数理解析研究所講究録
第 752 巻 1991 年 86-100

On Twisting Operators and Newforms of Half-integral Weight

上田 勝 (Masaru Ueda, 京大 理)

〈序〉この文章は整数 weight で成立した Newform の理論に相当するものを半整数 weight の場合に拡張しようという話である。この試みは既に [N], [K], [U1], [MRV] 等で取り扱われている。しかし、それらはいずれも level が高々 4×(squarefree な正の奇数)の場合しか扱えなかった。今回の話は level の各素因数 p での指数 (= exponent) が 2 以上という、今までの逆ともいえる場合に Newform の理論、特に strong multiplicity one theorem の成立する部分空間を見い出したという事なのである。そのために、我々は半整数 weight の twisting operator を用いる。

詳しい事を述べる前に一言書いておこう。今回の論文で示した様に今までの論文では扱えなかったかなり一般の場合にも New-form の理論が存在するということ、更にまた今回の論文でも扱えなかった場合においても成立する、様々な状況証拠からすると半整数 weight の保型形式は今まで考えられていた以上にはるかに簡明な理論の下に統制されている様である。

以下の §1 ~ §3 についての詳しい記号の定義、内容の証明等については [U1] ~ [U3] を見られたい。

§1. 一般的状況

k, N を正の整数で更に N は 4 の倍数であるとする。また χ を modulo N の even Dirichlet character で $\chi^2=1$

をみたすものであるとして、これらの記号を以下しばらく固定して考える。これらに対し重さ $k+1/2$, level N, character χ の cusp form のなす空間 $S(k+1/2, N, \chi)$ を考える。(定義については [V1] を見よ。) Shimura lifting によりこの空間は重さ $2k$, level $N/2$ の cusp form のなす空間 $S(2k, N/2)$ と対応する事が知られている。

(注1) 但し重さ $3/2$ の時には $S(3/2, N, \chi)$ にはテータ級数の張る空間 $V(N, \chi)$ が含まれ、$V(N, \chi)$ は Shimura lifting で重さ2の Eisenstein 級数に対応する。従って重さ2の cusp form を考える時には正確にいうと、この部分空間 $V(N, \chi)$ をとりのぞく必要がある。しかし面倒なので以下では必要のない限り、この事には言及しない。▨

さて二つの cusp form の空間 $S(k+1/2, N, \chi)$ 及び $S(2k, N/2)$ の上にそれぞれ作用する Hecke 作用素が $(n, N)=1$ なる任意の自然数 n に対して定義できる。これをそれぞれ $\tilde{T}(n^2)$, $T(n)$ で表わそう。(cf. [V1]) それぞれの cusp form の空間はこれらの Hecke 作用素の同時固有部分空間の直和に分解される。この時 Shimura lifting とはかなりあらくいうと、" $S(k+1/2, N, \chi)$ の Hecke 作用素 $\{\tilde{T}(n^2) \mid (n, N)=1\}$ に対する固有値のシステム $\{\lambda(n) \mid (n, N)=1\}$ が $S(2k, N/2)$ の Hecke 作用素 $\{T(n) \mid (n, N)=1\}$ に対する固有値のシステムになる"

ことであるといえる。

(注2) もちろんこれはひどく乱暴な言い方である。詳しくは各参考文献を見られたい。▨

よく知られている様に整数 weight の場合には Newform の理論が存在する。それを用いると、次の様な分解が与えられる。

$$S(2k, N/2) = \bigoplus_{0<d\,|\,N/2} \bigoplus_{F:\text{primitive}} \langle F(ez) \mid 0<e\in\mathbb{Z},\ ed \mid N/2 \rangle_{\mathbb{C}}$$

但し $\bigoplus_F$ の F は重さ $2k$ level d の全ての primitive form を走る。(cf. [M])

