivial } \mathbf{T}\text{-module}$$

$$\mathbf{F}_p := \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}, \mathbf{G} := SL_2(\mathbf{F}_p), \quad \mathbf{T} := \{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}; a \in \mathbf{F}_p^\times \}.$$

上記右辺の誘導表現については, $\mathbf{G} := SL_2(\mathbf{F}_p)$ の指標表と Frobenius 相互律から簡単な計算により

Proposition 1 .

$$Ind_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\mathbf{1_T}) \quad = \quad \mathbf{1_G} \oplus 3\psi \oplus \left\{ \begin{array}{lll} (\xi_1+\xi_2) & p \equiv 1 & \pmod 4 \\ (\eta_1+\eta_2) & p \equiv 3 & \pmod 4 \end{array} \right\}$$

$$\oplus 2 \sum_{1 \le 2i \le \frac{p-3}{2}} \chi_{2i} \oplus 2 \sum_{1 \le 2j \le \frac{p-1}{2}} \theta_{2j}.$$

但し, $\psi, \xi_i, \eta_i, \chi_i, \theta_i$ は $\mathbf{G} = SL_2(\mathbf{F}_p)$ の既約指標で,[Dor] の記号を用いた. 特に $\deg(\psi) = p, \deg(\xi_i) = \frac{p+1}{2}, \deg(\eta_i) = \frac{p-1}{2}, \deg(\chi_i) = p+1, \deg(\theta_i) = p-1$.

これから,$\mathbf{C}$ 上の自己準同型環は直ちにわかるから:

Corollary 2 . $H(B_0, B_{1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C} \cong \mathbf{C} \oplus M_3(\mathbf{C}) \oplus (\mathbf{C} \oplus \mathbf{C}) \oplus M_2(\mathbf{C})^{\oplus(p-3)/2}$,
特に, $\dim H(B_0, B_{1,1}) = 2p + 6$.

Remark 1. $\mathbf{Q}$-algebra としての構造もわかる. 最初の 3 つの直和因子については $\mathbf{Q} \oplus M_3(\mathbf{Q}) \oplus \mathbf{Q}(\sqrt{(\frac{-1}{p})p})$ となる. 残りの因子は 1 の p-分体の実部分体上の行列環の直和となる.

$H(G, B_{1,1})$ は上記の部分環 $H(B_0, B_{1,1})$ のコピーを張り合わせたもの (融合積) として得られるがその完全な記述は容易でない. ここでは別の approach を試みる.

Corollary 3 . *$H(B_0, B_{1,1}) \otimes \mathbf{Q}$ の 1 次元表現はつぎの 3 個 $f_1, f_2, \bar{f}_2$ に限る:*

$$f_1 : H(B_0, B_{1,1}) \otimes \mathbf{Q} \to \mathbf{Q},$$

$$f_1([\alpha]) = \deg[\alpha] \quad (\text{片側 } cosets \text{ の個数}); \text{および},$$

$$f_2, \bar{f}_2 : H(B_0, B_{1,1}) \otimes \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}(\sqrt{(\frac{-1}{p})p}) \to \bar{\mathbf{Q}}.$$

さて, 問題 (1),(2) の解決の為には上の結果を両側 cosets を用いて記述する事が必要である.

記号: $[\alpha] := B_{1,1}\alpha B_{1,1} \in H(B_0, B_{1,1})$, $\chi(a) := (\frac{a}{p})$ $(a \in \mathbf{Z}_p)$. また, $\mathbf{F}_p^\times \cong \mu_{p-1} \subset \mathbf{Z}_p^\times$ によりしばしば $\mathbf{F}_p^\times$ の元を $\mathbf{Z}_p^\times$ の元として扱う. $\mathbf{F}_p = S \cup N$, $S = \{0, \text{平方剰余}\}, N = \{\text{平方非剰余}\}; \nu \in N$ を代表元とする.

$$t(x) := \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \hat{t}(x) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$$

この時, 両側 coset の代表系として次の $2p+6$ 個が取れる (数が多いので以下のようにうまくパラメータ表示することが大切).