更に全ての固有値のシステムは(基本的に)重さ $2k$ の primitive form で与えられる事も分かる。従って我々は空間 $S(k+1/2, N, \chi)$ を $S(2k, N/2)$ に含まれる primitive form $F \in S^{new}(2k, d)$ によって次の様に分解できる。

まず F の Hecke 作用素 $T(n)$ に対する固有値を $\lambda_F(n)$ とする。これに対して、

$$S(k+1/2, N, \chi; F) := \left\{ \begin{array}{l} f \in S(k+1/2, N, \chi)\,;\ (n,N)=1 \text{ となる全ての} \\ \text{自然数 } n \text{ に対して } f \mid \tilde{T}(n^2) = \lambda_F(n) f \end{array} \right\}$$

と定める。すると、

$$S(k+1/2, N, \chi) = \bigoplus_{0<d\,|\,N/2} \bigoplus_{F:\text{primitive}} S(k+1/2, N, \chi; F)$$

ここで $\bigoplus_F$ の F は重さ $2k$, level d の全ての primitive form を走る。

さて我々の目標をここに掲げよう。

<u>目標</u> (Problem) 上で定めた空間 $S(k+1/2, N, \chi; F)$ の Hecke 加群としての構造を決定せよ。

(注3) もちろんより一般的に $\chi^2 \neq 1$ の場合にも同じ問題を考えたい。▨

この目標(=問題)についての解説をしよう。今半整数 weight の cusp form においても整数 weight の場合と同じ状況となっていて、いわゆる Newform の理論が存在するとしてみよう。であるならば、我々は F が level $N/2$ の Primitive form の時には $S(k+1/2, N, \chi; F)$ が $\mathbb{C}$ 上高々1次元である事を期待していいはずである。しかし残念な事に次の反例が存在する。

〈例1〉重さ $3/2$, level 100 の場合 (cf. [U4, P80])

$\chi = \left(\frac{1}{\ }\right), \left(\frac{5}{\ }\right)$ (Kronecker 記号)に対して次が成立する。

$$S(3/2, 100, (\tfrac{1}{\ })) = S(3/2, 100, (\tfrac{1}{\ }); F_{50A}),$$
$$S(3/2, 100, (\tfrac{5}{\ })) = S(3/2, 100, (\tfrac{5}{\ }); F_{50E})$$

そしてこれら二つの空間はともに2次元である。但し 50A, 50E は Springer Lec. Note Vol. 476 (Antwerp IV) での記号である。▨

この例の様な状況は一般に $N = 4P^2$ (P: 奇素数)の時にいつでも起こる事が知られている。(cf. [N], [U1])

そこで次に考えられるのは、$S(k+1/2, N, \chi)$ を部分空間、それもできれば、ある作用素に対する固有空間に置き換える事で、重さ $2k$ の newform と1対1に対応する様にできないだろうかということである。

これについて、W. Kohnen [K] による次の結果がある。

$4\| N$ かつ $\chi^2 = 1$ の場合に $S(k+1/2, N, \chi)$ の次の部分空間を考える。

$$S(k+1/2, N, \chi)_K := \left\{ \begin{array}{l} f = \sum_{n\geq 1} a(n)\, e(nz) \in S(k+1/2, N, \chi)\,; \\ \chi_2(-1)(-1)^k n \equiv 2, 3 \pmod 4 \text{ となる全ての} \\ n \text{ に対し } a(n) = 0 \end{array} \right\}$$

但し $e(z)=\exp(2\pi\sqrt{-1}\,z)$, $z\in\mathfrak{H}$(上半平面), $\chi_2=\chi$の2-成分。
この部分空間をKohnen部分空間と呼ぼう。これはあるエルミート作用素の固有部分空間としても定義される。(cf. [K])

これについての[K]の主結果は次の通り。

<u>定理</u>([K]) $N/4$をsquarefreeな正の奇数とし、$\chi^2=1$である時Hecke加群としての次の同型が存在する。

$$S(k+1/2, N, \chi)_K \cong S(2k, N/4)$$

更に半整数weightの"newform"の空間 $S^{new}(k+1/2, N, \chi)_K$ が定義できて、Hecke加群としての次の同型が存在する。

$$S^{new}(k+1/2, N, \chi)_K \cong S^{new}(2k, N/4)$$

ここで右辺の $S^{new}(2k, N/4)$ は整数weightの場合のnewformのなす(通常の意味の)部分空間を表わす。▨

この定理より、$N/4$がsquarefreeな正の奇数で$\chi^2=1$である時にはstrong multiplicity one theoremがKohnen部分空間について成立するという事が出る。

さて[N], [K], [MRV]の結果は全て次の様にして得られた。まずShimuraのtrace formulaを用いて重さ$k+1/2$のHecke作用素のtraceを具体的に求める。次にそれを重さ$2k$のHecke作用素のtraceと比較し、両者の間のtrace relationを見い出す。最後にそれを用いて、Hecke作用素の表現空間としての両者の一致を見て間接的に同型を得るのである。

[N], [K], [MRV]の結果におけるsquarefreeという仮定は重要で、これを落とすとうまくいかない。次の様な反例が出てくる。

〈例2〉 重さ $3/2$, level 196, $\chi=\left(\frac{7}{\cdot}\right)$ の場合 (cf. [U4, P.98])

$$S(3/2, 196, (\tfrac{7}{\cdot}))_K = \mathbb{C}h \oplus V(196, (\tfrac{7}{\cdot}))_K .$$

h はテータ級数で Shimura lifting で Eisenstein 級数に対応する。従って (注1) で述べた通り cusp form に対応するのはその直交補空間 $V(196, (\frac{7}{\cdot}))_K$ である。ところがこれは2次元であって

$$V(196, (\tfrac{7}{\cdot}))_K = S(3/2, 196, (\tfrac{7}{\cdot}); F_{49A})_K$$
$$:= S(3/2, 196, (\tfrac{7}{\cdot}); F_{49A}) \cap S(3/2, 196, (\tfrac{7}{\cdot}))_K$$

となる。つまり重さ2, level 49 の Primitive form F_{49A} に対応する空間が2次元でてくる。但し 49A は Springer Lec. Note Vol. 476 の記号である。▨

従って square free でない level を考えるためには Kohnen 部分空間でも十分ではなく、更に小さな部分空間に分割する必要がでてくる。我々はそのために twisting operator を用いる。(これは齋藤裕先生に示唆していただいた。)

§2 twisting operator と主結果.

k, N, χ を §1 の初めに取ったものであるとする。即ち、$4 \| N$ とは限らないとしておく。まず twisting operator は次の様に定められる。

$f = \sum_{n\geq 1} a(n)\, \mathbf{e}(nz) \in S(k+1/2, N, \chi)$ と conductor $f(\chi)$ の primitive character ψ とに対して $f|R_\psi$ を次で定める。

$$f|R_\psi(z) := \sum_{n\geq 1} a(n)\psi(n)\,\mathbf{e}(nz), \quad z \in \mathfrak{H}$$

すると $f(\psi)^2$, $f(\psi)f(\chi)$, N の3つの自然数の最小公倍数を N' とする時 $f|R_\psi \in S(k+1/2, N', \chi\psi^2)$ を得る。但し $f(\chi)$ は χ の conductor である。

以下我々は ψ として次の様な形のもののみ考える。まず、
$\Pi := \{N$ の奇素因数 p で $p^2 | N$ となるもの$\}$ と定める。
そして任意の部分集合 $I \subseteq \Pi$ に対して、
$\ell_I := \prod_{\ell \in I} \ell$, $\psi_I := \left(\frac{\ }{\ell_I}\right)$ (Legendre 記号), $R_I := R_{\psi_I}$ とし、
特に空集合 $\emptyset$ について $\ell_\emptyset = 1$, $\psi_\emptyset = 1$, $R_\emptyset = 1$ と定める。
すると次の命題が成立する。