$$\mathbf{1} := [I_2] = [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}], \quad w := [s_1] \quad \text{.....deg} = 1 \quad (\text{以下は } \deg = (p-1)/2)$$

$$\alpha_{\infty,\chi(\epsilon)} := [\hat{t}(\epsilon)] = [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix}], \quad (\epsilon = 1, \nu)$$

$$\eta_{\chi(\epsilon)} := [s_1 t(-\epsilon)] = [\begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ -\epsilon^{-1} & 1 \end{pmatrix}], \quad (\epsilon = 1, \nu)$$

$$\alpha_{0,\chi(\epsilon)} := [t(\epsilon)] = [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix}] \quad (= \gamma_{\chi(\epsilon)}(0)) \quad (\epsilon = 1, \nu)$$

$$\beta_{\chi(\epsilon)} := [t(-\epsilon)s_1] = [\begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ -\epsilon^{-1} & 0 \end{pmatrix}] \quad (= \gamma_{\chi(\epsilon)}(-1)), \quad (\epsilon = 1, \nu)$$

$$\gamma_{\chi(\epsilon)}(z) := [\hat{t}(z\epsilon)^{-1} t(\epsilon)] = [\begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ z\epsilon^{-1} & z+1 \end{pmatrix}], \quad (\epsilon = 1, \nu; z \in \mathbf{F}_p \backslash \{0, -1\})$$

§3. $H(B_0, B_{1,1})$ の 両側 cosets の乗法について.

上記の 両側 cosets を基底として, $H(B_0, B_{1,1})$ の構造定数を求めれば Prop. 1 が再現可能の筈であるが, これは $p=3$ の場合を除いて, 極めて難しい. ($p=3$ のときは, $PSL_2(\mathbf{F}_p) \cong A_4$ (4 次交代群), $B_0 \triangleright B_{1,1}$ であり乗法表は A_4 のそれと一致.) その理由の一つは $\mathbf{1}, w$ を除いて, 両側 cosets の degree が $\frac{p-1}{2} > 1$ $(p > 3)$ となることによる. 乗法表は以下の議論で基本的な役割をするが, 全部書くと長大なものになるのでここでは 2 ,3 の例を上げるにとどめる.

$$\alpha_{\infty,1}\alpha_{0,1} = \textstyle\sum_{x^2 \in S^\times} \gamma_+(x^2),$$

$$\alpha_{0,1}\alpha_{\infty,1} = \begin{Bmatrix} \eta_+ & \ldots p \equiv 1 \pmod 4 \\ 0 & \ldots p \equiv 3 \pmod 4 \end{Bmatrix} + \textstyle\sum_{x^2 \in S^\times, 1+x^2 \in S^\times} \gamma_+(x^2) + \textstyle\sum_{x^2 \in S^\times, 1+x^2 \in N} \gamma_-(x^2),$$

$$\alpha_{\infty,1}\gamma_+(z) = \textstyle\sum_{x^2 \in S^\times} \gamma_+(z + x^2),$$

$$\alpha_{\infty,1}\gamma_-(z) = \textstyle\sum_{x^2 \in S^\times} \gamma_-(z + \nu x^2),$$

$$\gamma_+(z_1)\gamma_+(z_2) = \begin{Bmatrix} \frac{p-1}{2}\mathbf{1} + \frac{p-1}{2}w & \ldots z_1 - z_2 = 0 \\ \alpha_{\infty,1} + \eta_+ & \ldots z_1 - z_2 \in S^\times \\ \alpha_{\infty,-1} + \eta_- & \ldots z_1 - z_2 \in N \end{Bmatrix}$$

$$+ \sum_{y^2\in S^\times, 1+z_2y^2\neq 0, 1+(z_2+1)y^2\neq 0} \gamma_{\chi(\frac{1+(z_2+1)y^2}{1+z_2y^2})}([1+(z_2+1)y^2][z_1+(z_1+1)z_2y^2]y^{-2}).$$

そこで, まず, Prop. 1 の分解の単純成分に対応する中心的巾等元を求める. これは岡村利彦氏によって計算された. ここでは以下の記述に関連する部分のみを書く.