<u>命題</u> ([U2])
(1) R_I $(\forall I \subseteq \Pi)$ は $S(k+1/2, N, \chi)$ 及び $S(k+1/2, N, \chi)_K$ 上の semi-simple Hermitian operator である。
(2) R_I $(\forall I \subseteq \Pi)$ は Hecke 作用素 $\tilde{T}(n^2)$ $(\forall n \in \mathbb{N}, (n, N) = 1)$ と可換である。▨

また我々は [U1], [U2] において、Shimura の trace formula を用いて $R_I \tilde{T}(n^2)$ の trace を計算し、[N], [K] の結果を含む、かなり一般の trace relation を得ている。これらの trace relation は一見極めて複雑であるが まとめなおしてみると、むしろ意外な程すっきりした形になる。途中の計算は [U3] を見ていただくとして、結果を述べよう。

ここから先は Kohnen 部分空間のみについて考える。

以下 M を正の奇数で squarefull となるものとする。但し
"M が squarefull" $\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ "M の全ての素因数 p に対し $p^2 | M$ となる。"
という事である。更に $N = 4M$, $k \geq 2$ であるとする。

(注5) "$k \geqq 2$" は前に述べた様にテータ級数の存在からくる説明の便宜上の仮定である。従って必要な改変をすれば、以下の事は $k=1$ でも成立する。[U3] を見よ。▨

すると この時、$\pi = \{M$ の素因数$\}$ となる。今 $\mathrm{Ker}(R_\pi)$ の $S(k+1/2, N, \chi)_K$ の中での直交補空間を $S^{\emptyset} = S^{\emptyset}(k+1/2, N, \chi)_K$ で表わそう。すると前の命題より、R_I, $\tilde{T}(n^2)$ ($\forall I \subseteq \pi$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n, N) = 1$) は $S^{\emptyset}$ に作用し、従って $S^{\emptyset}$ を $\{R_I \mid I \subseteq \pi\}$ の同時固有空間の直和に分割することができる。

今 $\forall \kappa \in \mathrm{Map}(\pi, \{\pm 1\})$ に対し

$$S^{\kappa}(k+1/2, N, \chi)_K := \left\{ \begin{array}{ll} f \in S^{\emptyset}(k+1/2, N, \chi)_K & ; \\ f \mid R_{(\ell)} = \kappa(\ell) f & (\forall \ell \in \pi) \end{array} \right\}$$

と定める。この各固有空間 $S^{\kappa}(k+1/2, N, \chi)_K$ のそれぞれに対し、[U1], [U2] で得られた *trace relation* を用いることにより、*strong multiplicity one theorem* が成立することが示される。

主結果を述べるために、記号を導入せねばならない。

まず $\alpha_\ell \in \mathbb{Z}$ ($\forall \ell \in \pi$) を $0 \leq \alpha_\ell \leq \mathrm{ord}_\ell(M)$ となる任意の元とする。そして $(\alpha_\ell)_{\ell \in \pi}$ という組に対して、

$\Omega := \{\ell \in \pi \mid \alpha_\ell \geqq 1\}$, $\Omega' := \{\ell \in \pi \mid \alpha_\ell \geqq 2\}$,

$\Omega_2 := \{\ell \in \pi \mid \alpha_\ell = 2\}$ と置く。

次に、重さ $2k$, level $\prod_{\ell \in \pi} \ell^{\alpha_\ell}$ の newform のなす空間 $S^{new}(2k, \prod_{\ell \in \pi} \ell^{\alpha_\ell})$ の中の部分空間

$$\sum_{A \amalg B \amalg C = \Omega_2} S^{new}\Big(2k, \prod_{\substack{\ell \in \Pi \\ \alpha_\ell \neq 2}} \ell^{\alpha_\ell} \prod_{\ell \in A} \ell^2 \prod_{\ell \in B} \ell\Big) \Big| R_B R_C$$