記号: $A := \alpha_{0,1} + \alpha_{0,-1} + \alpha_{\infty,1} + \alpha_{\infty,-1}$, $B := \beta_+ + \beta_- + \eta_+ + \eta_-$, $C_z := \gamma_+(z) + \gamma_-(z)$ $(1 \le z \le p-2)$. $<\rho> = \mu_{p-1}$, $<\kappa> = \ker(\mathrm{Norm} : \mathbf{F}_{p^2}^\times \to \mathbf{F}_p^\times)$.

$$\begin{aligned}
a_\psi &:= 2\sum_{k=1}^{(p-1)/2} \chi(\rho^{2k} + \rho^{-2k} - 2 - 4z),\\
a_\xi &:= 2\sum_{k=1}^{(p-1)/2} (-1)^k\chi(\rho^{2k} + \rho^{-2k} - 2 - 4z),\\
a_\eta &:= 2\sum_{k=1}^{(p+1)/2} (-1)^{k+1}\chi(\kappa^{2k} + \kappa^{-2k} - 2 - 4z).
\end{aligned}$$

Proposition 4 . *Prop.1 の, $H(B_0, B_{1,1})$ の分解に於いて, Remark 1. で述べた 3 つの* **Q**-*単純成分に対応する中心的巾等元は次式で与えられる:*

$$\begin{aligned}
E_1 &= \frac{1}{p(p+1)}\{1 + w + A + B + \sum_{z=1}^{p-2} C_z\},\\
E_\psi &= \frac{1}{p^2-1}\{3(p-1)1 + (\frac{-1}{p})(p-1)w + (p-3)A + (\frac{-1}{p})B + \sum_{z=1}^{p-2} a_\psi(z)C_z\},\\
E_\xi &= \frac{1}{p(p-1)}\{(p-1)1 + (-1)^{(p-1)/4}(p-1)w - A - (-1)^{(p-1)/4}B + \sum_{z=1}^{p-2} a_\xi(z)C_z\}\\
&\qquad (p \equiv 1 \pmod 4),\\
E_\eta &= \frac{1}{p(p+1)}\{(p-1)1 + (-1)^{(p+5)/4}(p-1)w - A - (-1)^{(p+5)/4}B + \sum_{z=1}^{p-2} a_\eta(z)C_z\}\\
&\qquad (p \equiv 3 \pmod 4).
\end{aligned}$$

§4. Bruhat 分解.

G の B_1(= 岩堀部分群) に関する Bruhat 分解 はよく知られているように, affine Weyl 群 $W_{aff} := < s_1, s_2 >$ を用いて

$$G = \cup_{w\in W_{aff}} B_1 w B_1 = \cup_{\ell=0}^{\infty} G_\ell \quad (disjoint),$$

$$G_\ell := \cup^* \ B_1 w B_1 \quad (\text{w の簡約表示に } s_2 \text{ が } \ell \text{ 回現れるものの和}).$$

そこで,

$$M_\ell \ := \ \text{submodule in } H(G, B_{1,1}) \text{ generated by cosets in } B_{1,1}\backslash G_\ell / B_{1,1}$$

を考察する. $M_0 = H(B_0, B_{1,1})$; また M_ℓ は両側 $H(B_0, B_{1,1})$-module となる.

Proposition 5 .

$$\dim_{\mathbf{Q}} M_\ell = 2p + 10 \quad (\forall \ell > 0).$$

実際, M_ℓ の基底となる両側 *cosets* は以下の如く与えられる:

$[(s_2s_1)^{\ell-1}s_2] = ([s_2][s_1])^{\ell-1}[s_2]$

$[t(\epsilon)(s_1s_2)^\ell] = [t(\epsilon)]([s_1][s_2])^\ell \quad (\epsilon = 0, 1, \nu)$

$[(s_2s_1)^\ell t(\delta)] = ([s_2][s_1])^\ell [t(\delta)] \quad (\delta = 0, 1, \nu)$

$(s_1s_2)^\ell s_1] = ([s_1][s_2])^\ell [s_1]$

$[t(\epsilon)(s_1s_2)^\ell s_1] = [t(\epsilon)]([s_1][s_2])^\ell [s_1] \quad (\epsilon = 1, \nu)$

$[(s_1s_2)^\ell s_1 t(\delta)] = ([s_1][s_2])^\ell [s_1][t(\delta)] \quad (\delta = 1, \nu)$

$[t(x)(s_1s_2)^\ell s_1 t(\delta)] \quad (\delta = 1, \nu; x \in \mathbf{F}_p) \quad (x \neq 0 \Rightarrow$ *indecomposable*).

最後の行の両側 *cosets* のうち, $x \neq 0$ なるものは, 他の行の両側 *cosets* のように $H(B_0, B_{1,1})$ の *cosets* と $[s_2]$ の積には分解しない. この様な *indecomposable* な元の存在が問題を著しく困難にしている.

(例). *decomposable* な元の積も

$$[t(x)][(s_1s_2)^\ell s_1 t(\delta)] = \sum_{a^2 \in S^\times} [t(a^2x)(s_1s_2)^\ell s_1 t(\delta)]$$

の様な和になって, 右辺の各項を分離するのは難しい. 従って次のようなことも証明は難しい:

予想. *(1)* $H(B_0, B_{1,1}) \otimes \mathbf{Q} \ = \ \mathbf{Q}[[s_1], [t(1)]]$.
(2) $H(G, B_{1,1}) \otimes \mathbf{Q} \ = \ \mathbf{Q}[[s_1], [t(1)], [t(x)s_1s_2s_1t(\delta)]], \quad (\forall x, \delta \neq 0)$.

そこで, つぎの *2* つの命題は $H(G, B_{1,1}) \otimes \mathbf{Q}$ の *1* 次元表現を決定するための *key* となる.

Proposition 6 .　左 (または右) $H(B_0, B_{1,1})$-*module* として

$$M_1 \cong M_2 \cong \dots \cong M_\ell \quad (\forall \ell > 0).$$

Proposition 7 .　$M_{\ell+1} \subset M_\ell M_1 \quad (\forall \ell > 0)$.

§5. 主結果.

以下に述べる 2 つの結果は, まだ証明が未完成であるが, 本質的な *gap* があるわけではなく複雑さのみが原因であるので定理と書かせて頂く. $\ell \in \mathbf{N}, \delta \in \mathbf{F}_p$ を固定し,

$h_x = h_\delta^{(\ell)}(x) := [t(x)(s_1 s_2)^\ell s_1 t(\delta)] \quad (x \in \mathbf{F}_p \backslash \{0\})$,

$h_{p+1} = h_{\delta,p+1}^{(\ell)} := [(s_2 s_1)^\ell t(\delta)]$,

$h_p = h_{\delta,p}^{(\ell)} := [(s_1 s_2)^\ell s_1 t(\delta)]$,

$M_{\ell,\delta} := \mathbf{Q} h_{p+1} + \sum_{x \in \mathbf{F}_p} \mathbf{Q} h_x$

とおく. このとき $M_{\ell,\delta} = M_{\ell,a^2\delta} \quad (\forall a \in \mathbf{F}_p^\times)$ であって,

$$M_\ell = M_{\ell,1} \oplus M_{\ell,\nu} \oplus (\textit{decomposable part})$$

となる.

Theorem 1 .　$\delta = 1$ *or* $\nu \in \mathbf{F}_p$ に対して

(i) $M_{\ell,\delta}(1) := E_1 M_{\ell,\delta}$ は $\mathbf{Q}$ 上 1 次元 $H(B_0, B_{1,1})$-部分加群で,

$$(p+1) E_1 h_z = (h_1 + \dots + h_{p+1}) \quad (\forall z \in \mathbf{F}_p).$$

(ii) $M_{\ell,\delta}(\psi) := E_\psi M_{\ell,\delta}$ は $\mathbf{Q}$ 上 3 次元 $H(B_0, B_{1,1})$-部分加群で,

$$(p^2-1) E_\psi h_z = (p+3) \sum_{a^2 \in S^\times} h_{za^2} - (p-1) \sum_{a^2 \in S^\times} h_{z\nu a^2} - (p-1)(h_p + h_{p+1}) \quad (\forall z \in \mathbf{F}_p^\times),$$

$$(p^2-1) E_\psi h_p = -(p-1)(h_1 + \dots + h_{p-1} + h_{p+1}) + p(p-1) h_p,$$

$$(p^2-1) E_\psi h_{p+1} = -(p-1)(h_1 + \dots + h_{p-1} + h_p) + p(p-1) h_{p+1}.$$

(iii) $p \equiv 1 \pmod 4$ とする. $M_{\ell,\delta}(\xi) := E_\xi M_{\ell,\delta}$ は $\mathbf{Q}$ 上 *2* 次元 $H(B_0, B_{1,1})$-部分加群で,

$$\frac{p-1}{2} E_\xi h_z = \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k h_{z\rho^{2k}} \quad (\forall z \in \mathbf{F}_p^\times),$$

$$E_\xi h_p = E_\xi h_{p+1} = \{0\}.$$

(iv) $p \equiv 3 \pmod 4$ とする. このとき $M_{\ell,\delta}(\eta) := E_\eta M_{\ell,\delta} = \{0\}$.