を考える。但し $\amalg$ は disjoint union の記号とする。更にこの部分空間の $S^{new}(2k, \prod_{\ell \in \Pi} \ell^{\alpha_\ell})$ の中での直交補空間を $S^*(2k, \prod_{\ell \in \Pi} \ell^{\alpha_\ell})$ と置く。すると $S^*(2k, \prod_{\ell \in \Pi} \ell^{\alpha_\ell})$ は Atkin-Lehner の normalizer 作用素 $W(\ell^{\alpha_\ell})$ $(\forall \ell \in \Omega)$ 及び twisting operator $R_{(\frac{\ }{\ell})}$ $(\forall \ell \in \Omega')$ によって不変であることが示される。従って
$\forall(\tau, \sigma) \in Map(\Omega, \{\pm 1\}) \times Map(\Omega', \{\pm 1\})$ に対して、次の様な固有空間が定められる。

$$S^*_{(\tau,\sigma)}\Big(2k, \prod_{\ell \in \Pi} \ell^{\alpha_\ell}\Big)$$

$$:= \left\{ \begin{array}{l} f \in S^*(2k, \prod_{\ell \in \Pi} \ell^{\alpha_\ell}) \ ; \\ f | W(\ell^{\alpha_\ell}) = \tau(\ell) f \quad \text{for all} \quad \ell \in \Omega \\ f | R_{(\frac{\ }{\ell})} W(\ell^{\alpha_\ell}) = \sigma(\ell) f | R_{(\frac{\ }{\ell})} \quad \text{for all} \quad \ell \in \Omega' \end{array} \right\}$$

これらの記号の下で次の定理が成立する。

<u>定理 1</u> ([U3]) M を正の奇数で squarefull であるものとする。この時以下の主張が成立する。

(1) $S(k+1/2, 4M, \chi)_K$

$$= Ker(R_\Pi) \oplus \bigoplus_{\kappa \in Map(\Pi, \{\pm 1\})} S^\kappa(k+1/2, 4M, \chi)_K$$

(2) 更に各 $\kappa \in Map(\Pi, \{\pm 1\})$ に対し、Hecke 加群としての次の同型が存在する。

$$S^{\kappa}(k+1/2, 4M, \chi)_K$$

$$\cong \bigoplus_{(\alpha_\ell)_{\ell\in\Pi}} \bigoplus_{\Psi} \bigoplus_{(\tau,\sigma)} \xi((\alpha_\ell), \Psi, \tau, \sigma)\, S^{*}_{(\tau,\sigma)}\Big(2k, \prod_{\ell\in\Pi} \ell^{\alpha_\ell}\Big) \Big| R_{\Psi},$$

但し $(\alpha_\ell)_{\ell\in\Pi}$ は $0 \leq \alpha_\ell \leq ord_\ell(M)$ となる整数 α_ℓ の組全体を動き、Ψ は $\{\ell\in\Pi \mid \alpha_\ell = 0, 1\}$ の任意の部分集合を動き、そして (τ, σ) は $Map(\Omega, \{\pm 1\}) \times Map(\Omega', \{\pm 1\})$ の任意の元を動く。

(3) (2) の同型の中の重複度 $\xi((\alpha_\ell), \Psi, \tau, \sigma)$ は (α_ℓ), Ψ, τ, σ によって完全に具体的に決定でき、0又は 1 の値をとる。つまり言いかえれば空間 $S^{\kappa}(k+1/2, 4M, \chi)_K$ について strong multi-plicity one theorem が成立するという事である。▨

(注6) 我々は $Ker(R_\Pi) \subseteq \sum_{I\neq\emptyset} S(k+1/2, N/\ell_I, \chi(\frac{\ell_I}{}))_K$

を示す事ができる。従って $N/\ell_I < N$ に注意すると、$Ker(R_\Pi)$ はいわゆる "old-form" の部分であると考えられる。▨

さて、$S^{\kappa}(k+1/2, 4M, \chi)_K$ をより細かく分解することにより、Shimura lifting で対応する整数 weight の空間の level が全て M に等しいもののみ抜き出すことができる。