Theorem 2 *(主結果).*
(i) $H(G, B_{1,1}) \otimes \mathbf{Q}$ の *1* 次元表現 $\varphi^{(1)}$ で, $\varphi^{(1)} \mid H(B_0, B_{1,1}) \otimes \mathbf{Q} = f_1$ なるものは丁度 *2* 個存在する*:*

$$\varphi_1^{(1)} = deg \quad ..... \quad \varphi_1^{(1)}([s_1]) = 1, \varphi_1^{(1)}([t(1)]) = \frac{p-1}{2}, \varphi_1^{(1)}([s_2]) = p^2;$$

$$\varphi_2^{(1)} \quad ..... \quad \varphi_2^{(1)}([s_1]) = 1, \varphi_2^{(1)}([t(1)]) = \frac{p-1}{2}, \varphi_2^{(1)}([s_2]) = -p,$$

$$\varphi_2^{(1)}(h_{\delta,x}^{(\ell)}) = \varphi_2^{(1)}(h_{\delta,p}^{(\ell)}) = \varphi_2^{(1)}(h_{\delta,p+1}^{(\ell)}) = (-1)^\ell \frac{p-1}{2}.$$

(ii) $p \equiv 3 \pmod 4$ とする. この時, $H(G, B_{1,1}) \otimes \mathbf{Q}$ の *1* 次元表現 $\varphi^{(2)}$ で, $\varphi^{(2)} \mid H(B_0, B_{1,1}) \otimes \mathbf{Q} = f_2$ なるものは唯一つ存在し, $Supp(\varphi^{(2)}) \subset H(B_0, B_{1,1}) \otimes \mathbf{Q}$ をみたす *(*従って, G の *super cuspidal* 表現に対応する*).*

Remark 2. $p \equiv 1 \pmod 4$ の時は, 定理 *1* からは, $\varphi^{(2)}$ は *(*その存在も*)* 決まらない. しかし, $p = 5$ で計算すると, $\varphi^{(2)}(h_{\delta,1}^{(1)}) = 2p \times \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ *etc.* が出る. 従ってこの場合, *super cuspidal* でない表現と対応する $H(G, B_{1,1}) \otimes \mathbf{Q}$ の *1* 次元表現が一組存在すると思われる.

以上.

References.

[Bo] *A.Borel: Admissible representations of a semi-simple group over a local field with vectors fixed by an Iwahori subgroups, Invent.math 35 (1976), 233-259.*

[Cas] *W.Casselman: An assortment of results on representations of* $GL_2(k)$*, Lec.Notes, 349, Springer (1972), 1-54.*

[Dor] *L.Dornhoff: Group Representation Theory, Marcel Dekker, New York (1971).*

[Has-1] *K.Hashimoto: Zeta functions of finite Graphs and Representations of p-adic Groups, Advanced Study in Pure Math. 15 (1989), 211-280.*

[H-H] *K.Hashimoto, A.Hori: Selberg-Ihara's Zeta function for p-adic Discrete Groups, Advanced Study in Pure Math. 15 (1989), 171-210.*

[Ih] *Y.Ihara: On discrete subgroups of the two by two projective linear group over p-adic fields, J.Math.Soc. Japan 18 (1966), 219-235.*

[I-I] *N.Iwahori, H.Matsumoto: On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of p-adic Chevalley groups, Publ. Math. IHES 25 (1965), 5-48.*

[J-L] *H.Jacquet, R.P.Langlands: Automorphic Forms on GL(2), Lecture Notes in Math., 114, Springer (1970).*

[Se] *J-P.Serre: Represéntation Linéaires des Groupes Finis, Hermann, Paris (1971)*

[Shi] *G.Shimura: Introduction to the Arithmetic theory of Automorphic functions, Publ. Math.Soc.of Japan, (1971)*