そのためには M にもうひとつの条件を仮定せねばならない。つまり以下 M は正の奇数で squarefull であるのみならず、あるひとつの素因数 p に対しては $p^3 | M$ となるものであると仮定する。

この時 $S^{\kappa, new}(k+1/2, N, \chi)_K$ を $S^{\kappa}(k+1/2, N, \chi)_K$ の中での

部分空間 $\displaystyle\sum_{\substack{M':\text{squarefull}\\ M'|M,\ \pi(M')=\pi(M)}} S^{\kappa}(k+1/2, 4M', \chi)_K$

の直交補空間であるとして定義する。但し「$\pi(M')=\pi(M)$」とは M と M' の素因数の集合が一致するということである。

すると次の定理が成立する。

<u>定理2</u>（[U3]）M を squarefull な正の奇数で少くともひとつの素因数 p について $p^3|M$ となるものであるとする。この時 Hecke 加群としての次の同型が成立する。

$$S^{\kappa,new}(k+1/2, 4M, \chi)_K$$

$$\cong \bigoplus{}' \,\xi((\alpha_\ell), \Psi, \tau, \sigma)\, S^{*}_{(\tau,\sigma)}(2k, \prod_{\ell\in\pi}\ell^{\alpha_\ell}) | R_{\Psi} ,$$

但し $\xi((\alpha_\ell), \Psi, \tau, \sigma)$ は定理1と同じ値の重複度の記号であり $\bigoplus{}'$ は次の条件(*)をみたす $(\alpha_\ell), \Psi, (\tau, \sigma)$ の組全てにわたる直和の記号である。

(*) $S^{*}_{(\tau,\sigma)}(2k, \prod_{\ell\in\pi}\ell^{\alpha_\ell}) | R_{\Psi} \subseteq S^{new}(2k, M)$ ▨

（注7）$\kappa \neq \kappa'$ でも Hecke 加群として

$$S^{\kappa,new}(k+1/2, 4M, \chi)_K \cong S^{\kappa',new}(k+1/2, 4M, \chi)_K$$

となることもある。(cf. M. Ueda, Proc. of Japan Acad. Vol. 65 1990) ▨

§3 コメント その他。

定理2で M に奇妙な仮定を付加したのは、M の exponent が

全て2になる時には困難が生じるからである。一番簡単な $M=p^2$,（p：奇素数）$\chi=1$ の場合を考えてみると $S^{\kappa}(k+1/2,\ 4p^2)_K$
（$:= S^{\kappa}(k+1/2,\ 4p^2,\ 1)_K$）には Shimura lifting で
$S^{new}(2k,\ p)$, $S^{new}(2k,\ 1)$ に属する primitive form に対応する部分がでてくる。

これらは $S(k+1/2,\ 4p)_K$ や $S(k+1/2,\ 4)_K$ からの寄与であると考えられるのだが、これらの空間にはそのままでは twisting operator $R=R_{\left(\frac{\ }{p}\right)}$ が作用しない。例えば

$$S(k+1/2,\ 4p)_K \xrightarrow[R]{} S(k+1/2,\ 4p^2)_K \quad \text{等々。}$$

これらについては次の様に考えられる。今 $R^3=R$ に注意して、

$$\mathfrak{S}(k+1/2,\ 4p)_K := S(k+1/2,\ 4p)_K + S(k+1/2,\ 4p)_K|R + S(k+1/2,\ 4p)_K|R^2$$

という空間を作ると、これは R 及び Hecke 作用素で閉じている。
そこで $\kappa \in Map(\{p\},\ \{\pm 1\}) = \{\pm 1\}$ に対し、

$$\mathfrak{S}^{\kappa}(k+1/2,\ 4p)_K := \{ f \in \mathfrak{S}(k+1/2,\ 4p) \mid f|R = \kappa f \}$$ とおく。

同様にして $\mathfrak{S}^{\kappa}(k+1/2,\ 4)_K$ を定めておく。すると、

$$S^{\kappa}(k+1/2,\ 4p^2)_K \supseteq \mathfrak{S}^{\kappa}(k+1/2,\ 4p)_K \supseteq \mathfrak{S}^{\kappa}(k+1/2,\ 4)_K$$ であり、

更に $p\equiv 1 \pmod 4$ であれば $\mathfrak{S}^{\kappa}(k+1/2,\ 4p^i)_K$ $(i=0,1)$ が丁度 Shimura lifting で $S^{new}(2k,\ p^i)$ の primitive form に対応する $S^{\kappa}(k+1/2,\ 4p^2)_K$ の部分空間になることが示されるのである。

この状況を図示してみると、次の様になる。

即ち　$p \equiv 1 \pmod 4$ の時には

$\vdots$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$

$\cup|$ $\quad \Big) \Leftrightarrow S^{new}(2k, p^4)$ の中の primitive forms

$S^{K}(k+1/2, 4p^3)_K$ $\Big) \Leftrightarrow S^{new}(2k, p^3)$ の中の primitive forms

$\cup|$

$S^{K}(k+1/2, 4p^2)_K$

$\cup|$ $\quad \Big) \Leftrightarrow S^{new}(2k, p^2)$ の中の primitive forms

$S^{K}(k+1/2, 4p)_K$ $\Big) \Leftrightarrow S^{new}(2k, p)$ の中の primitive forms

$\cup|$

$S^{K}(k+1/2, 4)_K$ $\quad \Leftrightarrow S^{new}(2k, 1)$ の中の primitive forms

というきれいな filtration ができるというわけである。更にいくつかの例によると、$4p_1^2 \cdots p_r^2$（$p_1, \ldots, p_r$：奇素数）の時にも同様な状況であると推測できる。これらの詳細については別稿を準備中である。

最後に Kohnen 部分空間以外の時についてであるが、この時には "bad prime" 2 について考えねばならない。N の 2 での exponent が高い時（≥ 8）の trace relation はかなり複雑な形となり、現状では扱えていない。(cf. [U1], [U2])
たぶん $S(2k, N)$ の basis problem の時の様に $S(k+1/2, N, \chi)$, $\chi^2 \neq 1$ という Neben type からの寄与等をも考慮せねばならないようである。

$\chi^2 = 1$ という仮定は Shimura の trace formula を具体的に計算する際に"純"技術上に置いた仮定である。従ってここで述べた事は $\chi^2 \neq 1$ の時にも成立すると考えている。しかしながら、trace formula を $\chi^2 \neq 1$ の時に具体的に求めるのは現在の

ところ手のつけようがないと筆者には思われる。かなり細かい分析が必要であろう。($\chi^2=1$の時の計算でも60頁の論文である。)

1991. 3. 31.

〈参考文献〉

[K] W. Kohnen, Newforms of half-integral weight, J. reine und angew. Math. 333 (1982) P.32–72.

[M] T. Miyake, Modular forms, Springer (1989).

[MRV] Manickam, Ramakrishnan, and Vasudevan, On the theory of Newforms of half-integral weight, J. of Number theory Vol. 34 (1990) P. 210–224.

[N] S. Niwa, On Shimura's trace formula, Nagoya Math. J. 66 (1977) P. 183–202.

[U1] M. Ueda, The decomposition of the spaces of cusp forms of half-integral weight and trace formula of Hecke operators, J. Math. Kyoto Univ. 28 (1988) P.505–555

[U2] M. Ueda, the trace formulae of twisting operators on the spaces of cusp forms of half-integral weight and some trace relations. to appear in Japanese J. of Math., New series Vol. 17-1 (1991).

[U3] M. Ueda, On twisting operators and New-forms of half-integral weight (preprint).

[U4] M. Ueda, Table for modular forms of weight 3/2 (No. 1) (1987).